Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»

Дифференциальные уравнения и ряды

Сборник типовых заданий

для студентов физических специальностей

Екатеринбург
2007

УДК 517.9

Дифференциальные уравнения и ряды: сборник типовых заданий / под общ. ред. В.В. Трещевой. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2007. 41 с.

Приведены индивидуальные задания по дифференциальным уравнениям и рядам.

Индивидуальные задания по дифференциальным уравнениям составлены Быковой Н.В., Гарнышевой И.Р., Демой З.П., Крохиным А.Л., Табуевой В.А., Миньковой Р.М.

Индивидуальные задания по рядам составлены Абрамовой А.Б., Карасик Г.Я., Янкелевич И.Н., Миньковой Р.М.

Рис.23.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики» при поддержке физико-технического факультета

© ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ», 2007

1. Индивидуальные задания по дифференциальным уравнениям

Вариант 1

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $\left(y^2+xy^2\right)y'+x^2-yx^2=0$, 2) $2\left(y-x\right)y'+\frac{2}{x^2}=2y$,

3) $\left(x-y\sin\frac{y}{x}\right)dx+x\sin\frac{y}{x}dy=0$, 4) $xy'+y=y^2\ln x$, 5) $xy^2dx+y\left(x^2+y^2\right)dy=0.$

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $y^2+x^2y'=xyy'$, $y(1)=1$, 7) $t^2\frac{ds}{dt}=2ts-3$, $s(-1)=1$,

8) $3y^2y'+y^3+x=0$, $y(0)=0$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $y''\operatorname{tg}y=2\left(y'\right)^2$, 10) $y''=2yy'$, 11) $x^3y''=\left(y-xy'\right)\cdot\left(y-xy'-x\right)$,

12) $y^{(4)}=x$, 13) $yy''-\left(y'\right)^2=y^3$, $y(1)=y'(1)=1.$

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''+y=4xe^x-2\sin x$, 15) $y''-4y'+4y=2e^{2x}+\frac{x}{2}$, 16) $y'''+9y''=9x+\left(16x+2\right)e^{-x}$,

17) $y''+4y=\frac{1}{\sin 2x}$, 18) $y''+\pi^2y=\frac{\pi^2}{\cos\left(\pi x\right)}$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$, 19) $x^2y''+xy'-y=3x^2.$

Вариант 2

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $\left(1+x^2\right)y'+y\sqrt{1+x^2}=xy$, 2) $xy'-y=\frac{x}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$, 3) $xy'-y\left(1+\ln y-\ln x\right)=0$,

4) $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$, 5) $x\,dx+y\,dy-\frac{x\,dy+y\,dx}{x^2+y^2}=0.$

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $\left(\frac{5}{1+\rho^2}+2\varphi\right)d\rho+2\rho\,d\varphi=0$, $\rho\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, 7) $y'-2xy=2x^3y^2$, $y(0)=1$,

8) $y'-y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}$, $y(0)=0.$

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $\frac{y''}{x}+\frac{y'^2}{xy}=\frac{2}{y}$, 10) $y''+\frac{y'}{x}=\frac{y}{x^2}$, 11) $yy''-\left(y'\right)^2=0$,

12) $xy^{(4)}=1$, 13) $y''\left(1+\ln x\right)+\frac{y'}{x}=2+\ln x$, $y(1)=\frac{1}{2}$, $y'(1)=1$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''+y=2e^{-x}\left(x-1\right)+4x\cos x+2\sin x$,

15) $y''-3y'+2y=3x+5\sin 2x$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$,

16) $y'''-2y''+y'=2\cos x+2x$, 17) $y''+y=\operatorname{tg}x$,

18) $y''+3y'=\frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}$, $y(0)=\ln 4$, $y'(0)=3\left(1-\ln 2\right)$, 19) $x^2y''-2xy'+2y=\frac{6}{x}$.

Вариант 3

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $\left(x^2+y^2\right)y'=2xy$, 2) $y'+2y=y^2e^x$, 3) $\left(2y-x+3y^2\right)y'=y+2x-3x^2$,

4) $\left(3x^2+6x^2y+3y^2x\right)dx+\left(2x^3+3x^2y\right)dy=0$, 5) $y\ln y+xy'=9y'y^3\ln y$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $y'=e^{x+y}+e^{x-y}$, $y(0)=0$, 7) $y'=2y\left(x^2+4\right)$, $y(0)=1$,

8) $(4x-3y)dx+(2y-3x)dy=0$, $y(0)=1$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $yy'''-yy''=0$, 10) $y'''=3x^2-4x+e^{-x}$, 11) $x^2\left(y'^2-yy''\right)=y^2$,

12) $xy''=y'\left(1+\ln y'-\ln x\right)$, $y(1)=\frac{1}{2}$, $y'(1)=e$, 13) $yy''+1=y'^2$, $y(0)=y'(0)=1$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''-4y'+8y=e^{2x}+\sin 2x$, 15) $y''-3y'=e^{3x}+12x-7$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$,

16) $y'''+6y''+9y'=4e^{-x}+3e^{-3x}$, 17) $y''+4y=\frac{1}{\sin^2 x}$, 18) $x^2y''+2xy'-2y=4x^2$,

19) $y''-6y'+8y=\frac{4}{1+e^{-2x}}$, $y(0)=1+2\ln 2$, $y'(0)=6\ln 2+1$.

Вариант 4

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $xy'+y=\ln x+1$, 2) $xy'=y-y\ln\frac{y}{x}$, 3) $3x^2y^2\left(y\,dx+x\,dy\right)+20y^4\,dy=0$,

4) $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$, 5) $\left(5xy^2-x^3\right)dx+\left(5x^2y-y\right)dy=0$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $y\ln^3 y+y'\sqrt{x+1}=0$, $y\left(-\frac{15}{16}\right)=e$, 7) $\left(3x^2y+y^3\right)dx+\left(x^3+3xy^2\right)dy=0$, $y(1)=1$,

8) $\rho\,d\upsilon+\left(2\sqrt{\rho\upsilon}-\upsilon\right)d\rho=0$, $\rho(0)=1$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $x^2\left(yy''-y'^2\right)+xyy'=\left(2xy'-3y\right)\sqrt{x^3}$, 10) $y''-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=1$, 11) $y'''=x+\cos x$,

12) $y\left(1-\ln y\right)y''+\left(1+\ln y\right)y'^2=0$, 13) $y''\sin x=\left(1+y'\right)\cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''-2y'+2y=e^x+x\cos x$, 15) $y''-y'=2x-1-3e^x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$,

16) $y'''-4y''+8y'=9x$, 17) $y''+y=24\sin^4 x$,

18) $y''-9y'+18y=\frac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, 19) $x^2y''-2y=8x^3-6$.

Вариант 5

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{e^{-x^2}}{x}$, 2) $x\sin\frac{y}{x}\cdot y'+x=y\sin\frac{y}{x}$, 3) $xy'+y=xy^2\ln x$,

4) $\left(\frac{\sin 2t}{x}+t\right)dt+\left(x-\frac{\sin^2 t}{x^2}\right)dx=0$, 5) $3x^2e^y\,dx+\left(x^3e^y-1\right)dy=0$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $y'+\cos(x+2y)=\cos(x-2y)$, $y(0)=\frac{\pi}{4}$, 7) $y'\left(x+\sqrt{x}\right)=\sqrt{1-y}$, $y(0)=1$,

8) $xy'=y+x\cos^2\frac{y}{x}$, $y(1)=\frac{\pi}{4}$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $y''=e^{\frac{x}{2}}+\frac{1}{x+1}$, 10) $xy''=2yy'-y'$, 11) $(xy''-y')y=xy'^2$,

12) $\left(1+x^2\right)y''-2xy'=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$, 13) $y\cdot y''-y'^2=y^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''+4y=x\left(\sin 2x+1\right)$, 15) $y'''+y''+y'+y=2\left(\cos x+1\right)$,

16) $y''-2y'+y=x\left(e^x+e^{2x}\right)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, 17) $y''-y=\frac{e^x}{1+e^x}$,

18) $x^2y''-xy'-3y=-8x-3$, 19) $y''+4y=8\operatorname{ctg}2x$, $y(\pi/4)=5$, $y'(\pi/4)=4$.

Вариант 6

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $\left(1-x^2\right)y'-xy=xy^2$, 2) $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$, 3) $y'=y^4\cos x+y\operatorname{tg}x$,

4) $xy-\frac{y'}{x+1}-x=0$, 5) $\left(3x^2+\frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx-\frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}\,dy=0$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $y'\cdot 3^{x^2}-x\cdot 9^{-y}=0$, $y(0)=1$, 7) $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-x\,dy=0$, $y(1)=0$,

8) $x\,dx+t\,dt+x(x\,dt+2t\,dx)=0$, $x(1)=-1$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $2yy''=1+(y')^2$, 10) $yy'''=yy''$, 11) $yy''=y'^2+2xy^2$,

12) $y'''\sin x=\sin 2x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, 13) $xy'y''=(y')^2+x^3$, $y(2)=0$, $y'(2)=4$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''-6y'+9y=3e^{3x}+e^{-3x}(36x+24)$, 15) $y''+y'=x^2+3\sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$,

16) $y'''+y=\left(2x^2+1\right)e^x-\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$, 17) $y''+2y'+2y=e^{-x}\cos x+xe^{-x}$,

18) $y''+\pi^2y=\frac{\pi^2}{\sin\pi x}$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=1$, $y'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}$, 19) $x^2y''+5xy'+3y=15x^2$.

Вариант 7

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $2x^3y' = y\left(2x^2 - y^2\right)$, 2) $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$, 3) $2x\sqrt{a\,y - y^2}\,dx = \left(a^2 + x^2\right)dy$,

4) $y' = \frac{2x}{x^2\cos y + \sin 2y}$, 5) $\left(3x^2 + 4y^2\right)dx + \left(8xy + e^y\right)dy = 0$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$, $y(0) = 0$, 7) $q' = \frac{h^2 - q}{h}$, $q\left(h_0\right) = 0$,

8) $xy' + y = y^2x$, $y(1) = \frac{1}{2}$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $\frac{y''x^2 - xy'}{x^2 - y} = 1$, 10) $\frac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \frac{2yy'}{x}$, 11) $(x+1)y'' - (x+2)y' + x + 2 = 0$,

12) $yy'' - y^2y' - y'^2 = 0$, 13) $y''' = x\ln x$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y'' + 6y' + 9y = -3e^{-3x} + e^{3x}(36x - 24)$,

15) $y'' - y = 2(x-1)\cos x + 2\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, 16) $y''' + y' = 2\cos x - 2x + 1$,

17) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$, 18) $y'' + y = 4\operatorname{ctg} x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$,

19) $x^2y'' + 3xy' - 3y = 2 - 3\ln x$.

Вариант 8

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $y - xy' = 3\left(1 + x^2y'\right)$, 2) $y^2dx + (5xy - 4)dy = 0$, 3) $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$,

4) $\left(1 + \frac{1+t^2}{x^2}\right)\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{x}$, 5) $\left(y^2 + \frac{y}{\cos^2 x}\right)dx + (2xy + \operatorname{tg} x)dy = 0$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$, $y(0) = 2$, 7) $\frac{y - 2yy'}{2x + xy'} = 1$, $y(1) = 0$,

8) $xy' - y = -2\sqrt{xy}$, $y(1) = 1$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $x^2yy'' = (y - xy')^2$, 10) $\frac{5y'''^2}{3y''} = y^{(4)}$, 11) $\frac{y'y'''}{3y''} = y''$, 12) $x(y'' + 1) + y' = 0$,

13) $y''' = x\sin x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y'' - y' = 12x^2 - 4x + x\cos x$, 15) $y'' - 2y' + y = 3e^x + x + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,

16) $y''' - 2y'' + 10y' = 9(x+1)e^x + 3\sin 3x$, 17) $y'' - y' = e^{2x}\sin e^x$,

18) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, 19) $x^2y'' - 4xy' + 6y = \left(x^2 - 4x + 6\right)\ln x$.

Вариант 9

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $x\,y' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$, 2) $\left(1+y^2\right)\cdot\left(e^{2x}dx - e^{y}dy\right) = (1+y)\,dy$,

3) $(\sin xy + x\,y\cos xy)\,dx + x^2\cos xy\,dy = 0$, 4) $(2x+1)\,y' + y = x$, 5) $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{x+y^2}{y^2}dy$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $y\,dx - \left(4+x^2\right)\ln y\,dy = 0$, $y\,(2) = 1$, 7) $\left(1-x^2\right)y' - x\,y = x\,y^2$, $y(0) = 0{,}5$,

8) $\dfrac{h^2+s}{h^2}dh = \dfrac{ds}{h}$, $h(0) = h_0$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $y'''\sin^4 x = \sin 2x$, 10) $y\,y'' = (y')^2$, 11) $x^2 y\,y'' + (y')^2 = 0$,

12) $y^3\,y'' = -1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, 13) $x\,y'y'' + x^2 = 2\left(x^2 + y'^2\right)$, $y'(1) = 0$, $y(1) = 1$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y'' + 2\,y' = \sin^2 x$, 15) $y'' + 9\,y = x\,e^{3x} + 2\cos 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$,

16) $y''' + 8\,y'' + 16\,y' = -(23\cos x + 7\sin x) + x$, 17) $y'' - 4\,y' + 5\,y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$,

18) $x^2y'' + x\,y' - 4\,y = -15\,x + 28$, 19) $y'' - 3\,y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$, $y(0) = 4\ln 4$, $y'(0) = 3\,(3\ln 4 - 1)$.

Вариант 10

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $e^{-y}\,(1+y') = 1$, 2) $x\,dt - \left(t + \sqrt{t^2+x^2}\right)dx = 0$,

3) $\left(x^2 + \ln y\right)\cos 2x\,dx + \sin 2x\left(x\,dx + \dfrac{dy}{2y}\right) = 0$, 4) $x\,y' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$, 5) $y' - y = x\,y^2$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $y' + y = \cos x$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$, 7) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{(\cos x)^2}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$,

8) $\dfrac{y\,dy + z\,dz}{\sqrt{y^2+z^2}} + \dfrac{y\,dz - z\,dy}{y^2} = 0$, $z(1) = 0$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $y'^2 = \sqrt[3]{(y'')^2} - 1$, 10) $\dfrac{y\,y'' - (y')^2}{y\sqrt{x}} = 15\,y$, 11) $y'' = x\,\sin x + \dfrac{1}{x} + 2$,

12) $y\,y'' - (y')^2 = (y')^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, 13) $y\,y'' + (y')^2 = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y'' + 3\,y' = 10\,\sin 3x\cdot\cos 3x - 6x$, 15) $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$,

16) $y''' - 8\,y'' + 16\,y' = 32\,x + 8e^{4x}$, 17) $y'' - 2\,y' + y = x^{-2}e^{x}$,

18) $x^2y'' + 2\,x\,y' - 6\,y = -6\left(x^3 + 1\right)$, 19) $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4$, $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2}\pi$.

Вариант 11

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $x\,y' = x + \frac{1}{2}\,y$, 2) $\left(3\,\frac{\upsilon^2}{t^2} + \ln\upsilon\right)\upsilon' = \frac{2\upsilon^3}{t^3}$, 3) $y'\cos x - y\,\sin x = \sin 2x$,

4) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} - x\,y^2$, 5) $\frac{y}{x^2}\,dx - \frac{x\,y+1}{x}\,dy = 0$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $x\,dy - (x+y)\,dx = 0$, $y(1) = 3$,

7) $3e^x \operatorname{tg} y\,dx + \left(1+e^x\right)\frac{1}{\cos^2 y}\,dy = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$, 8) $y + x\,y' = x^2 y\,y'$, $y(2) = 1$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $y\,y'' + y'^{\,2} = 2x$, 10) $\left(x^2+1\right)\cdot\left(y'^{\,2} - y\,y''\right) = x\,y\,y'$, 11) $y'' = \left(\sqrt{1+y'^{\,2}}\,\right)^3$,

12) $y''\operatorname{tg} x = y' + 1$, 13) $y''' = \frac{x}{(x+2)^5}$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y'' - 3\,y' = 9x^2 + 1 + 3\sin 3x - \cos 3x$, 15) $y'' + y = 4\cos x + \left(x^2+1\right)e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,

16) $y''' - 2\,y'' = 4 + 8\,x\,e^{2x}$, 17) $y'' - 2\,y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$,

18) $y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, 19) $x^2 y'' + x\,y' - 9\,y = -9 - 5x^2$.

Вариант 12

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $(4x - 3\,y)\,dx + (2y - 3x)\,dy = 0$, 2) $d\rho + \rho\,\operatorname{ctg}\varphi\,d\varphi = 0$,

3) $y' - y\,\frac{2x-1}{x^2} = 1$, 4) $\left(x + y\,e^{-1/y}\right)dy - y^2 dx = 0$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

5) $y' = e^{-y/x} + \frac{y}{x}$, $y(1) = 0$, 6) $2\,(x\,y' + y) = y^2 \ln x$, $y(1) = 3$,

7) $\frac{1}{\upsilon} + \frac{s^2}{\upsilon^2} = \frac{2s}{\upsilon}\cdot\frac{ds}{d\upsilon}$, $s(1) = 0$, 8) $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$, $y(0) = 1$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $y'''\sin^4 x = \sin 2x$, 10) $y'' + \frac{2}{1-y}\,y'^{\,2} = 0$, 11) $\left(y'^{\,2} + y\,y''\right) = 4x^2 + 1$,

12) $(x+1)\,y'' + x\,(y')^2 = y'$, $y(1) = -2$, $y'(1) = 4$, 13) $\frac{y}{y'+1} = \frac{y'}{y''}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y'' - 2\,y' = \cos^2 x$, 15) $y'' - 2y' + 10y = \sin x + 2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$,

16) $y''' - 6\,y'' + 9\,y' = -3 - 36\,x + 3e^{3x}$, 17) $y'' - 4\,y' + 4\,y = \sin 3x$,

18) $x^2 y'' - 4\,x\,y' + 4y = \frac{30}{x}$, 19) $y'' - y' = \frac{1}{2e^x + 1}$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = \ln 9 - 1$.

Вариант 13

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx = x\,dy$, 2) $\left(x^2y+x^2\right)dx+\left(x^3-1\right)(y-1)\,dy=0$, 3) $y'+y=2x$.

4) $\left(\dfrac{xt}{\sqrt{1+x^2}}+2xt-\dfrac{t}{x}\right)x'_t+\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x=0$, 5) $\sin y = x\,y'+y'\sin y\cdot \operatorname{tg}\dfrac{y}{2}$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $3y^2y'+y^3=x+1$, $y(1)=-1$, 7) $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-x\,dy=0$, $y(1)=0$.

III. Решить ДУ высших порядков:

8) $y'''=x^2-\cos\dfrac{x}{2}+1$, 9) $y'''\operatorname{tg}5x=5y''$, 10) $x\,y''=y'\left(\ln y'-\ln x\right)$,

11) $y\left(x\,y''+y'\right)+x\,y'^2=0$, 12) $\left(1+y^2\right)y''=2y\left(y'\right)^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=5$,

13) $y''=e^{2y}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''+y'=12x^2+4x^3-2\sin x$, 15) $y''+4y=2\sin 2x-3\cos 2x+1$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$,

16) $y'''+2y''+y'=(6-6x)\,e^{-x}+2$, 17) $y''+y=\operatorname{tg}x$,

18) $y''+6y'+8y=\dfrac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}$, $y(0)=y'(0)=0$, 19) $x^2y''-2xy'-4y=20-18x$.

Вариант 14

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $\left(xye^{\frac{x}{y}}+y^2\right)dx=x^2e^{\frac{x}{y}}dy$, 2) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}\operatorname{tg}y\,d\theta+\dfrac{1}{\cos^2 y}\operatorname{tg}\theta\,dy=0$,

3) $\left(x^2+\sin^2 y\right)dx+x\,\sin 2y\,dy=0$, 4) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

5) $xy'+y-e^x=0$, $y(a)=b$, 6) $2xy'-6y=x^2y^2$, $y(1)=5$,

7) $(x+2y)dx-x\,dy=0$, $y(1)=1$, 8) $4xy^3y'=x^2-y^4$, $y(1)=2$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $x\,y''=y'+x\,\sin\left(\dfrac{y'}{x}\right)$, 10) $y''=50y^3$, $y(3)=1$, $y'(3)=5$,

11) $\left(1+y'^2\right)y'''-2y'y''^2=0$, $y(0)=y'(0)=0$, $y''(0)=1$,

12) $\left(y''\right)^2=y'$, $y(2)=y'(2)=1$, 13) $y'''=\dfrac{6}{x^3}$, $y(1)=2$, $y'(1)=y''(1)=1$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''+5y'+6y=e^{-x}+e^{-2x}$, 15) $y''-2y'=e^{2x}+5$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$,

16) $y'''-y''=\sin x-4\cos x+4xe^{-x}$, 17) $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^3}$,

18) $y'''+3y''+2y'=x^2+2x$, 19) $x^2y''+4xy'-4y=-\dfrac{6}{x^2}$, $y(1)=0$, $y'(1)=3$.

Вариант 15

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $\left(\ln x+1+\frac{y^2}{x}\right)dx+2y\ln x\ dy=0,$ 2) $2\sqrt{a\,y-y^2}-\frac{a^2-x^2}{y}y'=0,\ \ (a>0),$

3) $y'-y\,\mathrm{tg}\,x=\mathrm{ctg}\,x,$ 4) $2xyy'=2y^2+\sqrt{y^4+x^4}.$

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

5) $(x-y)\,dx+x\,dy=0,\ y(1)=2,$ 6) $\frac{2x\,dx}{y^3}+\frac{\left(y^2-3x^2\right)}{y^4}dy=0,\ \ y(1)=1,$

7) $xy'+y=x\cdot y^2,\ \ y(1)=1,$ 8) $xy'-4y=x^2\sqrt{y},\ \ y(1)=0.$

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $\left(1+x^2\right)y''+y'^2+1=0,$ 10) $\frac{y''}{y'}=\frac{2yy'}{1+y^2},$ 11) $yy'+xyy''+xy'^2=x^3,$

12) $y'''=xe^x,\ \ y(0)=y'(0)=y''(0)=0,$ 13) $\left(xy''-y'\right)y'=x^3,\ \ y(1)=1,\ y'(1)=0.$

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''-y=(x-1)\cos x+2\sin x,$ 15) $y''-36y=-e^{6x}+\sin 6x,\ \ y(0)=1,\ y'(0)=1,$

16) $y'''-3y'+2y=e^{-x}\left(4x^2+4x-10\right)+2e^x,$ 17) $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x^2+1},$

18) $x^2y''+6xy'+4y=9+4\ln x,$ 19) $y''+y=4\,\mathrm{ctg}\,x,\ \ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=4,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=4.$

Вариант 16

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y,$ 2) $y'+2\frac{y}{x}=x^3,$ 3) $y'+2xy=2x^3y^3,$

4) $(2x+1)\sin y^2\,dx=\sin y^2\,dy-2\left(x^2y+xy-y^2\right)\cos y^2dy,$ 5) $y'-x^2y^2=y^2.$

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $\left(a^2+y^2\right)dx+2x\sqrt{ax-x^2}\,dy=0,\ \ y(a)=0,$

7) $e^{-x}dy=\left(x+ye^{-x}\right)dx,\ \ y(0)=1,$ 8) $xy'=xe^{y/x}+y,\ \ y(1)=0.$

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $y''=\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}},$ 10) $y''=3y',$ 11) $2y'+\left(y'^2-6x\right)y''=0,\ \ y(2)=0,\ y'(2)=2,$

12) $x^2yy''=\left(y-xy'\right)^2,$ 13) $y'''=4\cos 2x-x,\ \ y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''+9y=e^{3x}\cos x-9x+\sin 3x,$

15) $y''-6y'+9y=3x-8e^x,\ \ y(0)=-1,\ y'(0)=1,$

16) $y'''-4y''+5y'-2y=2x+3-2e^x,$ 17) $y''-y=\frac{1}{e^x+2},$

18) $x^2y''-5xy'+8y=25x^3,$ 19) $y''+4y=4\,\mathrm{ctg}\,2x,\ \ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=3,\ \ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2.$

Вариант 17

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0$, 2) $(4xy+5)dy-y^2dx=0$, 3) $\left(2t+\frac{t^2+x^2}{xt^2}\right)dt=\frac{t^2+x^2}{tx^2}dx$,

4) $y'+y\cos x=\sin 2x$, 5) $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}dy=0$, 6) $\left(r^2+1\right)dr+(r+1)\operatorname{tg}\varphi\, d\varphi=0$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

7) $y'-y\operatorname{tg}x+y^2\cos x=0$, $y(0)=1$, 8) $\frac{y-xy'}{x+y\cdot y'}=2$, $y(1)=1$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $x\cdot y''+x\cdot(y')^2=y'$, 10) $y^{(4)}=2x-\sin x-5$, 11) $y''-\frac{y'^2}{y}-\frac{y'}{x}=0$,

12) $y^3y''=1$, $y(-2)=1$, $y'(-2)=-1$, 13) $y''=\frac{y'^2}{y}$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''-4y'+3y=e^{2x}(\sin x+1)$, 15) $y''+4y=4x-2e^{-x}\sin x$, $y(0)=0$, $y'(0)=-4$,

16) $y'''+y''=2-2e^{-x}(2\sin x+\cos x)$, 17) $y''+2y'+y=x^2e^{-x}\cos x$,

18) $x^2y''+3xy'-8y=16-\frac{9}{x}$, 19) $y''+9y=\frac{9}{\sin 3x}$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=4$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\pi$.

Вариант 18

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $y'(x+\sin y)=1$, 2) $y'=\frac{x\left(a^2-y^2-x^2\right)}{y\left(x^2+y^2+a^2\right)}$, 3) $xy'=y\left(\ln y-\ln x\right)$,

4) $\left(xy+x^2y^3\right)y'=1$, 5) $\left(y^2+\frac{y}{\cos^2 x}\right)dx+(2xy+\operatorname{tg}x)dy=0$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $y'+\sin(x-y)=\sin(x+y)$, $y(\pi)=\frac{\pi}{2}$, 7) $2x^2y'=x^2+y^2$, $y(1)=0$,

8) $y'-2y=-x^2$, $y(0)=\frac{1}{4}$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $y''\left(e^x+1\right)+y'=0$, 10) $y-xy'=x\sqrt{yy''}$, 11) $y'''=6x+\cos\frac{x}{3}+\ln x$,

12) $y''=1-(y')^2$, $y(0)=y'(0)=0$, 13) $2y'^2=(y-1)y''$, $y(1)=2$, $y'(1)=0$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''+2y'+2y=2\left(e^{-x}\sin x+1\right)$, 15) $y''+3y'=6e^{-3x}-5\sin 3x$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$,

16) $y'''-y''=12x^2+2-4e^x\sin x$, 17) $2y''+5y'=\cos^2 x$,

18) $y''-3y'+2y=\frac{1}{3+e^{-x}}$, $y(0)=1+8\ln 2$, $y'(0)=14\ln 2$,

19) $x^2y''-xy'-8y=\left(x^2+x-8\right)e^{-x}$.

Вариант 19

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $y\,dx+\left(2\sqrt{x\,y}-x\right)dy=0$, 2) $\frac{1}{y'}-\frac{x}{y}=\frac{1}{2x}$, 3) $\left(3x^2+6x\,y^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$,

4) $\left(a^2+x^2\right)y'+x\,y=1$, 5) $\left(y^4e^y+2x\right)y'=y$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $s\,ds-2t\,dt=t\cdot\ln t\,dt$, $s(1)=1$, 7) $(2x+1)y'=4x+2y$, $y(0)=0$,

8) $x\,y'=y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$, $y(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $x^2\left(y\,y''+y'^2\right)+(1+2x\,y)y'=0$, 10) $y\,y''=y'\left(y'+1\right)$, 11) $y''=\frac{y'}{x}+\cos\frac{y'}{x}$,

12) $y\,y''+\left(y'\right)^2=0$, $y'(1)=y(1)=2$, 13) $y'''=4\sin 2x$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''+4y'+4y=-2e^{-2x}+32e^{2x}\cdot x$,

15) $y''-2y'-8y=e^x-8\cos 2x$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$,

16) $y'''+2y''+y'+2y=4\cos x-2\sin x+4x$, 17) $y''-y'=e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$,

18) $x^2y''+7x\,y'+8y=-\frac{1}{x^3}$, 19) $y''+16y=\frac{16}{\cos 4x}$, $y(0)=3$, $y'(0)=0$.

Вариант 20

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $y'x+y=-x\,y^2$, 2) $\left(1-x^2\right)y'+x\,y=0$, 3) $\frac{s+\sin t\cdot\cos^2 s\,t}{\cos^2 s\,t}+\left(\frac{t}{\cos^2 s\,t}+\sin s\right)\frac{ds}{dt}=0$,

4) $2x^3y'=y\left(2x^2-y^2\right)$, 5) $\left(y^2+2y-x\right)y'=1$, 6) $\left(y^2\cos x+y\right)dx+\left(y\sin x+y\right)dy=0$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

7) $\left(a^2+y^2\right)dx+2x\sqrt{a\,x-x^2}\,dy=0$, $y(a)=0$,

8) $\left(x^2+2x\,y-y^2\right)dx+\left(y^2+2x\,y-x^2\right)dy=0$, $y(1)=-1$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $yy''=\left(y'\right)^2-\left(y'\right)^3$, 10) $2y\,y''=\left(y'\right)^2$, $y(-1)=4$, $y'(-1)=1$,

11) $x\,y''=y'+\sqrt{x^2-(y')^2}\arcsin\frac{y'}{x}$, 12) $y'''e^x=x$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=1$, 13) $y''+\frac{y'^2}{y}=\frac{2y'}{x}$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''-3y'+2y=2e^x\left(\cos\frac{x}{2}+1\right)$,

15) $y''-4y'+4y=\sin 2x+e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$,

16) $y'''+4y'=8\left(\cos 2x+1\right)$, 17) $y''+y=\operatorname{ctg}x$,

18) $x^2y''+8x\,y'+12y=\frac{2}{x^2}$, 19) $y''-3y'+2y=\frac{e^x}{1+e^{-x}}$, $y(0)=y'(0)=0$.

Вариант 21

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $\left(2xy^2-y\right)dx+x\,dy=0$, 2) $t\,ds-2s\,dt=t^3\ln t\,dt$,

3) $\left(\frac{1}{t}\sin\frac{x}{t}-\frac{t}{x^2}\cos\frac{t}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{t}{x}-\frac{x}{t^2}\sin\frac{x}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=0$,

4) $y\,dx+\left(xy^2-e^{-0{,}5y^2}\right)dy=0$, 5) $\left(xe^x+\frac{y}{x^2}\right)dx=\frac{1}{x}dy$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $xy'=x-y$, $y(0)=0$, 7) $\left(1-x^2\right)y'-xy=xy^2$, $y(0)=0.5$, 8) $x\ln\frac{x}{y}dy-y\,dx=0$, $y(1)=1$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $y''=xe^x+2\sin\left(-\frac{x}{3}\right)$, 10) $y'''=\sqrt{1+y''}$, 11) $yy''+y'^2=1$,

12) $xyy''-xy'^2=yy'$, $y(1)=1$, $y'(1)=2$, 13) $y''-\frac{y'}{x-1}=x\left(x-1\right)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y''-4y'+4y=2e^{2x}+32xe^{-2x}$, 15) $y''-2y'=e^{2x}+x^2-1$, $y(0)=\frac{1}{8}$, $y'(0)=1$,

16) $y'''+4y''+8y'=8\left(\sin 2x+1\right)$, 17) $y''+y=\frac{\sin^2 x-1}{\sin^2 x}$,

18) $x^2y''+2xy'-12y=\frac{60}{x}$, 19) $y''-3y'+2y=\left(1+e^{-x}\right)^{-1}$, $y(0)=1+2\ln 2$, $y'(0)=3\ln 2$.

Вариант 22

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $\left(1+y^2\right)\cdot\left(e^{2x}dx-e^y dy\right)+\left(1+y\right)dy=0$, 2) $\left(x+2y\right)dx-x\,dy=0$,

3) $y'+xy=xy^3$, 4) $\left(e^y-2xy\right)dx+\left(e^y-x\right)x\,dy=0$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

5) $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x$, $y(1)=2$, 6) $y'x+y=2y^2\ln x$, $y(1)=0.5$,

7) $\left(1+x^2\right)y'-2xy=2x+1$, $y(0)=1$, 8) $x\left(\ln x-\ln y\right)dy-2y\,dx=0$, $y(1)=1$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $yy''=\left(y'\right)^2+y^2y'$, 10) $y'=\frac{x\left(yy''+(y')^2\right)}{2y}$, 11) $\left(1+x^2\right)y''+2y'x=x^3$,

12) $y'''=x\sin^2 x$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$, 13) $y''+\frac{(y')^2}{y}=\frac{1}{y}$, $y(0)=3$, $y'(0)=1$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y'''+2y''=6x+2e^{2x}$, 15) $y''+2y'+5y=4xe^{-x}+17\cos 2x$,

16) $y''-2y'-3y=x\left(1+e^{3x}\right)$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$, 17) $y''+y=\frac{1}{\cos^3 x}$,

18) $x^2y''-5xy'+5y=\left(x^2-5x+5\right)e^x$, 19) $y''-3y'+2y=\left(2+e^{-x}\right)^{-1}$.

Вариант 23

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $e^x \sin^3 y + \left(1+e^{2x}\right)\cos y \cdot y' = 0$, 2) $x^2 y' = y^2 + x\,y$, 3) $\left(1-x^2\right)\cdot\left(y' - x\sqrt{y}\right) + x\,y = 0$,

4) $t \cdot s\,ds = \left(s^2 - t^2\right) dt$, 5) $y' + 2\,y - x^2 = 0$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

6) $2\,x\,y\,dx + x^2 dy + \left(dx + 2\,dy\right)\cdot\cos\left(x+2y\right) = 0$, $y(0) = 0$, 7) $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$, $y(1) = 4$,

8) $\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$, $y(1) = e$.

III. Решить ДУ высших порядков:

9) $y \cdot y'' + (y')^2 = 1$, 10) $x\,y'' - y' - \sqrt{(y')^2 + x^2} = 0$, 11) $y'\,y''' = 2\,y''^2$,

12) $y''' = 3x^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = -1$, 13) $y\,y'' = y'^2 + 15\,y^2\sqrt{x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y'' - 2\,y' + y = e^x + 2\,x\,e^{-x}$, 15) $y'' - 2y' = 3x + 2\,x\,e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$,

16) $y''' - y = 3\,x\,e^x + 2\cos x$, 17) $y'' + 4y = \sin x \cdot \cos 2x$, 18) $x^2 y'' - 6\,x\,y' + 12y = 12\left(x+3\right)$,

19) $y'' - 2y' = 4\,e^{-2x}\left(1 + e^{-2x}\right)^{-1}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = \ln 4 - 2$.

Вариант 24

I. Найти общий интеграл (общее решение) ДУ:

1) $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$, 2) $x^2\,dy = \left(y^2 - xy + x^2\right)dx$, 3) $2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$,

4) $\left(3x^2\,\mathrm{tg}\,y - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(\frac{x^3}{\cos^2 y} + 4y^3 + \frac{3\,y^2}{x^2}\right)dy = 0$.

II. Найти частный интеграл (частное решение) ДУ:

5) $x\,dt - \left(t - \sqrt{t^2 - x^2}\right)dx = 0$, $t(1) = 1$, 6) $y + x\,y' = 3\,y^2 y'$, $y(1) = 1$,

7) $\left(2\,x\,y + 3\,y^4\right)dx + \left(x^2 + 12\,x\,y^3\right)dy = 0$, $y(1) = 1$.

III. Решить ДУ высших порядков:

8) $y'' + y'\,\mathrm{tg}\,x - \sin 2x = 0$, 9) $x\,y''' + y'' = x^{-1/2}$, 10) $1 + \left(y'\right)^2 = 2y\,y''$,

11) $\left(y'\right)^2 - y\,y'' = \frac{x\,y\,y'}{x^2+1}$, 12) $y''' = x + \sin x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$,

13) $y'y''' - 3\,y''^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

IV. Решить ЛДУ:

14) $y'' + 2y' + y = -e^{-x} + 2\,x\,e^x$, 15) $y'' + y = \cos x + \cos 2\,x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,

16) $y''' - 3\,y'' - y' + 3\,y = 2\cos x + 2$, 17) $y'' + y' = \left(1 + e^x\right)^{-1}$,

18) $x^2 y'' + 5\,x\,y' - 5y = 14\,x^2 - 15$, 19) $y'' + 4\,y = 4\left(\cos 2x\right)^{-1}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

2. Индивидуальные задания по рядам

Вариант 1

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\ldots$.

Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,10,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots$, б) $3-\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{7}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}+\frac{(-1)^n i}{n}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n n\sqrt{n}}$. Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ сумму ряда в точках $2\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=xe^{2x}$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+2}$ в ряд Тейлора по степеням $x+2$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(2+3i)^{n+1}}$.

7. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$?

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y''=ye^x$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0}=1$, $y'\big|_{x=0}=0$. Найти три члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенно значение интеграла $\int\limits_1^2\frac{\sin x}{x^3}dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье

а) периодическую функцию с периодом $T=2l$ (рис. 1),

b) функцию $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2},\\ 0, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi,\end{cases}$

заданную на промежутке $(0,\pi)$, продолжая её четным или нечетным образом на $(-\pi,\pi)$. Построить график суммы полученного ряда.

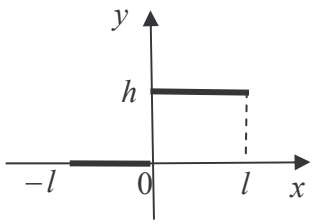

Рис. 1

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Вариант 2

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots$ Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,\,10,\,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}+\ldots$, б) $2-\frac{3}{4}+\frac{4}{9}-\frac{5}{16}+\ldots$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}+i\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+2)^n}{n^2}$. Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ сумму ряда в точках $-2\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\ln(e+x)$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x^2+6x+6}$ в ряд Тейлора по степеням $(x+3)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(2n+1)(3+4i)^n}$.

7. Найти область определения функции $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{x^2+n^2}$ и исследовать её на дифференцируемость.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=y^3+x^2$, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=0}=0{,}5$. Найти три члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенно значение интеграла $\int\limits_1^2 x^2\cos\left(x^2\right)dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=2l$ (рис. 2),

б) функцию $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \pi<x\le 2\pi,\end{cases}$, заданную на промежутке $[0,2\pi]$, продолжая её четным или нечетным образом на промежуток $[-2\pi,2\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

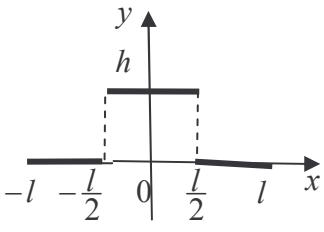

Рис. 2

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

Вариант 3

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 10}+\ldots$

Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,\,10,\,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\ldots$, б) $\frac{4}{1^2}-\frac{4}{3^2}+\frac{4}{5^2}-\ldots+\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}+\ldots$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+i\frac{(-1)^n}{(n-1)!\,2^{n-1}}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n^2+1}$. Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ сумму ряда в точках $4\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=3\cos^2 x-\sin^2 x$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^2}$ в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}(z-3+4i)^n$.

7. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x}{n\sqrt{n}}$. Можно ли ряд почленно дифференцировать?

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=e^{2xy}+1$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=0}=0$. Найти три члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенно значение интеграла $\int\limits_{0{,}1}^{0{,}5}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=2l$ (рис. 3),

б) функцию $f(x)=\begin{cases}2x/\pi, & 0<x\le\pi/2,\\ \sin x, & \pi/2<x<\pi,\end{cases}$ заданную на промежутке $[0,\pi]$, продолжая её четным или нечетным образом на промежуток $[-\pi,\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

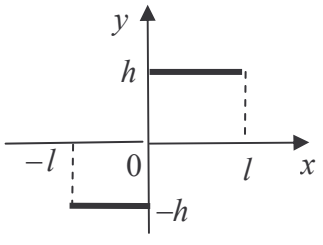

Рис. 3

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$.

Вариант 4

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots$

Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,\,10,\,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{1}{1\cdot 11}+\frac{1}{2\cdot 12}+\frac{1}{3\cdot 13}+\ldots$, б) $\frac{\cos e}{e}-\frac{\cos 2e}{e^2}+\frac{\cos 3e}{e^3}-\frac{\cos 4e}{e^4}+\ldots$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}+i\frac{n^n}{(n+1)^n}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{2^n\cdot n}$. Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ сумму ряда в точках $5\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\sin\left(x^2\right)$ в ряд Маклорена и найти область сходимости полученного ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\frac{3x+2}{x^2+2x+3}$ в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{2^n(1-i)^n}$.

7. Исследовать на равномерную сходимость ряд $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y''=e^{xy}+2$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0}=1$, $y'\big|_{x=0}=0$.

Найти четыре члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенно значение интеграла $\int\limits_{0.8}^{1.4}x^6e^{-x}dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=1$ (рис. 4),

б) функцию $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le \pi/2,\\ 1, & \pi/2<x\le\pi,\end{cases}$ заданную на промежутке $[0,\pi]$, продолжая её четным или нечетным образом на промежуток $[-\pi,\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

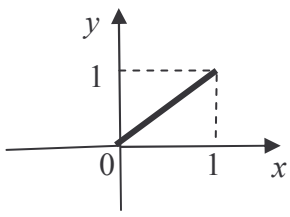

Рис. 4

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)}{(2n+1)^2}$.

Вариант 5

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{2\cdot 6}+\frac{4}{3\cdot 7}+\frac{4}{4\cdot 8}+\ldots$

Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,10,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{\sin\alpha}{1\sqrt{1}}+\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}}+\frac{\sin 3\alpha}{3\sqrt{3}}+\ldots$, б) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\ldots$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\,(n+1)}+i\,\frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!\,2^{n-1}}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-8)^n}{4^n\cdot n^3}$. Вычислить с точностью $\varepsilon=0,01$ сумму ряда в точках $8\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\ln\left(x^2+4x+6\right)$ в ряд Тейлора по степеням $(x+2)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\,(3-2i)^n}$.

7. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $x\in[0;\infty)$.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $(x+1)\,y''+x\,y'+3\,y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0}=1$, $y'\big|_{x=0}=1$. Найти четыре члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенно значение интеграла $\int_{0.3}^{0,8}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=2$ (рис. 5),

б) функцию $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le\pi/2,\\ -\cos 2x, & \pi/2<x<\pi,\end{cases}$ заданную на промежутке $[0,\pi]$, продолжая её четным или нечетным образом на $[-\pi,\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

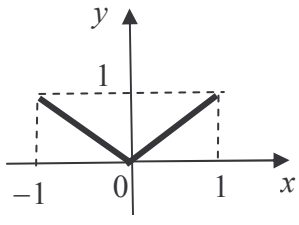

Рис. 5

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{\sin(2n)}{n}$.

Вариант 6

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 14}+\ldots$

Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,\,10,\,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{2}{7}+\left(\frac{4}{11}\right)^2+\left(\frac{6}{15}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^2+\ldots$, б) $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}-\frac{1}{11^2}+\ldots$,

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}+i\,\frac{n^3}{2^n}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{4^n\cdot n\sqrt[3]{n}}$. Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ сумму ряда в точках $3\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\frac{x}{\left(1-3x^2\right)^2}$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=xe^{-3x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{\left(\sqrt{3}-i\right)^n}$.

7. Пользуясь определением, доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ равномерно сходится на промежутке $[-1;\,1]$.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=y^2+x^3$, удовлетворяющее начальному условию $y\,\big|_{x=0}=0.5$. Найти пять членов ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int\limits_{0{,}1}^{0{,}8}\frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=2$ (рис. 6),

б) функцию $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le \pi/2,\\ \sin x, & \pi/2<x\le\pi,\end{cases}$, заданную на промежутке $[0,\pi]$, продолжая её четным или нечетным образом на промежуток $[-\pi,\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

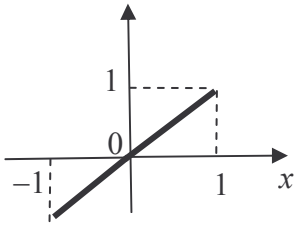

Рис.6

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Вариант 7

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 17}+\ldots$

Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,10,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $1+\frac{2}{\sqrt{5\cdot 5}}+\frac{4}{\sqrt{9\cdot 5^2}}+\frac{8}{\sqrt{13\cdot 5^3}}+\ldots$, б) $\frac{1}{2}-\frac{1}{1+2^4}+\frac{1}{1+3^4}-\frac{1}{1+4^4}+\ldots$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+i\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{5^n\left(n^3+1\right)}$. Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ сумму ряда в точках $-3\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\ln(x+10)$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\sin x+3\cos x$ в ряд Тейлора по степеням $(x+\pi/4)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^n 2^n}{(1+i\sqrt{3})^n}$.

7. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ сходится равномерно на положительной полуоси.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=x^2y^2-1$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=0}=2$. Найти три члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенно значение интеграла $\int_{0.1}^{0{,}7}\frac{dx}{1+x^4}$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=4$ (рис. 7),

б) функцию $y=\operatorname{sign}(\sin x)$, заданную на промежутке $[0,2\pi]$, продолжая её четным или нечетным образом на промежуток $[-2\pi,2\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

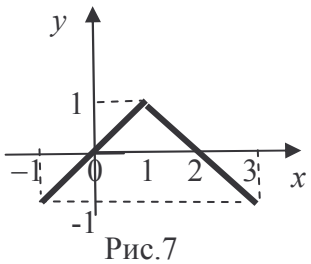

Рис.7

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)}{2n+1}$.

Вариант 8

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 16}+\ldots$

Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,\,10,\,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{\sin\alpha}{1\cdot 3}+\frac{\sin 2\alpha}{2\cdot 4}+\frac{\sin 3\alpha}{3\cdot 5}+\ldots$, б) $1-\frac{3}{4}+\frac{4}{8}-\frac{5}{16}+\ldots$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+i\,\frac{(-1)^{n+1}\pi^{2n-1}}{(2n-1)!\,6^{2n-1}}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{3^n\cdot\left(2+\sqrt{n}\right)}$. Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ сумму ряда в точках $4\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\sin^2 2x+\cos 4x$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\frac{2x+1}{x^2-3x+2}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-3)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n^2+1}\,z^n$.

7. Доказать, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$ существует на всей числовой оси, но ряд неравномерно сходится на промежутке $(-\infty;+\infty)$.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=y^2-\sin x$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=0}=0$. Найти три члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int\limits_{0{,}2}^{0{,}7}\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию $f(x)=|\sin x|$,

б) функцию $f(x)=x$, заданную на промежутке $[0;1]$, продолжая её четным или нечетным образом на промежуток $[-1;1]$. Построить график суммы полученного ряда.

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$.

Вариант 9

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 17}+\ldots$

Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,10,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $1+\frac{7}{10}+\frac{2^2+5^2}{100}+\frac{2^3+5^3}{1000}+\ldots$, б) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\ldots$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+i\frac{(-1)^{n+1}\cdot\pi^{2n-2}}{(2n-1)!\,3^{2n-2}}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{2^n\sqrt{n}}$. Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ сумму ряда в точках $6\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\left(x^2+2x+3\right)e^{3x}$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-i)^n\cdot z^n}{(n+1)!}$.

7. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2^n x\right)}{2^n}$ сходится равномерно на всей числовой оси, однако его нельзя почленно дифференцировать. Почему?

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=y^2+\cos x$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=0}=0$. Найти три члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int_{0.8}^{1{,}4}x^4e^{-2x^2}dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=2$ (рис. 8),

б) функцию $f(x)=\begin{cases}-1, & 0<x\le\pi/2,\\ \cos 2x, & \pi/2<x<\pi,\end{cases}$ заданную на промежутке $[0,\pi]$, продолжая её четным или нечетным образом на промежуток $[-\pi,\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

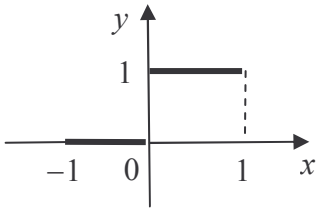

Рис .8

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$.

Вариант 10

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}+\ldots$

Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5, 10, 100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\sin\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{9}+3\sin\frac{\pi}{27}+\ldots$, б) $1-\frac{3}{1+2^3}+\frac{4}{1+3^3}-\frac{5}{1+4^3}+\ldots$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n n!}+i\frac{1}{3^n}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$. Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ сумму ряда в точках $4\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=(x+1)\,e^{-x}$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\frac{2x+1}{(1+x)^2}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-2)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n-1)^2}$.

7. Доказать, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n-1}}-x^{\frac{1}{2n-3}}\right)$ существует на всей числовой оси, но ряд неравномерно сходится на $[-l;\,l]$, где $l>0$.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=y^2+yx$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=0}=1$. Найти три члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенно значение интеграла $\int\limits_{0{,}1}^{0{,}8}\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^2}}$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=2$ (рис. 9),

б) функцию $f(x)=\cos\frac{x}{2}$, заданную на промежутке $[0,\pi]$, продолжая её четным или нечетным образом на промежуток $[-\pi,\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

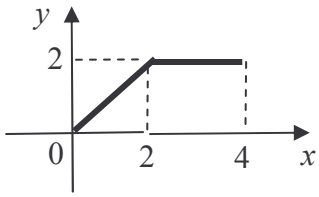

Рис. 9

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+3)(4n+5)}$.

Вариант 11

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{7\cdot 11}+\ldots$

Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,\,10,\,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $1+\frac{1000}{1}+\frac{1000^2}{1\cdot 2}+\frac{1000^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$, б) $\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}-\frac{1}{5\cdot 8}+\ldots$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{3^n}+i\frac{3^n}{n!}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n(n+1)}$. Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ сумму ряда в точках $5\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\int\limits_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=3^x$ в ряд Тейлора по степеням $(x-2)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

7. Пользуясь почленным интегрированием функционального ряда, найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{nx}}$, $x>0$.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=y+\frac{x^2}{y}$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=0}=1$. Найти три члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенно значение интеграла $\int\limits_{0.3}^{0{,}8}\frac{x\,dx}{1+x^5}$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=4$ (рис. 10),

б) функцию $f(x)=\begin{cases}x(x-\pi), & 0<x\le\pi,\\ 0, & \pi<x<2\pi,\end{cases}$ заданную на промежутке $[0,2\pi]$, продолжая её четным или нечетным образом на промежуток $[-2\pi,\,2\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

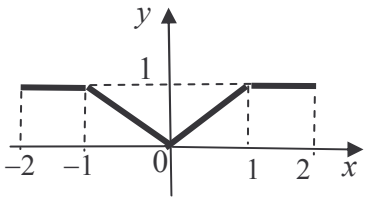

Рис. 10

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2}$.

Вариант 12

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 13}+\ldots$

Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,\,10,\,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^3+\left(\frac{4}{11}\right)^4+\ldots$, б) $\frac{1}{1\cdot 11}-\frac{1}{2\cdot 12}+\frac{1}{3\cdot 13}-\frac{1}{4\cdot 14}+\ldots$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+i\frac{2^n}{n!}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot 2^n}$. Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ сумму ряда в точках $-3\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\int\limits_0^x\frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=(x+1)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ в ряд Тейлора по степеням $\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n z^n}{n^2}$.

7. Найти область равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^2 x}{\sqrt{n^5}}$. Можно ли этот ряд почленно дифференцировать?

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=y^2+x^3$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=0}=0.5$. Найти три члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int\limits_1^2\frac{\cos x\,dx}{x^2}$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=4$ (рис. 11),

б) функцию $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x\le\pi,\\ \cos\frac{x}{2}, & \pi<x<2\pi,\end{cases}$ заданную на промежутке $[0,2\pi]$, продолжая её четным или нечетным образом на промежуток $[-2\pi,2\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

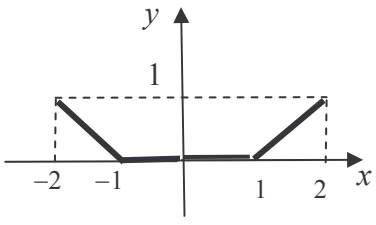

Рис. 11

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Вариант 13

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 8}+\frac{1}{6\cdot 10}+\frac{1}{8\cdot 12}+\ldots$

Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,\,10,\,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\ldots$, б) $1-\frac{\cos e}{e}+\frac{\cos 2e}{e^2}-\frac{\cos 3e}{e^3}+\ldots$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{n!}+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+2)\cdot 2^{2n-1}}$. Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ сумму ряда в точках $1\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+3x+2}$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\sqrt{x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(1-3i)^n}$.

7. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ сходится равномерно на промежутке $[0;\infty)$.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y''=x^2y-y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=5$. Найти четыре члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int\limits_1^2 x^4\sin\left(x^2\right)dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=2$ (рис. 12),

б) функцию $f(x)=x(\pi-x)$, заданную на промежутке $[0,\pi]$, продолжая её четным или нечетным образом на промежуток $[-\pi;\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

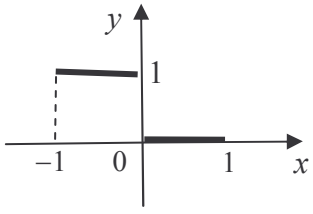

Рис. 12

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(4n+2)}{2n+1}$.

Вариант 14

1. Пользуясь определением , найти сумму ряда $\frac{1}{2\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot 10}+\frac{1}{6\cdot 12}+\frac{1}{8\cdot 14}+\ldots$ Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5, 10, 100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^4+\ldots$, б) $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{3}{27}-\frac{4}{81}+\ldots$, в) $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{\cos n}{2^n}+\frac{i}{n(n-1)}\right]$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(x-6)^n}{3^{2n}}$. Вычислить с точностью ε=0,01 сумму ряда в точках $6\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\int_0^x t^4\cdot\cos 2t\,dt$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\left(x^2+2x\right)\cdot e^{-x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{3^n\sqrt{n}}$.

7. Показать, что функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$ существует для любого x, но ряд сходится неравномерно на всей числовой оси. Существует ли отрезок, на котором ряд сходится равномерно?

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y''=ye^x+1$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=1$. Найти шесть членов ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int_1^2 x^8\,e^{-3x^2}dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=4$ (рис.13),

б) функцию $f(x)=\sin 3x$, заданную на промежутке $[0,\pi]$, продолжая её чётным или нечётным образом на промежуток $[-\pi,\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

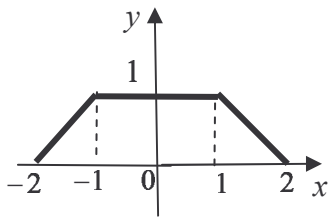

Рис.13

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Вариант 15

1. Пользуясь определением , найти сумму ряда $\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 15}+\ldots$ Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,\,10,\,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+4\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots$, б) $\frac{1\cdot 2}{3}-\frac{2\cdot 3}{3^2}+\frac{3\cdot 4}{3^3}-\frac{4\cdot 5}{3^4}+\ldots$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(n-1)!}-\frac{i}{n(n+1)}\right]$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,(x-2)^n}{(n^2+3)\,3^n}$.

Вычислить с точностью ε=0,01 сумму ряда в точках $2\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\frac{x^2+2x+2}{e^{2x}}$ в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{2^n}$.

7. Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$ на отрезке $[0,2\pi]$?

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=x^3y^2+e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$. Найти три члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int_{0,8}^{1,4}x^6\sin 4x\,dx$ с точностью ε=10^{-3}. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=2l$ (рис.14),

б) функцию $f(x)=\cos ax$ ($a-$ целое число), заданную на промежутке $[0,\pi]$, продолжая её нечётным образом на $[-\pi,\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

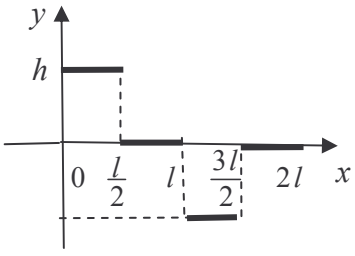

Рис.14

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin 2k}{k}$.

Вариант 16

1. Пользуясь определением , найти сумму ряда $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}+\ldots$ Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5, 10, 100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\sin\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}}+\frac{\sin 3\alpha}{3\sqrt{3}}+\frac{\sin 4\alpha}{4\sqrt{4}}+\ldots$, б) $1-\frac{3}{4}+\frac{4}{8}-\frac{5}{16}+\ldots$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2^n+5^n}{10^n}+\frac{i}{(n+2)!}\right]$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{n-1}}{2^n\sqrt[3]{n}}$. Вычислить с точностью ε=0,01 сумму ряда в точках $-3\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\left(x^2+1\right)\sin 2x-2x\cos 2x$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=x\cdot e^{-x/2}$ в ряд Тейлора по степеням $(x+2)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(2+i)^n}$.

7. Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\sin\frac{x}{3^n}$ на отрезке $[-l,l]$?

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=x^2y^2-1$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$. Найти три члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int_1^2 x^6\,e^{-x^2}dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую (с периодом $T=2\pi$) функцию

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2}, & -\pi\le x\le 0,\\ 1, & 0<x\le\pi,\end{cases}$$

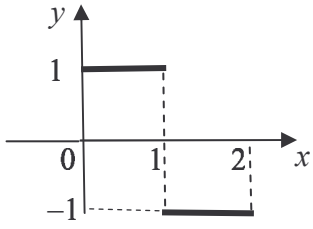

Рис.15

б) функцию (рис.15), заданную на промежутке $[0;2]$, продолжая её чётным или нечётным образом на промежуток $[-2;2]$. Построить график суммы полученного ряда.

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(4n+2)}{(2n+1)^2}$.

Вариант 17

1. Пользуясь определением , найти сумму ряда $\frac{2}{1\cdot 5}+\frac{2}{2\cdot 6}+\frac{2}{3\cdot 7}+\frac{2}{4\cdot 8}+\ldots$

Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,\,10,\,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{1}{2^2}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{4^2}+\frac{7}{5^2}+\ldots$, б) $2-\frac{2+3}{6}+\frac{2^2+3^2}{6^2}-\frac{2^3+3^3}{6^3}+\ldots$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+i\frac{n}{n+1}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\,(x+3)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

Вычислить с точностью ε=0,01 сумму ряда в точках $-3\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\left(x^2+3\right)\cos 2x$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\frac{x+2}{1-x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x+4)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}\cdot z^n}{2^{n+1}}$.

7. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{4+n^4x^2}$ равномерно сходится на промежутке $[0,\infty)$.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=y^2+\frac{x^2}{y}$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$. Найти четыре члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int_{0,2}^{0,7}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ с точностью ε=10^{-3}. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=4$ (рис.16),

б) функцию $f(x)=\cos x$, заданную на промежутке $[0;\pi]$, продолжая её чётным или нечётным образом на промежуток $[-\pi;\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

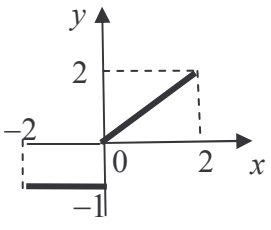

Рис.16

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $1-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{11^2}-\frac{1}{13^2}+\frac{1}{15^2}+\ldots$

Вариант 18

1. Пользуясь определением , найти сумму ряда $\frac{3}{2\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{3}{8\cdot 11}+\frac{3}{11\cdot 14}+\ldots$

Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5, 10, 100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{(1!)^2}{1!\,1}+\frac{(2!)^2}{3!\,2}+\frac{(3!)^2}{5!\,3}+\frac{(4!)^2}{7!\,4}+\ldots$, б) $\sin\alpha-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{3\sqrt{3}}+\frac{\sin\frac{\alpha}{3}}{5\sqrt{5}}-\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{7\sqrt{7}}+\ldots$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}-i\,\frac{1}{n^2}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{n-1}}{(3n^2+1)\,2^n}$.

Вычислить с точностью ε=0,01 сумму ряда в точках $4\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=xe^{-3x^2}$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\frac{x+3}{x^2+7x-8}$ в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i+1)^n}{\sqrt{5^n}\,(1-3i)^n}$.

7. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^4+x^2}$ можно почленно интегрировать.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=e^{2xy}+y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0$. Найти три члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int_1^3\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью ε=10^{-3}. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию (рис. 17) с периодом $T=4$,

б) функцию $f(x)=\begin{cases}\cos 2x, & 0\le x\le \pi/2,\\ -1, & \pi/2<x\le\pi,\end{cases}$ заданную на промежутке $[0;\pi]$, продолжая её нечётным образом на промежуток $[-\pi;\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

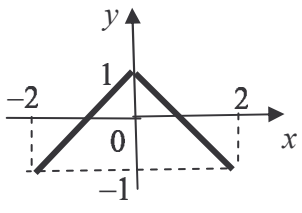

Рис. 17

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{n}$.

Вариант 19

1. Пользуясь определением , найти сумму ряда $\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 13}+\frac{4}{13\cdot 17}+\ldots$ Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,\,10,\,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$, б) $2-\frac{5}{8}+\frac{10}{27}-\frac{17}{64}+\ldots$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n^2}+i\,\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{n-1}}{3^n\sqrt{n}}$. Вычислить с точностью ε=0,01 сумму ряда в точках $5\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=x\ln(x+3)+x^2$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=(x-\pi)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ в ряд Тейлора по степеням $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(2+3i)^{n+1}}$.

7. Доказать, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\,x}{5+n^3x^2}$ непрерывна на всей числовой оси.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=x^2+x\,y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$. Найти четыре члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int_1^3 x^2\cos x^2\,dx$ с точностью ε=10^{-3}. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию (рис.18) с периодом $T=4$,

б) функцию $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2},\\ 1, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi,\end{cases}$, заданную на промежутке $[0;\pi]$, продолжая её чётным или нечётным образом на промежуток $[-\pi;\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

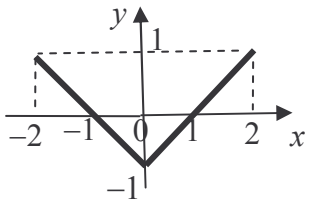

Рис.18

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Вариант 20

1. Пользуясь определением , найти сумму ряда $\frac{6}{4\cdot 7}+\frac{6}{7\cdot 10}+\frac{6}{10\cdot 13}+\frac{6}{13\cdot 16}+\ldots$ Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5, 10, 100$

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\ldots$, б) $\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}-\frac{\ln 5}{5}+\ldots$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{i}{2^n}\right]$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,(x-6)^{n-1}}{(n^3+1)\cdot 3^{n+1}}$. Вычислить с точностью ε=0,01 сумму ряда в точках $6\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=x\cdot\cos^2 x$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=x\cdot e^{-x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x+3)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n\sqrt{2^n}}{(1+2i)^{2n}}$.

7. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x+\sqrt{n}}$ равномерно сходится на луче $[0;\infty)$. Сколько членов ряда следует взять, чтобы его остаток для любого $x>0$ не превосходил 0,01?

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=x+y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$. Найти четыре члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int_{0,2}^{0,7}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=4$ (рис. 19),

б) функцию $f(x)=\sin x$, заданную на промежутке $[0;\pi]$, продолжая её чётным образом на промежуток $[-\pi,\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

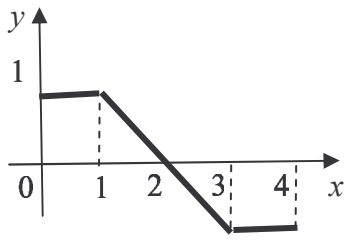

Рис. 19

12. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3n}{n}$.

Вариант 21

1. Пользуясь определением , найти сумму ряда $\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{3}{8\cdot 11}+\frac{3}{11\cdot 14}+\frac{3}{14\cdot 17}+\ldots$ Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,\,10,\,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{\cos\alpha}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2\alpha}{2\cdot 3}+\frac{\cos 3\alpha}{3\cdot 4}+\ldots$, б) $\frac{\ln 2}{2^2}-\frac{\ln 3}{3^2}+\frac{\ln 4}{4^2}-\frac{\ln 5}{5^2}+\ldots$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n\,(n+1)}+i\,\frac{2^n}{n!}\right]$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^{n-1}\cdot n\,\sqrt[3]{n+1}}$. Вычислить с точностью ε=0,01 сумму ряда в точках $-3\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=x^4\cdot e^x+x$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\frac{x^2+3x-4}{x+3}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^n\,\sqrt{3^n}}{n!}$.

7. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+x^{-n}}{n!}$ сходится равномерно при $x\in\left[\frac{1}{2},\,2\right]$.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y''=x+y^2$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,\ y'(0)=1$. Найти пять членов ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int_{1,6}^{2,2}x^6\,e^{-x}\,dx$ с точностью ε=10^{-3}. Для каждого случая указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=2$ (рис. 20),

б) функцию $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le \pi/2,\\ 0, & \pi/2<x\le\pi,\end{cases}$ заданную на промежутке $[0,\pi]$, продолжая её нечётным образом на промежуток $[-\pi,\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

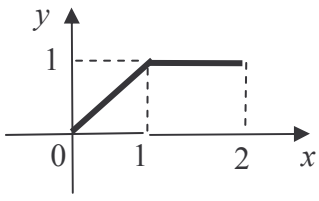

Рис. 20

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+3)^2}$.

Вариант 22

1. Пользуясь определением , найти сумму ряда $\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}+\frac{2}{9\cdot 11}+\ldots$ Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5, 10, 100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\ldots$, б) $\sin\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{4}+\frac{\sin 3\alpha}{9}+\frac{\sin 4\alpha}{16}+\ldots$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^3}{3^n}+i\frac{(-1)^n\ln(n+1)}{n+1}\right]$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n\sqrt{n+2}}{4^n\cdot n^2}$. Вычислить с точностью ε=0,01 сумму ряда в точках $1\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\left(x^3+x^2+2\right)\cdot\ln x$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i-2)^{2n}}{(1+2i)^n\sqrt{10^n}}$.

7. Показать, что функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(x-n)^2}$ обладает производной на отрезке [0;1].

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=e^{2xy}+1$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0$. Найти три члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int_{0,2}^{0,7}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=2$ (рис. 21),

б) функцию $f(x)=\sin ax$ (a – целое число), заданную на промежутке $[0,\pi]$, продолжая её чётным образом на промежуток $[-\pi,\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

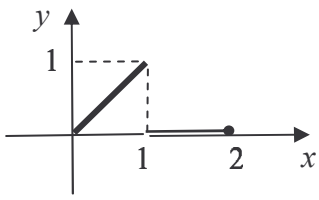

Рис. 21

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(6n+3)}{(2n+1)^2}$.

Вариант 23

1. Пользуясь определением , найти сумму ряда $\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{3\cdot 7}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{7\cdot 11}+\ldots$ Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5,\,10,\,100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\frac{9}{16\cdot 25}+\ldots$, б) $-1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4}}-\ldots$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{n}+\frac{i}{n^2}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\,(x+2)^n}{3^n\cdot n\,\sqrt{n+1}}$. Вычислить с точностью ε=0,01 сумму ряда в точках $-2\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=x\cdot\sin^2 x+x^3$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=\left(x^2-4x\right)\cdot e^x$ в ряд Тейлора по степеням $(x-2)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2+i)^n}{\sqrt{2^n}\cdot(2-3i)^n}$.

7. Доказать, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{4+n^4x^2}$ непрерывна в области определения.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y'=y^2+x^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$. Найти пять членов ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int_{0,2}^{0,7}\frac{\ln(1+x^2)}{x}\,dx$ с точностью ε=10^{-3}. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=4$ (рис. 22),

б) функцию $f(x)=\operatorname{sign}(\sin x)$, заданную на промежутке $[0,\pi]$, продолжая её чётным или нечётным образом на промежуток $[-\pi,\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

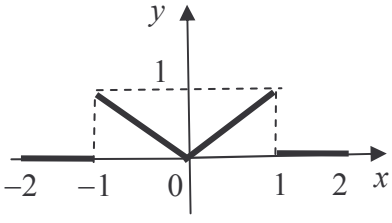

Рис. 22

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{\sin 3n}{n}$.

Вариант 24

1. Пользуясь определением , найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 8}+\frac{1}{3\cdot 10}+\frac{1}{4\cdot 12}+\frac{1}{5\cdot 14}+\ldots$ Вычислить частичные суммы S_n ряда для $n=5, 10, 100$.

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряды:

а) $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^2}+\frac{4!}{4^2}+\ldots$, б) $-\cos\pi+\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2^2}-\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{3^2}+\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{4^2}-\ldots$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{2^n}+i\frac{(-1)^n\ln n}{n}\right)$.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n\cdot n\sqrt{n}}$.

Вычислить с точностью ε=0,01 сумму ряда в точках $2\pm\frac{R}{5}$, где R – радиус сходимости ряда.

4. Разложить функцию $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ в ряд Маклорена. Определить область сходимости полученного ряда.

5. Разложить функцию $f(x)=x\cdot 2^{x-1}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ и найти область сходимости полученного ряда.

6. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2)^n\sqrt{2^n}}{n!}$.

7. Показать, что тета-функция $\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2 x}$ определена и дифференцируема при $x>0$.

8. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $(1-x)y'=1+x-y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0$. Найти четыре члена ряда.

9. Используя ряды, вычислить приближенное значение интеграла $\int_{0,2}^{0,6}\frac{dx}{1+x^4}$ с точностью ε=10^{-3}. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

10. Разложить в ряд Фурье:

а) периодическую функцию с периодом $T=6$ (рис. 23),

б) функцию $f(x)=\begin{cases} x(\pi-x), & 0\le x<\pi,\\ 0, & \pi\le x\le 2\pi,\end{cases}$ заданную на промежутке от $[0, 2\pi]$, продолжая её чётным или нечётным образом на промежуток $[-2\pi, 2\pi]$. Построить график суммы полученного ряда.

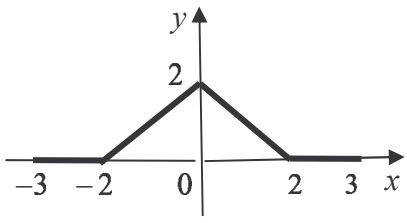

Рис. 23

11. Пользуясь табличными разложениями функций в ряд Фурье, найти сумму числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(6n+3)}{2n+1}$.

3. Некоторые разложения в ряд Фурье

Ниже приведены разложения в ряд Фурье некоторых простейших функций, заданных на определенных интервалах.

1. $x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right), \quad -\pi < x < \pi.$

2. $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 7x}{7^2} + \ldots\right), \quad -\pi \le x \le \pi.$

3. $x = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right), \quad 0 \le x \le 2\pi.$

4. $f(x) = \begin{cases} -a, & -\pi < x < 0, \\ a, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad f(x) = \frac{4a}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right).$

5. $x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right), \quad -\pi \le x \le \pi.$

6. $f(x) = x(\pi - x)$ при $0 \le x \le \pi$ и нечетно продолжена на $(-\pi, 0)$;

   $f(x) = \frac{8}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right).$

7. $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \ldots\right), \quad -\pi \le x \le \pi.$

8. $x \cdot \sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\left(\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} - \frac{\cos 3x}{3^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} - \ldots\right), \quad -\pi \le x \le \pi.$

9. $x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin x + \frac{4\sin 2x}{2^2 - 1} - \frac{6\sin 3x}{3^2 - 1} + \frac{8\sin 4x}{4^2 - 1} - \ldots, \quad -\pi < x < \pi.$

10. $\operatorname{sh} ux = \frac{2\operatorname{sh} u\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2 + u^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2 + u^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2 + u^2} - \ldots\right), \quad -\pi < x < \pi.$

Оглавление

1. Индивидуальные задания по дифференциальным уравнениям.....3
2. Индивидуальные задания по рядам.....15
3. Некоторые разложения в ряд Фурье.....39

Дифференциальные уравнения и ряды

Сборник типовых заданий

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Компьютерная верстка *Р.М. Миньковой, А.В.Зенкова*

ИД № 06263 от 12.11. 2001 г.

Подписано в печать Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Плоская печать Усл. печ.л. 2,38
Уч.-изд. л. 1,4 Тираж Заказ Цена "С"

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19
Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ

620002, Екатеринбург, Мира, 19