Индивидуальные задания по векторной алгебре

Вариант №1.

1. Даны точки $A(1;-2;0)$, $B(0;1;-4)$ и $C(-1;0;1)$. На оси OX найти точку D так, чтобы вектор $\overrightarrow{AB}$ был перпендикулярен вектору $\overrightarrow{CD}$.
2. Параллелограмм $OABC$ построен на векторах $\overrightarrow{OA}=\{3;-6;-3\}$ и $\overrightarrow{OC}=\{1;0;1\}$. Точка M отсекает треть стороны BC, если считать от вершины C. Найти угол между прямой OM и диагональю OB.
3. Найти вектор $\vec{c}$, перпендикулярный вектору $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и вектору $\vec{b}=\{2;-1;2\}$, если $|\vec{c}|=6\sqrt{5}$ и вектор $\vec{c}$ составляет с осью OZ тупой угол.
4. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{d}=5\vec{i}-\vec{k}$.
5. Параллелограмм построен на векторах $\vec{m}=2\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{n}=\vec{a}+2\vec{b}$, где $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{6}$. Вычислить его площадь.

Вариант №2.

1. Определить, при каком значении параметра t векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+t\vec{j}+4\vec{k}$ и $\vec{b}=\{t;-2;5\}$ перпендикулярны.
2. На векторах $\overrightarrow{AB}=\{-4;-4\}$ и $\overrightarrow{AC}=\{-3;1\}$ построен ΔABC. Найти угол между стороной AC и медианой CM.
3. Даны вершины ΔABC: $A(2;0;3)$, $B(4;1;2)$, $C(-2;3;-1)$. Найти площадь треугольника и длину высоты, проведённой из вершины A.
4. Вычислить объём пирамиды, вершины которой $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$, $D(0;8;0)$.
5. Дано: $|\vec{m}|=3$, $|\vec{n}|=4$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=\frac{\pi}{3}$, $\vec{c}=3\vec{m}+2\vec{n}$. Найти $\text{пр}_{\vec{m}}\vec{c}$.

Вариант №3.

1. При каком значении x векторы $\vec{a}=\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=6\vec{n}+x\vec{m}$ перпендикулярны, если $\vec{m}=\{0;-2;-1\}$, $\vec{n}=\{-1;3;1\}$?
2. Найти вектор, коллинеарный вектору $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, если его проекция на вектор $\vec{b}=\{1;-2;1\}$ равна $-2\sqrt{6}$.
3. Даны три вершины параллелограмма: $A(1;3;4)$, $B(3;4;2)$, $C(4;-1;2)$. Найти его площадь и длину высоты, опущенной на сторону AB.
4. На векторах $\vec{a}=\{-2;1;2\}$, $\vec{b}=\{-1;5;-2\}$ и $\vec{c}=\{-2;11;-12\}$ построена треугольная призма. Найти её объём.
5. Сила $\vec{F}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ приложена к точке $A(2;-1;1)$. Определить момент этой силы относительно начала координат.

Вариант №4.

1. Найти координаты вектора $\vec{a}$, коллинеарного вектору $\vec{b}=\{-3;4;-5\}$, если $|\vec{a}|^2=450$ и вектор $\vec{a}$ с осью ординат составляет острый угол.
2. Найти тупой угол (в радианах) между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\{2;3;1\}$ и $\vec{b}=\{6;-1;1\}$.
3. Найти вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{4;2;3\}$ и $\vec{b}=\{0;-1;-3\}$, если длина вектора $\vec{c}$ равна 26 и он составляет тупой угол с осью аппликат.
4. Даны точки $A(2;-3;3)$, $B(2;1;1)$ и $C(3;0;3)$. Найти точку D, лежащую на оси OX и в плоскости, содержащей точки A, B, C.
5. Дано: $|\vec{n}|=4$, $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{k}+2\vec{j}$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{n}}\right)=\frac{\pi}{3}$. Найти $|\vec{a}|$ и $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{n}$.

Вариант №5.

1. Известны координаты точек: $A(1;0;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(2;2;2)$. На оси абсцисс найти точку D, чтобы $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.
2. Даны векторы $\vec{a}=\{7;-5;3\}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+4\vec{j}-7\vec{k}$, $\vec{c}=\{4;4;-2\}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.
3. Найти вектор $\vec{m}$ перпендикулярный оси OZ и вектору $\vec{a}=8\vec{i}-15\vec{j}+3\vec{k}$, если вектор $\vec{m}$ образует с осью OX острый угол и $|\vec{m}|=51$.
4. Доказать, что четыре точки: $A(0;1;-1)$, $B(1;0;2)$, $C(2;1;3)$, $D(2;3;1)$ лежат в одной плоскости.
5. Векторы $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{a}-3\vec{b}$ совпадают со сторонами параллелограмма. Вычислить его площадь, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Вариант №6.

1. На оси аппликат найти точку D так, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были перпендикулярны, если $A(-1;-2;0)$, $B(0;-1;-4)$, $C(1;-1;-1)$.
2. Сила $\vec{F}=2\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$ приложена к точке $A(4;2;-3)$. Определить момент этой силы относительно точки $B(-3;2;1)$.
3. Найти площадь параллелограмма, если векторы $\vec{m}=\vec{k}-\vec{j}$, $\vec{n}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ являются его диагоналями.
4. Выяснить, лежат ли точки $A(1;2;-1)$, $B(3;2;-3)$, $C(-1;0;2)$, $D(3;-2;1)$ в одной плоскости.
5. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ на вектор $\vec{m}$, если $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Вариант №7.

1. При каких значениях m и n векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны, если $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+n\vec{k}$, $\vec{b}=m\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$?
2. На плоскости дан треугольник с вершинами $A(4;0)$, $O(0;0)$, $B(2;-2)$. Найти угол, образованный стороной OB и медианой OM этого треугольника.
3. Через точку $C(-6;6;-1)$ проходит прямая, параллельная вектору $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$,

$A(-2;1;-2)$, $B(-2;-3;2)$. Найти расстояние от точки C до прямой, проходящей через точки A, B.
4. Вычислить объём треугольной призмы с вершинами в точках $A(4;-1;3)$, $B(4;1;0)$, $C(0;1;-5)$, $D(3;2;3)$.
5.Вычислить $|\vec{a}\times\vec{b}|$, если $\vec{a}=3\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=\sqrt{3}$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$. Каков геометрический смысл полученного результата?

Вариант №8.

1. Даны точки $A(-1;3;6)$, $B(2;6;1)$, $C(-1;3;4)$. Найти точку D, лежащую на оси OY и в плоскости, содержащей точки A, B, C.
2. В треугольнике с вершинами $A(1;-1;5)$, $B(-2;-2;1)$, $C(5;-1;2)$ найти внешний угол при вершине B.
3. В треугольнике с вершинами $A(2;-1;1)$, $B(6;-6;1)$, $C(2;3;-2)$ найти длину высоты, опущенной из вершины B.
4. Установить, образуют ли векторы $\vec{a}_1=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{a}_2=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{a}_3=\vec{i}+9\vec{j}-11\vec{k}$ базис в множестве всех трёхмерных векторов.
5. Найти угол между единичными векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, если векторы $\vec{m}=2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{n}=3\vec{b}-\vec{a}$ перпендикулярны.

Вариант №9.

1. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями OX и OZ углы $\alpha=60^\circ$, $\gamma=120^\circ$. Вычислить его координаты при условии, что $|\vec{a}|=2$ и его ордината отрицательна.
2. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=-2\vec{j}+\vec{k}$.
3. Даны векторы $\vec{a}=\{2;-1;1\}$, $\vec{b}=\{1;-2;-3\}$, $\vec{c}=\{10;14;-6\}$. Найти вектор $\vec{m}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если длина его равна $2|\vec{c}|$ и он составляет острый угол с осью аппликат.
4. Вычислить объём треугольной пирамиды с вершинами в точках $A_1(1;3;6)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(-1;0;1)$, $A_4(-4;6;-3)$.
5. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=4$, $\left(\vec{p}\wedge\vec{q}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

Вариант №10.

1. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, если $\vec{c}_1=2\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{c}_2=-\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{a}=\{1;-2;3\}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{k}$?
2. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $A(1;-2;3)$, $B(-1;3;5)$ на вектор $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$, если $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.
3. Вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ и оси OX. Найти вектор $\vec{a}$, если он составляет с осью аппликат острый угол, а длина его равна $3\sqrt{10}$.
4. Даны векторы $\vec{a}=\{1;5;2\}$, $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c}=\{3;m;-1\}$. Существует ли значение параметра m такое, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ были компланарны.

5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, если $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=3$, $\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

Вариант №11.

1. Зная, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°, найти при каком значении параметра t векторы $\vec{c}=t\vec{a}+17\vec{b}$ и $\vec{d}=3\vec{a}-\vec{b}$ будут перпендикулярны.
2. Прямая l проходит через точку $A(7;6;1)$ параллельно вектору $\vec{c}=\{2;2;1\}$. Прямая q проходит через точку $B(7;2;3)$ параллельно тому же вектору. Найти кратчайшее расстояние между прямыми l и q.
3. Объём треугольной пирамиды равен 5, три её вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Найти координаты четвёртой вершины D, если известно, что она лежит на оси OY.
4. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=\{2;2;-1\}$. Найти проекцию $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ на ось, образующую с осью OX угол $\frac{\pi}{4}$, с OY угол $\frac{\pi}{3}$ и с осью OZ острый угол.
5. Вычислить, какую работу производит равнодействующая сил $\vec{m}=\{-3;4;2\}$, $\vec{n}=\{2;-3;5\}$ и $\vec{p}=\{3;2;4\}$, приложенных к одной точке, когда её точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1(-5;-3;7)$ в положение $M_2(-4;1;4)$.

Вариант №12.

1. Найти проекцию вектора $\vec{a}=3\vec{c}+\vec{d}$ на вектор $\vec{b}=2\vec{c}-\vec{d}$, если длина вектора $\vec{c}$ равна 3, длина вектора $\vec{d}$ равна 6 и угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$ равен 60°.
2. Найти расстояние от точки $C(4;-1;2)$ до прямой, проходящей через точки $A(1;3;4)$, $B(3;4;2)$.
3. Найти длину высоты AM треугольной пирамиды $ABCD$, если $A(2;-4;5)$, $B(-1;-3;4)$, $C(5;5;-1)$, $D(1;-2;2)$.
4. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}=\{2;-3;1\}$, $\vec{b}=\{1;-2;3\}$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=20$.
5. Вычислить работу силы $\vec{F}=2\vec{a}-3\vec{b}$, точка приложения которой M перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}=\vec{a}+\vec{b}$, где $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=240^\circ$.

Вариант №13.

1. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}=\vec{c}-2\vec{d}$ и $\vec{b}=\vec{d}-\vec{c}$, если длина $\vec{c}$ равна 3, длина вектора $\vec{d}$ равна 1, а угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$ равен 60°.
2. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}$, если известно, что $\text{пр}_{\vec{c}}\vec{x}=1$, где $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$.
3. Дан параллелепипед, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}=\{4;3;0\}$, $\overrightarrow{AD}=\{2;1;2\}$ и $\overrightarrow{AA_1}=\{-3;-2;5\}$. Найти длину высоты, проведённой из A_1 на грань $ABCD$.

4. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Зная, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=1$, вычислить $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

5. Даны три силы, приложенные к точке $C(-1;4;-2)$: $\vec{M}=2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{N}=\{3;2;-1\}$ и $\vec{P}=\{-4;1;3\}$. Определить длину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2;3;-1)$.

Вариант №14.

1. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{2;-3;4\}$ на ось, составляющую с осями координат равные острые углы.

2 Векторы $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-3\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ являются сторонами треугольника ABC. Найти длину высоты, опущенной из вершины B, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляет 120°.

3. Даны векторы $\vec{p}=\{3;-1;2\}$, $\vec{q}=\{1;2;-1\}$ и $\vec{r}=\{-2;-4;3\}$. Показать, что эти векторы составляют базис трёхмерного пространства и найти координаты вектора $\vec{c}=\{2;-3;5\}$ в этом базисе.

4. Известно, что $\vec{a}\cdot\vec{c}=2$, $\vec{a}\times\vec{c}=\{1;0;4\}$. Найти вектор $\vec{c}$, если вектор $\vec{a}=\{0;-1;0\}$.

5. Вычислить величину момента силы $\vec{F}=3\vec{a}+\vec{b}$, приложенной к точке M, относительно точки N, если $\overrightarrow{MN}=\vec{a}-\vec{b}$, где $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Вариант №15.

1. Найти проекцию вектора $\vec{c}=\vec{i}+2\sqrt{2}\,\vec{j}-\vec{k}$ на ось, составляющую с осями координат углы $\alpha=60°$, $\beta=45°$, $\gamma>90°$.

2. Векторы $\overrightarrow{AB}=-\vec{a}-3\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC}=2\vec{a}-\vec{b}$ являются сторонами параллелограмма. Найти длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{3}$.

3. Показать, что векторы $\vec{a}=\{1;-1;2\}$, $\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\{3;7;-7\}$ составляют базис трёхмерного пространства и разложить вектор $\vec{d}=\{2;1;0\}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

4. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{d}=\dfrac{\vec{a}\times\overrightarrow{AB}}{\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}}$, где $\vec{a}=\{2;0;1\}$, $A(0;2;1)$, $B(2;0;3)$.

5. Вычислить величину момента силы $\vec{F}=3\vec{a}-2\vec{b}$, приложенной к точке P, относительно точки K, если $\overrightarrow{KP}=\vec{a}+2\vec{b}$, где $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=120°$.

Вариант №16.

1. Найти угол между векторами $\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ и $\vec{b}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2$, если $|\vec{e}_1|=2$, $|\vec{e}_2|=3$, $\left(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_2}\right)=-\frac{\pi}{3}$.

2. Найти расстояние от точки $C(-2;3;6)$ до прямой, проходящей через точки

A(-1;2;3) и B(3;6;-5).

3. Точки A(1;2;3), B(2;1;5), C(2;1;2), D(3;4;2) – вершины треугольной пирамиды. Найти объём пирамиды и длину высоты, опущенной из вершины B на грань ACD.

4. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\vec{c}\times\vec{b}$ на ось, составляющую с осью абсцисс угол $\alpha=\frac{\pi}{4}$, с осью ординат угол $\beta=\frac{\pi}{3}$, а с осью аппликат – острый угол γ, если $\vec{c}=\{-2;-3;-1\}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$.

5. Сила $\vec{F}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ приложена к точке A(4;-2;3). Найти момент этой силы относительно точки B(3;2;-1).

Вариант №17.

1. Найти параметр α так, чтобы угол между векторами $\vec{a}=\vec{e}_1-\alpha\vec{e}_3$ и $\vec{b}=\vec{e}_1-\vec{e}_2$ был равен $\frac{\pi}{4}$, если $\vec{e}_1\perp\vec{e}_3$, $\vec{e}_1\perp\vec{e}_2$, $|\vec{e}_1|=3$, $|\vec{e}_2|=1$, $|\vec{e}_3|=2$, а угол между векторами $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ равен $\frac{\pi}{3}$.

2. Через точку C(4;-1;2) проведена прямая, параллельная прямой, проходящей через точки A(3;4;2), B(1;3;4). Найти расстояние между этими параллельными прямыми.

3. Объём треугольной пирамиды $ABCD$ равен 3. Зная три вершины пирамиды A(1;-1;7), B(1;0;8), C(-2;-3;-4), найти координаты вершины D, если известно, что она лежит на оси OZ.

4. Найти вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}=-4\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, где A(-1;2;5), B(-1;1;8), если $(\vec{c},\vec{m})=-26$, а $\vec{m}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$, точка приложения которой перемещается по диагонали AC параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\overrightarrow{AD}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2$, если $|\vec{e}_1|=2$, $|\vec{e}_2|=1$.

Вариант №18.

1. Найти значение параметра λ, при котором векторы $\vec{a}=\vec{e}_1+5\vec{e}_2+6\vec{e}_3$, $\vec{b}=3\vec{e}_1-\vec{e}_2+\lambda\vec{e}_3$ перпендикулярны, если вектор $\vec{e}_3$ перпендикулярен векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ образуют угол $\frac{5\pi}{3}$, а $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_3|=1$, $|\vec{e}_2|=2$.

2. Найти вектор $\vec{a}$, перпендикулярный векторам $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$, если проекция вектора $\vec{a}$ на ось l, составляющую равные острые углы с осями координат, равна $10\sqrt{3}$.

3. В треугольной пирамиде с вершинами в точках A(1;1;1), B(2;0;2), C(2;2;2), D(3;4;-3) вычислить длину высоты, опущенной из вершины D.

4. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между которыми равен $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{c}|=6$, $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, найти $\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$.

5. Даны три силы: $\vec{F}_1=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{F}_2=\{-3;-2;-1\}$, $\vec{F}_3=4\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$. Все они приложены в точке $P(-3;3;-1)$. Найти величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $C(-1;4;-2)$.

Вариант №19.

1. Вычислить длину вектора $\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-\vec{e}_3$, где $|\vec{e}_1|=2$, $|\vec{e}_2|=1$, $|\vec{e}_3|=2$, $\vec{e}_2\perp\vec{e}_3$, $\left(\vec{e}_1,\hat{\ }\vec{e}_3\right)=\dfrac{\pi}{3}$, векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ сонаправлены.

2. Дан вектор $\vec{a}=\{-1;2;0\}$. Найти вектор $\vec{b}$, компланарный с векторами $\vec{e}_1=\{1;0;1\}$, $\vec{e}_2=\{1;1;1\}$, такой, что $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

3. Показать, что векторы $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$ компланарны и разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
4. Точки $O(0;0;0)$, $B(2;5;0)$, $A(5;2;0)$, $C(1;2;4)$ – вершины пирамиды. Найти длину высоты, опущенной на грань ABC.
5. Вычислить работу, производимую равнодействующей сил $\vec{F}_1=\{3;-2;0\}$, $\vec{F}_2=-\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{F}_3=\{2;0;-3\}$, приложенных в одной точке, при прямолинейном движении из точки $C(1;2;3)$ в точку $B(5;-3;4)$.

Вариант №20.

1. Найти проекцию вектора $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ на ось, составляющую с осями координат равные тупые углы.

2. Пусть $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$, $\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{6}$. Выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичный вектор $\vec{e}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, образующий с ними правую тройку.
3. Точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(-2;1;3)$ – вершины треугольной пирамиды. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.
4. Найти проекцию вектора $\vec{d}=3\vec{a}\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{b}$ на вектор $-2\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$, $A(-1;0;2)$, $B(0;1;3)$.
5. К вершине куба, длина ребра которого равна 2, приложены три силы, равные по величины 1, 2, 3 соответственно и направленные по диагоналям граней куба, проходящим через эту вершину. Найти работу равнодействующей этих сил при перемещении из точки приложения по диагонали куба в противоположную вершину.

Вариант №21.

1. Найти угол между векторами $\vec{a}=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ и $\vec{b}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2$, если $|\vec{e}_1|=1$, $|\vec{e}_2|=3$, $\left(\vec{e}_1,\hat{\ }\vec{e}_2\right)=-\dfrac{\pi}{6}$.

2. Прямая l проходит через точку $A(7;3;1)$ параллельно вектору $\vec{c}=\{-1;2;1\}$. Прямая q проходит через точку $B(0;2;3)$ параллельно тому же вектору. Найти кратчайшее расстояние между прямыми l и q.
3. Объём треугольной пирамиды равен 5, три её вершины находятся в точках $A(1;1;-1)$, $B(2;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Найти координаты четвёртой вершины D, если известно, что она лежит на оси OX.
4. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=\{2;0;-1\}$. Найти проекцию $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ на ось, образующую с осью OX угол $\frac{\pi}{4}$, с OY угол $\frac{\pi}{3}$ и с осью OZ тупой угол.
5. Вычислить, какую работу производит равнодействующая сил $\vec{m}=\{1;4;2\}$, $\vec{n}=\{2;0;5\}$ и $\vec{p}=\{3;2;4\}$, приложенных к одной точке, когда её точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1(1;-1;7)$ в положение $M_2(-4;1;4)$.

Вариант №22.

1. Найти параметр α так, чтобы угол между векторами $\vec{a}=\vec{e}_1-\alpha\vec{e}_3$ и $\vec{b}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$ был равен $\frac{\pi}{4}$, если $\vec{e}_1\perp\vec{e}_3$, $\vec{e}_1\perp\vec{e}_2$, $|\vec{e}_1|=2$, $|\vec{e}_2|=1$, а угол между векторами $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ равен $\frac{2\pi}{3}$.
2. Найти расстояние от точки $C(5;-1;2)$ до прямой, проходящей через точки $A(1;3;4)$, $B(3;0;2)$.
3. Найти длину высоты AM треугольной пирамиды $ABCD$, если $A(-2;-4;5)$, $B(1;3;4)$, $C(5;5;-1)$, $D(1;-2;3)$.
4. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a}=\{2;-7;1\}$, $\vec{b}=\{1;-2;5\}$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}-7\vec{k})=20$.
5. Вычислить работу силы $\vec{F}=2\vec{a}-\vec{b}$, точка приложения которой M перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}=\vec{a}+\vec{b}$, где $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=120^\circ$.

Вариант №23.

1. Найти значение параметра λ, при котором векторы $\vec{a}=\vec{e}_1+5\vec{e}_2-\vec{e}_3$, $\vec{b}=3\vec{e}_1+\vec{e}_2+\lambda\vec{e}_3$ перпендикулярны, если вектор $\vec{e}_3$ перпендикулярен $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ образуют угол $\frac{\pi}{3}$, а $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_3|=1$, $|\vec{e}_2|=2$.
2. Найти вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{j}-3\vec{k}$, если известно, что $\text{пр}_{\vec{c}}\vec{x}=1$, где $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.
3. Дан параллелепипед, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}=\{4;1;0\}$, $\overrightarrow{AD}=\{2;0;2\}$ и $\overrightarrow{AA_1}=\{-3;-2;5\}$. Найти длину высоты, проведённой из A_1 на грань $ABCD$.
4. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°. Зная, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=1$, вычислить $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

5. Даны три силы, приложенные к точке $C(-2;4;-1)$: $\overrightarrow{M}=2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$, $\overrightarrow{N}=\{3;2;-1\}$ и $\overrightarrow{P}=\{-3;1;4\}$. Определить длину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2;3;-1)$.

Вариант №24.

1. Вычислить длину вектора $\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+4\vec{e}_3$, где $|\vec{e}_1|=3$, $|\vec{e}_2|=1$, $|\vec{e}_3|=2$, $\vec{e}_2\perp\vec{e}_3$, $\left(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$, векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ сонаправлены.

2 Векторы $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}+3\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}$ являются сторонами треугольника ABC. Найти длину высоты, опущенной из вершины B, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляет 60°.

3. Даны векторы $\vec{p}=\{2;-1;2\}$, $\vec{q}=\{3;2;-1\}$ и $\vec{r}=\{-2;-4;3\}$. Показать, что эти векторы составляют базис трёхмерного пространства и найти координаты вектора $\vec{c}=\{2;-3;6\}$ в этом базисе.

4. Известно, что $\vec{a}\cdot\vec{c}=3$, $\vec{a}\times\vec{c}=\{1;0;4\}$. Найти вектор $\vec{c}$, если вектор $\vec{a}=\{0;-1;0\}$.

5. Вычислить величину момента силы $\vec{F}=3\vec{a}+\vec{b}$, приложенной к точке M, относительно точки N, если $\overrightarrow{MN}=\vec{a}+\vec{b}$, где $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

Вариант №25.

1. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$ на ось, составляющую с осями координат равные острые углы.

2. Векторы $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-3\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+3\vec{b}$ являются сторонами параллелограмма. Найти длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, а угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\dfrac{\pi}{3}$.

3. Показать, что векторы $\vec{a}=\{1;-1;2\}$, $\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\{3;7;-7\}$ составляют базис трёхмерного пространства и разложить вектор $\vec{d}=\{2;1;8\}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

4. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\vec{d}=\dfrac{\vec{a}\times\overrightarrow{AB}}{\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}}$, где $\vec{a}=\{-2;0;1\}$, $A(0;2;-1)$, $B(2;0;1)$.

5. Вычислить величину момента силы $\vec{F}=3\vec{a}-2\vec{b}$, приложенной к точке P, относительно точки K, если $\overrightarrow{KP}=3\vec{a}+2\vec{b}$, где $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=120^\circ$.

Индивидуальные задания по аналитической геометрии

Вариант №1

1. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(1;1;1)$ относительно плоскости ABC, если $A(2;0;-1)$, $B(0;0;3)$, $C(2;4;0)$.

2. К окружности $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=30^0$ с прямой AB, где $A(2;1), B(5;1)$. Написать уравнение касательной.

3. Составить уравнение эллипса, если его малая полуось равна 3, а фокусы расположены в точках $F_1(-3;1)$, $F_2(5;1)$.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $x=2-\sqrt{y^2-2y}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $4x^2+25y^2-8x-100y+4=0$, и построить эту поверхность.

6. Составить уравнения проекций прямой $\begin{cases} x+2y-3z-5=0, \\ -y+z+2x+2=0 \end{cases}$ на координатные плоскости.

Вариант №2

1. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(1;2;0)$ относительно прямой AB, если $A(4;10;-3), B(4;1;4)$.

2. К окружности $(x+2)^2+(y-4)^2=1$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=45^0$ с прямой AB, где $A(4;4), B(8;0)$. Написать уравнение касательной.

3. Точка $A(0;7)$ принадлежит гиперболе, точки $F_1(0;2)$, $F_2(0;8)$ — ее фокусы. Составить уравнение гиперболы и выяснить какой угол образуют ее асимптоты с осью ординат.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $y=-1+\sqrt{x-x^2}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $4x^2-y^2+8x+2y-16z+3=0$, и построить эту поверхность.

6. Составить уравнение плоскости, проецирующей прямую $\begin{cases} 3x+2y-z-1=0, \\ -3y+2z+2x-2=0 \end{cases}$ на плоскость $x+2y+3z-5=0$.

Вариант №3

1. Найти угол между прямой DB и проекцией прямой DA на плоскость ABC, если $A(1;2;3), B(0;1;0), C(-1;-3;0), D(10;8;-5)$.

2. К окружности $(x-1)^2+(y-2)^2=16$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=60^0$ с прямой AB, где $A(1;-3)$, $B(1;1)$. Написать уравнение касательной.

3. Составить уравнение параболы, если ее фокус $F(9;2)$ и уравнение директрисы $x-5=0$.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $x=-4+\sqrt{y-2}$. Построить эту линию.
5. Определить тип поверхности, заданной уравнением
$4x^2+y^2-4z^2-8x+2y+9=0$ и построить эту поверхность.
6. Составить уравнения прямой, если она проходит через точку $M(-4,-5,3)$ и пересекает две прямые $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ и $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$.

Вариант №4

1. Найти координаты точки A, принадлежащей прямой $\begin{cases}3x-y+z-4=0,\\ x-y+6=0\end{cases}$ и равноудаленной от точек $B(5;0;1)$ и $C(2;4;8)$.
2. К окружности $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=45^0$ с прямой AB, где $A(-1;2)$, $B(4;7)$. Написать уравнение касательной.
3. Составить уравнение гиперболы, если даны ее фокусы $F_1(3;-1)$, $F_2(7;-1)$ и длина мнимой полуоси, равная 1. Какой угол образуют асимптоты гиперболы с осью ординат?
4. Установить, какая линия определяется уравнением $y=-2-\sqrt{4-x}$. Построить эту линию.
5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $4x^2+4y^2-z^2+8x-16y+4=0$, и построить эту поверхность.
6. Найти проекцию точки $C(3,-4,-2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$ и $\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}$.

Вариант №5

1. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(0;1;5)$ относительно прямой AB, если $A(5;3;-1), B(7;0;0)$
2. К окружности $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=30^0$ с прямой AB, где $A(5;1)$, $B(5;9)$. Написать уравнение касательной.
3. Составить уравнение эллипса, если заданы точка $A(2;6)$ эллипса и его фокусы $F_1(2;-4)$, $F_2(2;4)$.
4. Установить, какая линия определяется уравнением $y=3+\sqrt{4x^2+4x+1}$. Построить эту линию.
5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $x^2+4y^2+4x-8y-4z+8=0$ и построить эту поверхность.
6. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(0,2,1)$ и образующей равные углы с векторами $\vec{a}=(1,2,2)$, $\vec{b}=3\vec{i}$, $\vec{c}=3\vec{k}$.

Вариант №6

1. Найти угол между прямой DB и проекцией прямой DA на плоскость ABC, если $A(4;1;-1), B(1;1;1), C(0;2;1), D(6;0;1)$

2. К окружности $(x+3)^2+(y-2)^2=16$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=60^0$ с прямой AB, где $A(4;0), B(4;6)$. Написать уравнение касательной.

3. Составить уравнение эллипса, если его малая полуось равна 3, а фокусы расположены в точках $F_1(0;2)$, $F_2(10;2)$.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $y=-5-\sqrt{1-2x+x^2}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $x^2-4y^2-4x-16y-4z-12=0$, и построить эту поверхность.

6. Треугольник ABC образован пересечением плоскости $x+2y+4z-8=0$ с координатными плоскостями. Найти уравнения средней линии треугольника, параллельной плоскости Oxy.

Вариант №7

1. Найти координаты точки A, принадлежащей прямой $\begin{cases} x+4y-2z-2=0, \\ 2x-z=0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $B(4;1;2)$ и $C(0;0;3)$.

2. К окружности $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=45^0$ с прямой AB, где $A(-1;1), B(3;5)$. Написать уравнение касательной.

3. Точка $A(2;0)$ принадлежит гиперболе, точки $F_1(1;0)$, $F_2(5;0)$ — ее фокусы. Составить уравнение гиперболы и выяснить какой угол образуют ее асимптоты с осью ординат.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $x=-3+\sqrt{4-4y+2y^2}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $x^2+4y^2-24y+20=0$, и построить эту поверхность.

6. В плоскости Oyz найти прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную прямой $\begin{cases} 2x-y=2, \\ y+2z=-2. \end{cases}$

Вариант №8

1. Написать уравнения проекций прямой $\begin{cases} -2x+y-z+2=0, \\ x+2y+3z-5=0 \end{cases}$ на координатные плоскости.

2. К окружности $(x+4)^2+y^2=1$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=60^0$ с прямой AB, где $A(0;1), B(4;1)$. Написать уравнение касательной.

3. Составить уравнение параболы, если ее фокус $F(4;3)$ и уравнение директрисы $y+2=0$.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $x=1+\sqrt{y-2}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $x^2 - 4y^2 - 6x - 7 = 0$, и построить эту поверхность.
6. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y - 12z - 3 = 0$, $3x + y - 7z - 2 = 0$ и перпендикулярной плоскости $x + 2y + 5z - 1 = 0$.

Вариант №9

1. Написать уравнения проекций прямой $\begin{cases} 3x - 2y - z + 1 = 0, \\ -x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$ на координатные плоскости.
2. К окружности $x^2 + (y-5)^2 = 25$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha = 30^0$ с прямой AB, где $A(5;4)$, $B(7;4)$. Написать уравнение касательной.
3. Составить уравнение эллипса, если точки $F_1(2;3)$, $F_2(2;7)$ — его фокусы, и эллипс проходит через точку $A(2;2)$.
Составить уравнение эллипса с фокусами $F_1(2;3)$, $F_2(2;7)$, проходящего через точку $A(2;2)$.
4. Установить, какая линия определяется уравнением $y = 4 - \sqrt{4x^2 - 8x}$. Построить эту линию.
5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $y^2 - 4x - 8y + 28 = 0$, и построить эту поверхность.
6. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $\left(1+\sqrt{2}\right)x + 2y + 2z - 4 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$, и образующей с координатной плоскостью XOY угол $60°$.

Вариант №10

1. Найти координаты точки Q, симметричной точке P относительно плоскости ABC, если $P(-3;4;0), A(1;1;0), B(6;8;0), C(7;1;3)$.
2. К окружности $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha = 45^0$ с прямой AB, где $A(4;1)$, $B(5;1)$. Написать уравнение касательной.
3. Составить уравнение гиперболы, если даны ее фокусы $F_1(-3;4)$, $F_2(-3;10)$ и длина мнимой полуоси, равная 1. Какой угол образуют асимптоты гиперболы с осью ординат?
4. Установить, какая линия определяется уравнением $y = 4 - \sqrt{2 - 2x + x^2}$. Построить эту линию.
5. Определить тип поверхности, заданной уравнением
$4x^2 + y^2 + 16z^2 - 8x - 4y - 96z + 151 = 0$, и построить эту поверхность.
6. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x + 2y + 3z - 5 = 0$, $3x - 2y - z + 1 = 0$ и отсекающей равные отрезки на осях Ox и Oz.

Вариант №11

1. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(2;2;2)$ относительно прямой AB, если $A(4;0;3), B(1;4;10)$.

2. К окружности $(x-2)^2+(y-3)^2=16$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=45^0$ с прямой AB, где $A(8;0), B(1;-7)$. Написать уравнение касательной.

3. Точка $A(1;1)$ принадлежит гиперболе, точки $F_1(0;1)$, $F_2(-8;1)$ — ее фокусы. Составить уравнение гиперболы и выяснить какой угол образуют ее асимптоты с осью ординат.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $y=3-\sqrt{5x-x^2+1}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением
$4x^2+y^2+4z^2-8x-4y+8z+16=0,$ и построить эту поверхность.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+y+5z-1=0$, $2x+3y-z+2=0$ и через точку $M_0(3,2,1)$.

Вариант №12

1. Найти угол между прямой DB и проекцией прямой DA на плоскость ABC, если $A(1;-1;0), B(4;3;4), C(0;0;2), D(7;0;0)$.

2. К окружности $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=30^0$ с прямой AB, где $A(5;3), B(0;3)$. Написать уравнение касательной.

3. Составить уравнение эллипса, если его малая полуось равна 2, а фокусы расположены в точках $F_1(-1;3)$, $F_2(5;3)$.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $x=-2+\sqrt{3y+y^2-2}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением
$9x^2+4y^2-54x+32y+125=0,$ и построить эту поверхность.

6. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_0(3,-2,-4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$ и пересекает прямую $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

Вариант №13

1. Найти координаты точки A, принадлежащей прямой $\begin{cases}2x+y+4z-2=0,\\2x-y-4z-2=0\end{cases}$ и равноудаленной от точек $B(8;0;0)$ и $C(-4;-1;3)$.

2. К окружности $(x+3)^2+(y-1)^2=25$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=45^0$ с прямой AB, где $A(7;4), B(3;0)$. Написать уравнение касательной.

3. Составить уравнение гиперболы, если даны ее фокусы $F_1(5;4)$, $F_2(5;-4)$ и длина действительной полуоси, равная 2. Какой угол образуют асимптоты гиперболы с осью ординат?

4. Установить, какая линия определяется уравнением $y = 2 + \sqrt{x^2 - 2x + 4}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $25x^2 + 4y^2 - 100z^2 - 150x + 8y + 229 = 0$, и построить эту поверхность.

6. Составить уравнения проекций линии пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $2x + y - z + 1 = 0$ на координатные плоскости.

Вариант №14

1. Написать уравнения проекций прямой $\begin{cases} 4x - y + z - 3 = 0, \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ на координатные плоскости.

2. К окружности $x^2 + y^2 = 1$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha = 60^0$ с прямой AB, где $A(5;0), B(5;2)$. Написать уравнение касательной.

3. Составить уравнение параболы, если ее фокус $F(2;0)$, а вершина $A(2;-2)$.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $x = -1 - \sqrt{-y^2 + 1}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $x^2 - 4y^2 - 2x - 24y - 16z - 35 = 0$, и построить эту поверхность.

6. Составить уравнения прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $2x - y + 3z - 1 = 0$ с прямыми $\begin{cases} x + y - z - 2 = 0, \\ y - 4z + x - 2 = 0 \end{cases}$ и $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

Вариант №15

1. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(4;-1;2)$ относительно прямой AB, если $A(3;5;0), B(7;-1;-2)$.

2. К окружности $(x-1)^2 + y^2 = 36$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha = 45^0$ с прямой AB, где $A(9;3), B(4;8)$. Написать уравнение касательной.

3. Точка $A(3;2)$ принадлежит гиперболе, точки $F_1(0;2)$, $F_2(4;2)$ — ее фокусы. Составить уравнение гиперболы и выяснить какой угол образуют ее асимптоты с осью ординат.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $y = -3 - \sqrt{x^2 - 2}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $4x^2 + 4y^2 - z^2 - 24x + 4y + 44 = 0$, и построить эту поверхность.

6. Определить угол между прямой $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ y + 4z - 3 = 0 \end{cases}$ и плоскостью, проходящей через точку $A(4,-1,0)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+4}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{1}$.

Вариант №16

1. Найти угол между прямой DB и проекцией прямой DA на плоскость ABC, если $A(2;1;1), B(5;0;3), C(3;-1;0), D(0;0;8)$.

2. К окружности $(x=5)^2+(y-6)^2=1$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=30^0$ с прямой AB, где $A(2;0)$, $B(2;9)$. Написать уравнение касательной.

3. Составить уравнение эллипса, если точки $F_1(4;5)$, $F_2(4;-7)$ — его фокусы, и эллипс проходит через точку $A(4;7)$.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $y=4+\sqrt{4x-2x^2+3}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $x^2+4y^2-4z^2-4x+8y-8=0$, и построить эту поверхность.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей перпендикулярно прямой $\frac{x+4}{3}=\frac{y-10}{2}=\frac{z-1}{-1}$ на расстоянии $\sqrt{14}$ от точки $A(2,3,-5)$.

Вариант №17

1. Написать уравнения проекций прямой $\begin{cases}2x+y-2z+2=0,\\2x-y+3z-1=0\end{cases}$ на координатные плоскости.

2. К окружности $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=60^0$ с прямой AB, где $A(3;-1)$, $B(-3;-1)$. Написать уравнение касательной.

3. Составить уравнение эллипса, если его малая полуось равна 1, а фокусы расположены в точках $F_1(3;2)$, $F_2(3;-4)$.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $y=5+\sqrt{5+5x+x^2}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $9x^2+4y^2-36x-16y-36z+52=0$, и построить эту поверхность.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей параллельно прямым $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{1}$ на равном расстоянии от них.

Вариант №18

1. Найти координаты точки A, принадлежащей прямой $\begin{cases}-x+3y+2z-6=0,\\x-y+3z+2=0\end{cases}$ и равноудаленной от точек $B(-3;0;1)$ и $C(2;1;3)$.

2. К окружности $(x-1)^2+(y-4)^2=16$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=45^0$ с прямой AB, где $A(4;8)$, $B(0;4)$. Написать уравнение касательной.

3. Составить уравнение гиперболы, если даны ее фокусы $F_1(2;4)$, $F_2(2;-2)$ и длина действительной полуоси, равная 2. Какой угол образуют асимптоты гиперболы с осью ординат?

4. Установить, какая линия определяется уравнением $x=6-\sqrt{y^2-2y+10}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $4x^2 - y^2 + 16x - 4y + 8 = 0$, и построить эту поверхность.
6. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и проекцию точки $B(2, -3, 6)$ на плоскость $2x + y - z + 1 = 0$.

Вариант №19

1. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(7;1;5)$ относительно плоскости ABC, если $A(0;1;0), B(10;-3;4), C(3;3;5)$.
2. К окружности $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha = 30^0$ с прямой AB, где $A(-3;-1), B(5;-1)$. Написать уравнение касательной.
3. Найти координаты фокуса параболы, если ее вершина $A(6;-3)$, уравнение директрисы параболы $3x - 5y + 1 = 0$.
4. Установить, какая линия определяется уравнением $x = -3 + \sqrt{5 + 10y + 5y^2}$. Построить эту линию.
5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $9x^2 + 4y^2 - 54x + 45 = 0$ и построить эту поверхность.
6. Найти уравнения проекции прямой $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{4}$ на плоскость $x - 3y - z + 8 = 0$.

Вариант №20

1. Найти угол между прямой DB и проекцией прямой DA на плоскость ABC, если $A(1;0;2), B(4;5;6), C(-2;-1;0), D(10;-5;1)$.
2. К окружности $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha = 45^0$ с прямой AB, где $A(0;8), B(-3;5)$. Написать уравнение касательной.
3. Составить уравнение гиперболы, если даны ее фокусы $F_1(4;-3)$, $F_2(4;1)$ и длина мнимой полуоси, равная 1. Какой угол образуют асимптоты гиперболы с осью ординат?
4. Установить, какая линия определяется уравнением $y = 1 - \sqrt{1 - 4x^2}$. Построить эту линию.
5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $9x^2 - y^2 + 6y - 45 = 0$, и построить эту поверхность.
6. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+1}{1}$ и основание перпендикуляра, опущенного из точки $P(4, 6, 8)$ на плоскость Oyz.

Вариант №21

1. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(1;5;4)$ относительно прямой AB, если $A(1;8;0)$, $B(2;2;3)$.

2. К окружности $(x-4)^2+(y+1)^2=1$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=45^0$ с прямой AB, где $A(5;7)$, $B(3;5)$. Написать уравнение касательной.

3. Составить уравнение эллипса, если точки $F_1(1;0)$, $F_2(1;5)$ — его фокусы, и эллипс проходит через точку $A(1;1)$.

Составить уравнение эллипса с фокусами $F_1(1;0)$, $F_2(1;5)$, проходящей через точку $A(1;1)$. Какой угол образуют асимптоты гиперболы с осью ординат?

4. Установить, какая линия определяется уравнением $x=-\sqrt{8+y^2+y}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $x^2-8x-6y+22=0$, и построить эту поверхность.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2,3,-5)$ и $B(1,0,4)$ перпендикулярно плоскости Oxy.

Вариант №22

1. Написать уравнения проекций прямой $\begin{cases} x+2y-z-1=0, \\ x-3y+2z+1=0 \end{cases}$ на координатные плоскости.

2. К окружности $(x+1)^2+(y-3)^2=36$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=45^0$ с прямой AB, где $A(2;4)$, $B(5;7)$. Написать уравнение касательной.

3. Точка $A(2;0)$ принадлежит гиперболе, точки $F_1(1;0)$, $F_2(4;0)$ — ее фокусы. Составить уравнение гиперболы и выяснить какой угол образуют ее асимптоты с осью ординат.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $x=2+\sqrt{2y^2-4y}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $3x^2+2y^2+6z^2+18x-4y+20=0$, и построить эту поверхность.

6. Составить уравнения прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $x-3y+2z+1=0$ с прямыми $\frac{x-5}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$ и $\frac{x-3}{4}=\frac{y+4}{-6}=\frac{z-5}{2}$.

Вариант №23

1. Найти координаты точки A, принадлежащей прямой $\begin{cases} 3x+5y-z=0, \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $B(1;1;1)$ и $C(4;3;0)$.

2. К окружности $(x+3)^2+y^2=9$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=45^0$ с прямой AB, где $A(3;5)$, $B(0;8)$. Написать уравнение касательной.

3. Составить уравнение гиперболы, если даны ее фокусы $F_1(5;4)$, $F_2(5;0)$ и длина мнимой полуоси, равная 1. Какой угол образуют асимптоты гиперболы с осью ординат?

4. Установить, какая линия определяется уравнением $x=-7+\sqrt{1-y-4y^2}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением
$25x^2+100y^2+4z^2+50x+400y+525=0$, и построить эту поверхность.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2,7)$ параллельно плоскости Oxy и пересекающей ось Oz.

Вариант №24

1. Найти координаты точки Q, симметричной точке P относительно плоскости ABC, если $P(3;2;5), A(2;4;1), B(-3;5;0), C(1;2;1)$.

2. К окружности $(x+2)^2+(y-1)^2=1$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=60^0$ с прямой AB, где $A(5;5), B(3;5)$. Написать уравнение касательной.

3. Составить уравнение эллипса, если его малая полуось равна 2, а фокусы расположены в точках $F_1(-2;-4)$, $F_2(-2;2)$.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $y=\sqrt{6-10x+5x^2}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением $16x^2-9y^2-64x-36y+28=0$, и построить эту поверхность.

6. Определить угол между прямой $\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases}$ и плоскостью, проходящей через точки $A(1,1,1)$, $B(2,0,2)$, $C(2,2,2)$.

Вариант №25

1. Найти координаты точки Q, симметричной точке P относительно плоскости ABC, если $P(4;0;1), A(1;2;3), B(0;1;3), C(-1;-3;1)$.

2. К окружности $(x-1)^2+(y-4)^2=25$ проведена касательная, составляющая угол $\alpha=45^0$ с прямой AB, где $A(0;3), B(4;-1)$. Написать уравнение касательной.

3. Точка $A(2;2)$ принадлежит гиперболе, точки $F_1(2;5)$, $F_2(2;1)$ — ее фокусы. Составить уравнение гиперболы и выяснить какой угол образуют ее асимптоты с осью ординат.

4. Установить, какая линия определяется уравнением $x=4+\sqrt{5-y}$. Построить эту линию.

5. Определить тип поверхности, заданной уравнением
$25x^2-9y^2-100x+54y-225z+19=0$, и построить эту поверхность.

6. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $(1,0,0)$ и $(0;1;0)$ и образует угол 45° с прямой $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике/Д.Т. Письменный. Ч.1. М.: Айрис-пресс, 2003. 288 с.
2. Краснов М.Л. Вся высшая математика/М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Ч.1. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 352 с.
3. Высшая математика/Под ред. Г.Н. Яковлева. М.: Высшая школа, 2004. 584 с.
4. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии/Д.В. Клетеник: уч.пособие для втузов. 17-е изд. СПб.: Изд-во «Профессия», 2003. 200 с.
5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах/П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова: Ч. 1. М.: Изд-во «Оникс 21 век», 2005. 416 с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа/ под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. М.: Наука, 1996. 464 с.
7. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. Т.1. С-Птб. Изд-во «Политехника», 2003. 476 с.

Учебное издание

Надежда Юрьевна Одинцова
Валентина Васильевна Трещева

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ПО АЛГЕБРЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Подисано в печать 22.11.2004 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ. л. 3.95
Уч.-изд. л. 4.0 Тираж 150 Заказ Цена ″С″

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19

Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19