Е.А. Голикова, А.В. Зенков, А.С. Соболева

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, РЯДЫ, НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

Е.А. Голикова, А.В. Зенков, А.С. Соболева

Дифференциальные уравнения, ряды, несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра

Учебное пособие
для физических специальностей
физико-технического факультета

Под общей редакцией
доц., канд. физ.-мат. наук Р.М. Миньковой

Екатеринбург
УрФУ
2010

УДК 517.9 (075.8)
ББК 22.161.6я73
Г 56

Р е ц е н з е н т ы:
отдел алгебры и топологии ИММ УрО РАН (зав. отделом чл.-кор. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф. А.А. Махнев);
канд. физ.-мат. наук, доц. Ю.Б. Мельников.

Голикова Е.А., Зенков А.В., Соболева А.С.
Г 56 Дифференциальные уравнения, ряды, несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра : учебное пособие / Е.А. Голикова, А.В. Зенков, А.С. Соболева. Екатеринбург: УрФУ, 2010. 130 с.

ISBN 978-5-321-01802-6

Учебное пособие подготовлено на основе расширенного курса лекций и практических занятий по дисциплине "Числовые и функциональные ряды, ряды Фурье, дифференциальные уравнения несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра"для студентов физических специальностей физико-технического факультета УрФУ первого курса. В каждом разделе пособия приведены формулировки необходимых определений и теорем, а также подробно разобраны основные типы задач. Параграфы заканчиваются подборкой задач (с ответами) для самостоятельного решения. Пособие может быть использовано как руководство к решению задач.

Издание подготовлено при поддержке физико-технического факультета УрФУ.

Библиогр.: 28 назв. Рис. 9.

УДК 517.9 (075.8)
ББК 22.161.6я73

ISBN 978-5-321-01802-6

© УрФУ, 2010
©Е.А. Голикова, А.В.Зенков, А.С.Соболева

Предисловие

Данное учебное пособие продолжает серию методических изданий по математическим курсам, читаемым на физико-техническом факультете УрФУ-УПИ. Для каждого семестра и по каждому предмету подготовлены (или готовятся к изданию) пособие по теоретическому курсу (полное изложение лекционного материала с доказательствами) и, в пару к нему, руководство к решению задач. Кроме того, специальности на факультете делятся на технологические и физические, а учебные программы для разного типа специальностей различны. Поэтому по каждому математическому курсу издаются пособия отдельно для технологов и физиков.

Наша работа дополняет учебные пособия А.В.Зенкова ([26],[27]) для физических специальностей по лекционному курсу, который читается во втором семестре первого года обучения. Этот курс является одним из самых объемных по охвату материала и по учебным часам. К тому же значительная часть задач носит теоретический, а не алгоритмический характер (например, по темам равномерная сходимость функциональных рядов, интегралы, зависящие от параметра, и др.). Поэтому наше пособие, являясь руководством к решению задач, содержит формулировки основных определений и теорем курса. Основная часть издания посвящена подробному разбору задач, причем для решения некоторых из них требуется определенная математическая культура.

В помощь студентам в освоении данного материала можно также порекомендовать более подробное, в теоретическом плане, пособие [28]: Махнев А.А., Мельникова Н.В., Мельников Ю.Б. "Определенные и несобственные интегралы. Интегралы, зависящие от параметра."

Глава 1

Дифференциальные уравнения

1.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ДУ) — это уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и ее производные или дифференциалы:

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x),\, y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0. \tag{1.1}$$

Порядок n старшей производной, входящей в ДУ (1.1), называется *порядком* ДУ.

Решение уравнения (1.1) на интервале (a, b) есть функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество на (a, b)

$$F\left(x,\, \varphi(x),\, \varphi'(x),\, \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) \equiv 0.$$

График решения ДУ называется *интегральной кривой.*

Иногда ДУ (1.1) можно привести к виду

$$y^{(n)} = f\left(x,\, y,\, y',\, y'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{1.2}$$

разрешенному относительно старшей производной. *Задача Коши* для ДУ (1.2) состоит в нахождении для данного уравнения такого решения, которое удовлетворило бы следующим *начальным условиям* (НУ):

$$\left\{\begin{array}{rcl} y(x_0) & = & y_0\,, \\ y'(x_0) & = & y_{1\,0}\,, \\ y''(x_0) & = & y_{2\,0}\,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1\;0}\,. \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Здесь x_0 — заданное фиксированное значение аргумента, $y_0, y_{1\,0}, \ldots, y_{n-1\;0}$ — заданные n чисел.

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $x \in (a, b)$, называется *общим решением* ДУ (1.2) на (a, b), если

1) для каждого набора констант $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ является решением ДУ, т.е. для всякого x из (a, b) верно тождество $\varphi^{(n)} \equiv f\left(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n-1)}\right)$;

2) при любых начальных условиях (1.3), $x_0 \in (a, b)$, существует единственный набор значений $\{C_1^{\text{o}}, C_2^{\text{o}}, \ldots, C_n^{\text{o}}\}$, при котором функция $y = \varphi(x, C_1^{\text{o}}, C_2^{\text{o}}, \ldots, C_n^{\text{o}})$ является решением уравнения (1.2), удовлетворяющим НУ (1.3).

Всякое решение ДУ, получающееся из его общего решения при конкретных числовых значениях констант $C_i = C_i^{\text{o}}$, $i = \overline{1,n}$, называется *частным* решением ДУ.

Не всегда удается выразить искомое решение в явном виде $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Конечное [1] уравнение $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, определяющее решение $y(x)$ дифференциального уравнения как неявную функцию, называется *общим интегралом* ДУ. При конкретных числовых значениях констант $C_i = C_i^{\text{o}}$, $i = \overline{1,n}$, из общего интеграла получается *частный* интеграл ДУ.

Пример. Проверить, что функция $y = Ce^x$ является общим решением уравнения $y' - y = 0$ и найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = -1$.

Решение. Поскольку $y = Ce^x$, $y' = Ce^x$, то, подставляя y и y' в данное уравнение, получим $Ce^x - Ce^x = 0$ — тождество, верное для любого C. Таким образом, выполнен первый пункт определения общего решения (см. с.5): для любого C функция $y = Ce^x$ является решением. Проверим второй пункт определения, связанный с задачей Коши. Для этого зададим произвольное начальное условие $y(x_0) = y_0$. Подставим x_0 вместо x, а y_0 вместо y в выражение $y = Ce^x$. Получим уравнение относительно C : $y_0 = Ce^{x_0}$, имеющее единственное решение $C = y_0 e^{-x_0}$. Но тогда функция $y = y_0 e^{x-x_0}$ удовлетворяет заданному начальному условию и определена однозначно. Таким образом, оба пункта определения общего решения выполняются.

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = -1$, достаточно вместо x_0 подставить 1, а вместо y_0 подставить -1: $y = (-1)e^{x-1}$. Итак, искомое частное решение: $y = -e^{x-1}$.

Для $n = 1$ получим ДУ первого порядка $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ в общем виде. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ — ДУ первого порядка, разрешенное относительно производной

[1] Т.е. не дифференциальное.

искомой функции. Задача Коши для него имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,\, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

На геометрическом языке задача Коши заключается в поиске той интегральной кривой дифференциального уравнения, которая проходит через начальную точку $(x_0\,,\, y_0)$.

★[2] Для решения ДУ первого порядка нужно правильно классифицировать уравнение. Для этого можно использовать таблицу простейших типов уравнений первого порядка из приложения (см. с.125). В следующих разделах мы классифицируем и решаем уравнения каждого типа.

1.1.1. *Уравнения с разделяющимися переменными*

В разделе рассматриваются уравнения, которые могут быть записаны в виде

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\, g(y) \quad \text{или} \tag{1.5}$$

$$P(x)\, Q(y)\, \mathrm{d}x + R(x)\, S(y)\, \mathrm{d}y = 0. \tag{1.6}$$

Предполагаем, что функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны. Если $g(y) = 0$ при $y = y_1$, $y = y_2, \ldots$, то функции $y(x) \equiv y_1\,,\; y(x) \equiv y_2\,, \ldots$ являются, как легко видеть, решениями ДУ (1.5).

Если $g(y) \neq 0$, то, умножив обе части уравнения (1.5) на дробь $\frac{\mathrm{d}x}{g(y)}$, получим $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$. Тем самым переменные в уравнении разделились (откуда и название этого типа уравнений), и осталось только проинтегрировать по x обе части полученного уравнения

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C, \tag{1.7}$$

где C — произвольная константа.

Аналогично разделяются переменные в уравнении (1.6).

П р и м е р 1. Найти общий интеграл ДУ

$$\frac{dx}{\cos^2 x \cdot \cos y} = -\operatorname{ctg} x \cdot \sin y\, dy\,.$$

Р е ш е н и е . Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, записанное в симметричной форме (1.6). Для разделения переменных умножим правую и левую части уравнения на $\dfrac{\cos y}{\operatorname{ctg} x}$:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\, dx = -\cos y \cdot \sin y\, dy\,.$$

[2]Звездочкой будем помечать замечания по алгоритмам решения задач.

Интегрируя, получим

$$\int \operatorname{tg} x d \operatorname{tg} x = -\int \sin y \, d \sin y \quad \Rightarrow \ \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x = -\frac{1}{2} \sin^2 y + C \ .$$

В итоге запишем решение в виде общего интеграла

$$\operatorname{tg}^2 x + \sin^2 y = C \ .$$

П р и м е р 2. Найти частный интеграл ДУ $s = s' \cos^2 t \ln s$, удовлетворяющий НУ $s(\pi) = 1$.

Р е ш е н и е . Поскольку уравнение записано в виде (1.5), то оно с разделяющимися переменными. Для разделения переменных умножим уравнение на $\dfrac{dt}{s \cos^2 t}$

$$\frac{1}{\cos^2 t} \, dt = \frac{\ln s}{s} \, ds \ .$$

Интегрируя, получим

$$\int d \operatorname{tg} t = \int \ln s \ d \ln s \ \Rightarrow \operatorname{tg} t = \frac{1}{2} \ln^2 s + C.$$

Подставим начальные значения $t = \pi, \quad s = 1$ в найденный общий интеграл и определим значение C:

$$\operatorname{tg} \pi = \frac{1}{2} \ln^2 1 + C, \ \Rightarrow \ C = 0 \ .$$

Следовательно, искомый частный интеграл $2 \operatorname{tg} t = \ln^2 s$.

П р и м е р 3. Известно, что скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству x еще не распавшегося вещества. Найти зависимость x от времени t, если в начальный момент времени $t = t_0$ имелось $x = x_0$ вещества.

Р е ш е н и е . Пусть в момент времени t количество вещества есть x, в момент времени $t + \Delta t$ количество составляет $x - \Delta x$. За время Δt распадается количество вещества Δx. Отношение $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ — средняя скорость распада за время Δt, а

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

есть мгновенная скорость распада в момент времени t. Тогда ДУ процесса: $\dfrac{dx}{dt} = -kx$, где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности (постоянная распада), знак «$-$ » указывает на уменьшение x при возрастании t. Разделяя переменные в ДУ и интегрируя, получаем

$$\frac{dx}{x} = -k dt \ \Rightarrow \ \ln |x| = -kt + \ln |C| \ \Rightarrow \ x = Ce^{-kt}.$$

Учитывая начальное условие $x(t_0) = x_0$, находим, что $C = x_0 e^{kt_0}$, поэтому

$$x(t) = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Пример 4. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = (x+y)^2 \ .$$

Решение. Здесь переменные не разделяются, но заменой можно свести данное уравнение к уравнению с разделением переменных. Положим $z(x) = x + y$, тогда

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}.$$

Подставляя в уравнение, получим

$$\frac{dz}{dx} = 1 + z^2.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dz}{1+z^2} = dx \ \Rightarrow \ \operatorname{arctg} z = x + C \ \Rightarrow \ z = \operatorname{tg}(x+C).$$

Подставляя вместо z величину $x+y$, получаем общее решение данного уравнения

$$y = \operatorname{tg}(x+C) - x.$$

1.1.2. *Однородные уравнения*

Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией n-го измерения относительно переменных x и y, если при любом допустимом t справедливо тождество

$$f(tx, ty) \equiv t^n f(x,y).$$

Дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ называется однородным относительно x и y, если функция $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно переменных x и y, т.е. $(tx, ty) = f(x,y)$. Такое уравнение всегда можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородные уравнения сводятся к уравнениям с разделением переменных подстановкой $z(x) = \frac{y}{x}$ или $y = z \cdot x$, откуда $y' = z'x + z$.

П р и м е р 1 . Решить ДУ

$$2xydx + \left(x^2 + 3y^2\right) dy = 0 \ .$$

Р е ш е н и е . Для определения типа ДУ разрешим уравнение относительно y' :

$$y' = -\frac{2xy}{x^2 + 3y^2} = f(x, y).$$

Для правой части выполнено условие $f(x, y) = f(tx, ty)$, следовательно, уравнение однородное. Чтобы удобнее было проводить замену, поделим числитель и знаменатель правой части $f(x, y)$ на старшую степень x, т.е. на x^2:

$$y' = -\frac{2\frac{y}{x}}{1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Сделаем замену $\frac{y}{x} = z\,(x)$. Получим $y = xz$ и $y' = z'x + z$. После подстановки в уравнение получим ДУ с разделяющимися переменными

$$z + xz' = -\frac{2z}{1 + 3z^2} \ \Rightarrow \ x\frac{dz}{dx} = -\frac{3\left(z + z^3\right)}{1 + 3z^2}.$$

Разделяя переменные при $z \neq 0$, получим:

$$\frac{\left(1 + 3z^2\right) dz}{(z + z^3)} = -\frac{3dx}{x} \ \Rightarrow \ \int \frac{d(z + z^3)}{z + z^3} = \int -3d \ln |x| \, .$$

Откуда

$$\ln \left|z + z^3\right| = \ln \frac{1}{|x|^3} + \ln |C| \ \Rightarrow \ z + z^3 = \frac{C}{x^3}.$$

При этом модули имеем право убрать, так как C любого знака. Кроме того, решение $z = 0$, потерянное при разделении переменных, входит в общее решение для $C = 0$. После обратной замены получим

$$x^3 \left(\frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3}\right) = C.$$

Таким образом, общий интеграл ДУ: $x^2y + y^3 = C$.

П р и м е р 2 . Найти форму зеркала, собирающего пучок параллельно падающих на него лучей в одну точку.

Р е ш е н и е . Прежде всего зеркало должно иметь форму поверхности вращения, так как только для поверхности вращения все нормали к поверхности проходят через ось вращения.

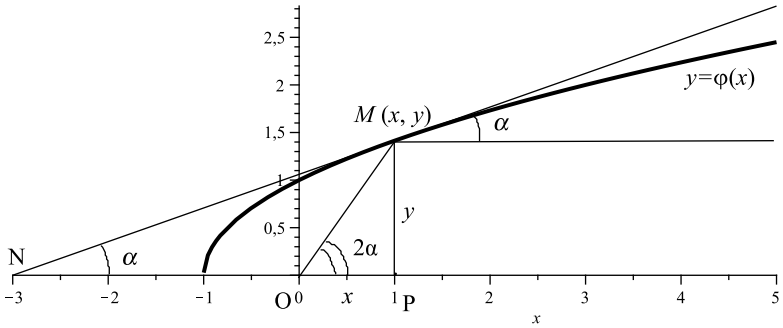

Рис. 1.1. Параболическое зеркало

Выберем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы лучи были параллельны оси $0x$ и чтобы точкой, в которой собирались бы отраженные лучи, явилось начало координат. Найдем форму сечения зеркала плоскостью $x0y$. Пусть уравнение сечения есть $y = \varphi(x)$ (см. рис. 1.1).

В точке $M(x, y)$ падения луча L на зеркало проведем касательную BN к сечению и обозначим ее угол с осью $0x$ через α. Пусть N – точка пересечения этой касательной с осью $0x$. По закону отражения $\angle NMO = \angle BML = \alpha$. Поэтому развернутый угол $\angle NMB$ есть сумма $2\alpha + \angle OMP + \frac{\pi}{2} = \pi$. Сравнивая с углами треугольника OMP, получим $\angle MOP = 2\alpha$. Так как

$$\operatorname{tg}\alpha = y', \quad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{y}{x} \quad \text{и} \quad tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha},$$

то во всякой точке кривой $y = \varphi(x)$ выполняется соотношение

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - y'^2}.$$

Мы получили ДУ, определяющее требуемый ход луча. Понятно, что относительно y' полученное уравнение является квадратным с коэффициентами, зависящими от дроби $\frac{y}{x}$. Разрешая это уравнение относительно производной, получаем два однородных (поскольку правая часть есть функция от дроби $\frac{y}{x}$) дифференциальных уравнения:

$$y' = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}}{\frac{y}{x}}.$$

Уравнения решаем заменой $\frac{y}{x} = u$:

$$u + xu' = \frac{-1 \pm \sqrt{1+u^2}}{u} \quad \text{или} \quad \frac{udu}{1+u^2 \mp \sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, найдем

$$-\ln|x| + \ln|C| = \int \frac{d\left(\sqrt{1+u^2} \mp 1\right)}{\sqrt{1+u^2} \mp 1} \;\Rightarrow\; \ln\left|Cx^{-1}\right| = \ln\left(\sqrt{1+u^2} \mp 1\right).$$

Потенцируя последнее соотношение и заменяя u через $\frac{y}{x}$, после несложных преобразований имеем $y^2 = \pm 2Cx + C^2$. Полученное семейство кривых можно описать с помощью совокупности двух равенств

$$\left[\begin{array}{ll} y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right), & C > 0, \\ y^2 = 2C\left(-x + \frac{C}{2}\right), & C > 0. \end{array}\right.$$

Полученные уравнения в плоскости $x0y$ определяют семейства парабол, симметричных относительно оси $0x$. Фокусы всех этих парабол совпадают с началом координат, но ветви одного из семейств направлены вправо, а второго – влево вдоль оси $0x$. Фиксируя C и вращая параболы вокруг оси $0x$, получаем параболоиды вращения

$$\left[\begin{array}{ll} y^2 + z^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right), & C > 0, \\ y^2 + z^2 = 2C\left(-x + \frac{C}{2}\right), & C > 0. \end{array}\right.$$

Таким образом, зеркало в виде параболоида вращения решает поставленную задачу.

П р и м е р 3 . Решить ДУ$\left(y^4 - 2x^3y\right)dx + \left(x^4 - 2xy^3\right)dy = 0$.

Р е ш е н и е . Чтобы классифицировать уравнение, разрешим его относительно производной

$$y' = -\frac{y^4 - 2x^3y}{x^4 - 2xy^3} \;\text{ при условии }\; x^4 - 2xy^3 \neq 0\ .$$

В данном случае

$$f(x,y) = -\frac{y^4 - 2x^3y}{x^4 - 2xy^3},$$

тогда

$$f(tx,ty) = -\frac{t^4y^4 - 2t^3x^3ty}{t^4x^4 - 2txt^3y^3} = -\frac{y^4 - 2x^3y}{x^4 - 2xy^3} = f(x,y).$$

Таким образом, данное уравнение – однородное. Конечно, можно поступить другим способом: заметить, что при делении числителя и знаменателя на стар-

шую степень x (т.е. на $x^4 \neq 0$) получим функцию от $\frac{y}{x}$:

$$f(x,y) = -\frac{(\frac{y}{x})^4 - 2\frac{y}{x}}{1 - 2(\frac{y}{x})^3}.$$

Используем подстановку $y = ux$, тогда $y' = u + xu'$. После замены уравнение принимает вид

$$xu' + u = -\frac{u^4 - 2u}{1 - 2u^3}.$$

Разделяем переменные при условиях $x \neq 0, \quad u\left(u^3+1\right) \neq 0$ и интегрируем (используя разложение дробей в сумму простейших)

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-2u^3}{u^4+u}du \;\Rightarrow\; \int \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{3u^2}{u^3+1}\right) du \;\Rightarrow\; \ln|x| = \ln\left|\frac{u}{u^3+1}\right| + \ln|C|.$$

Откуда находим общий интеграл

$$x\left(u^3+1\right) = Cu.$$

Подставляя в полученное выражение $u = \frac{y}{x}$, приходим к общему интегралу исходного уравнения:

$$x^3 + y^3 = Cx^2y.$$

При решении уравнения мы полагали, что

$$x \neq 0, \;\; u \neq 0, \;\; u^3 + 1 \neq 0 \;, x^4 - 2xy^3 \neq 0.$$

Таким образом, возможные потерянные решения:

$$x = 0\,,\; y = 0, \;\; y = -x, \;\; y = 2^{-\frac{1}{3}}x\;.$$

Можно показать, что эти решения содержатся в общем интеграле. Так, если $C = 0$, то получим $y = -x$, если $C = 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}}$, получим $y = 2^{-\frac{1}{3}}x$. Если же $C = \infty$ (рассматривать значение параметра, равное бесконечности, возможно, так как введение нового параметра, например $C_1 = C^{-1}$, сводит этот случай к конечному $C_1 = 0$), то $x^2y = 0$, следовательно, либо $x = 0$, либо $y = 0$.

1.1.3. *Уравнения, сводящиеся к однородным*

Уравнение[3]

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

[3]Мелким шрифтом набраны разделы, изучаемые в расширенном курсе.

где a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2$ — константы и хотя бы одно из чисел c_i отлично от нуля, сводится к однородному (или к ДУ с разделяющимися переменными) простой линейной заменой. Определяется она двумя способами.

I. Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то замена $\begin{cases} x &= u + \alpha \\ y &= v + \beta \end{cases}$ приводит ДУ к однородному относительно переменных u и v, если $\begin{cases} x &= \alpha \\ y &= \beta \end{cases}$ — решение системы $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \end{cases}$.

II. Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то замена $a_1 x + b_1 y = z(x)$ приводит к ДУ с разделяющимися переменными.

Пример 1. Решить ДУ

$$(2x + y + 3)\, dx - (x + y - 4)\, dy = 0$$

Решение. Выразим производную в предположении, что $x + y - 4 \neq 0$:

$$y' = \frac{2x + y + 3}{x + y - 4} \ .$$

Если же $x + y - 4 = 0$, то потери решения все равно не происходит, так как $y = 4 - x$ не удовлетворяет первоначальному ДУ. Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ .$$

Приведем данное уравнение к однородному подстановкой

$$x = u + \alpha, \ \ y = v + \beta \ .$$

Тогда уравнение преобразуется к виду

$$\frac{dv}{du} = \frac{2x + y + (2\alpha + \beta + 3)}{x + y + (\alpha + \beta - 4)} \ .$$

Постоянные α и β выберем так, чтобы выполнялись равенства

$$2\alpha + \beta + 3 = 0, \ \ \alpha + \beta - 4 = 0 \ .$$

Решая эту систему, находим значения $\alpha = -7$ и $\beta = 11$. Делаем замену $x = u - 7, \ \ y = v + 11,$ тогда исходное уравнение преобразуем в однородное

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u + v}{u + v} \text{ или } \frac{dv}{du} = \frac{2 + \frac{v}{u}}{1 + \frac{v}{u}}.$$

После замены $w = \frac{v}{u}$ получим ДУ с разделяющимися переменными

$$w + u\frac{dw}{du} = \frac{2 + w}{1 + w} \ \Rightarrow \ u\frac{dw}{du} = \frac{2 - w^2}{1 + w}.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{du}{u} = \frac{1 + w}{2 - w^2} dw \ \Rightarrow \ \ln|u| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{w + \sqrt{2}}{w - \sqrt{2}}\right| - \frac{1}{2} \ln\left|2 - w^2\right| + \ln|C|.$$

Подставим в полученный общий интеграл выражение

$$w = \frac{v}{u} = \frac{y - 11}{x + 7}$$

и найдем общий интеграл исходного уравнения

$$\ln|x+7| = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{y-11+\sqrt{2}(x+7)}{y-11-\sqrt{2}(x+7)}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|2(x+7)^2-(y-11)^2\right| + \ln|C|.$$

Пример 2. Решить ДУ

$$(x+y+1)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$y' = \frac{x+y+1}{-2x-2y+1} \text{ или } y' = \frac{x+y+1}{-2\,(x+y)+1}$$

при условии, что $x+y \neq \frac{1}{2}$ (потери решений не происходит). Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Сделав замену $z(x) = x + y(x)$ и учитывая, что $y'_x = z'_x - 1$, получим уравнение

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \frac{z+1}{-2z+1} \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = \frac{-z+2}{-2z+1}.$$

Разделяем переменные, тогда

$$\frac{-2z+1}{-z+2}dz = dx \;\Rightarrow\; x + C = 2z + 3\ln|z-2|\,.$$

Подставляем $z = x+y$ и получаем: $x+2y+3\ln|x+y-2| = C$ — общий интеграл исходного уравнения.

1.1.4. *Линейные уравнения и уравнения Бернулли*

Линейным называется уравнение, в которое искомая функция y и ее производная y' входят линейно. Его общий вид

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{1.8}$$

Уравнение Бернулли имеет вид

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1). \tag{1.9}$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ это уравнение линейно.

Уравнения обоих типов можно решить одним методом — подстановкой Бернулли: $y = uv$, где $u(x)$ и $v(x)$ — две неизвестные функции. После замены, уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x)(uv)^{\alpha}. \end{cases}$$

П р и м е р 1. Найти общее решение уравнения

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Р е ш е н и е . Будем искать решение $y(x)$ данного линейного уравнения в виде

$$y\left(x\right) = u\left(x\right)v\left(x\right).$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}$$

или

$$u'v + \left(v' + 2xv\right)u = xe^{-x^2}. \tag{1.10}$$

Определим функцию $v\left(x\right)$ как решение уравнения $v' + 2xv = 0$. Разделяя переменные, найдем

$$\frac{dv}{v} = -2xdx \;\Rightarrow\; \ln|v| = -x^2 + \ln|C| \;\Rightarrow\; v = Ce^{-x^2}\;.$$

Выберем любое частное решение, например, отвечающее $C = 1$. Тогда, подставляя $v = e^{-x^2}$ в уравнение (1.10), получим

$$e^{-x^2}u' = xe^{-x^2}.$$

Откуда $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2} + C$. Общее решение исходного уравнения

$$y\left(x\right) = u\left(x\right)v\left(x\right) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}.$$

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$\left(1 - 2xy\right)y' = y\left(y - 1\right).$$

Р е ш е н и е . Разделим данное уравнение на $\frac{dy}{dx}$, тогда получим новое уравнение относительно $x(y)$:

$$y\left(y - 1\right)\frac{dx}{dy} = 1 - 2xy$$

или, в предположении, что $y \neq 0,\; y \neq 1$,

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2}{(y-1)}x = \frac{1}{y\left(y-1\right)} \quad -$$

линейное ДУ первого порядка относительно $x(y)$. Заметим здесь, что $y = 0$ и $y = 1$ — решения первоначального ДУ. Делаем подстановку:

$$x\left(y\right) = u\left(y\right)v\left(y\right) \;\Rightarrow\; x'_y = u'_y v + uv'_y.$$

Уравнение преобретает вид

$$u'_y v + u v'_y + \frac{2}{(y-1)} uv = \frac{1}{y\,(y-1)}.$$

Вынесем u за скобки, тогда

$$u'_y v + u\left(v'_y + \frac{2}{y-1} v\right) = \frac{1}{y\,(y-1)}. \tag{1.11}$$

Находим $v\,(y)$ как решение уравнения $v'_y + \frac{2}{y-1} v = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2}{y-1} dy, \quad \ln|v| = -2\ln|y-1| + \ln|C|.$$

Потенцируя полученное выражение, будем иметь

$$v = \frac{C}{(y-1)^2}.$$

Выбираем $C = 1$, подставляем $v = \frac{1}{(y-1)^2}$ в уравнение (1.11). Отсюда

$$\frac{u'_y}{(y-1)^2} = \frac{1}{y\,(y-1)}.$$

Разделяем переменные и интегрируем: $du = \frac{y-1}{y} dy$, $u = y - \ln|y| + C$. Таким образом, общий интеграл исходного уравнения будет иметь вид (с учетом потерянных решений):

$$x = uv = \frac{y - \ln|y| + C}{(y-1)^2} \quad , \; y = 0, \quad y = 1 \; .$$

П р и м е р 3. Найти решение уравнения Бернулли

$$y' - y\,\mathrm{tg}\,x = -y^2 \cos x.$$

Р е ш е н и е . Подставляя

$$y\,(x) = u\,(x)\,v\,(x)$$

в исходное уравнение, получим

$$u'v + uv' - uv\,\mathrm{tg}\,x = -u^2 v^2 \cos x, \quad u'v + (v' - v\,\mathrm{tg}\,x)\,u = -u^2 v^2 \cos x.$$

Выберем в качестве $v\,(x)$ какое-нибудь ненулевое решение уравнения

$$v' - v\,\mathrm{tg}\,x = 0.$$

Запишем ДУ в виде

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x} v.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\frac{dv}{v} = \frac{\sin x}{\cos x} dx \;\Rightarrow\; \ln|v| = -\ln|\cos x| + \ln|C| \;\Rightarrow\; v = \frac{C}{\cos x}.$$

Поскольку нас интересует любое частное решение, положим $C = 1$, т.е. возьмем $v = \frac{1}{\cos x}$. Тогда для $u\,(x)$

$$u'v = -u^2 v^2 \cos x, \quad \frac{u'}{\cos x} = -u^2 \frac{\cos x}{\cos^2 x}.$$

Получим уравнение $u' = -u^2$. Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{du}{u^2} = -dx \;\Rightarrow\; \frac{1}{u} = x + C \;\Rightarrow\; u\,(x) = \frac{1}{x + C}.$$

Общее решение исходного уравнения определится формулой

$$y\,(x) = uv = \frac{1}{(x + C)\cos x}.$$

1.1.5. *Уравнения в полных дифференциалах и сводящиеся к ним*

ДУ, которое можно записать в виде

$$M(x,\, y)\,\mathrm{d}x + N(x,\, y)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{1.12}$$

причем функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial M(x,\, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,\, y)}{\partial x}, \tag{1.13}$$

называется ДУ в полных дифференциалах. При выполнении условия (1.13) найдется функция $F(x, y)$, для которой левая часть равенства (1.12) есть полный дифференциал dF. Но тогда ДУ в полных дифференциалах эквивалентно системе условий

$$\begin{cases} dF = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y). \end{cases} \tag{1.14}$$

★ Для решения ДУ в полных дифференциалах нужно восстановить функцию $F(x, y)$ по ее первым производным (см. (1.14)) и записать общий интеграл

$F(x,y)=C$, где $C=const$. Восстановление функции $F(x,y)$ начнем с интегрирования по x второго из равенств (1.14): $\dfrac{\partial F}{\partial x}=M(x,\,y)$, следовательно,

$$F(x,\,y)=\int M(x,\,y)\mathrm{d}x+\varphi(y). \tag{1.15}$$

Поясним, что при вычислении интеграла $\int M(x,\,y)\mathrm{d}x$ величина y рассматривается как постоянная, поэтому к интегралу прибавляется не константа, а произвольная функция $\varphi(y)$ не зависящая от переменной интегрирования . Чтобы найти функцию $\varphi(y)$, подставим $F(x,y)$ из (1.15) в уравнение $\dfrac{\partial F}{\partial y}=N(x,\,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,\,y)\mathrm{d}x\right)+\varphi'(y)=N(x,\,y).$$

Из этого уравнения определяем $\varphi'(y)$ и, интегрируя, находим $\varphi(y)$.

П р и м е р 1 . Проверить, что уравнение

$$e^{-y}dx-\left(2y+xe^{-y}\right)dy=0$$

является уравнением в полных дифференциалах и проинтегрировать его.

Р е ш е н и е . В данном случае

$$M=e^{-y},\;\; N=-\left(2y+xe^{-y}\right);\;\; \frac{\partial M}{\partial y}=-e^{-y},\;\; \frac{\partial N}{\partial x}=-e^{-y}.$$

Видим, что

$$\frac{\partial M}{\partial y}\equiv\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Следовательно, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Теперь находим F. Поскольку

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)=e^{-y} \\ \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)=-\left(2y+xe^{-y}\right), \end{cases} \tag{1.16}$$

то функцию $F\left(x,\,y\right)$ сначала ищем, интегруя первое из равенств (1.16):

$$F=\int M\left(x,y\right)dx=\int e^{-y}dx,\;\; F(x,y)=xe^{-y}+\varphi\left(y\right)\;\;,$$

$\varphi\left(y\right)$ — константа интегрирования, которая не зависит от переменной интегрирования x, но может зависеть от y. Затем находим функцию $\varphi\left(y\right)$. Для этого $F(x,y)=xe^{-y}+\varphi\left(y\right)$ подставим во второе из равенств (1.16), то есть продифференцируем по y и приравняем к $N=-2y-xe^{-y}$:

$$-xe^{-y}+\varphi'\left(y\right)=-2y-xe^{-y}.$$

Получили ДУ для нахождения $\varphi(y)$: $\varphi'(y) = -2y$. Откуда

$$\varphi(y) = -y^2 + C_1, \quad C_1 = const.$$

Подставив $\varphi(y)$ в выражение для $F(x, y)$, найдем

$$F(x, y) = xe^{-y} - y^2 + C_1.$$

Таким образом, $xe^{-y} - y^2 + C_1 = C_2$ или $xe^{-y} - y^2 = C$ – общий интеграл исходного уравнения.

П р и м е р 2. Найти общий интеграл уравнения

$$2x\cos^2 y dx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right) dy = 0 \ .$$

Р е ш е н и е . В данном случае

$$M = 2x\cos^2 y, \quad N = 2y - x^2 \sin 2y \ ; \ \frac{\partial M}{\partial y} = -2x \sin 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x \sin 2y \ .$$

Очевидно, что $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$. Следовательно, данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Теперь из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x\cos^2 y \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - x^2 \sin 2y \end{cases}$$

постепенно восстанавливаем $F(x, y)$. Для этого интегрируем первое равенство по x:

$$F = \int 2x\cos^2 y dx \ , \quad F(x, y) = x^2 \cos^2 y + \varphi(y) \, .$$

Подставляя $F(x, y)$ во второе равенство, получаем

$$-x^2 \sin 2y + \varphi'(y) = 2y - x^2 \sin 2y, \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = 2y$$

и, следовательно, $\varphi(y) = y^2 + C$, $C = const$. Подставив найденное выражение для $\varphi(y)$ в выражение для $F(x, y)$, найдем

$$F(x, y) = x^2 \cos^2 y + y^2 + C.$$

Таким образом, $x^2 \cos^2 y + y^2 = C$ — общий интеграл исходного уравнения.

★ Иногда можно найти такую функцию $\mu(x, y)$, что $\mu P dx + \mu Q dy$ будет полным дифференциалом, хотя $P dx + Q dy$ может им не быть. Такую функцию $\mu(x, y)$ называют интегрирующим множителем. Например, если существует интегрирующий множитель, зависящий только от x, то признак ДУ в полных дифференциалах преобретает вид

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} \equiv \frac{\partial \mu Q}{\partial x}.$$

Откуда ($\mu(x)$ не зависит от y)

$$\mu P'_y = \mu' Q + \mu Q'_x \quad \Rightarrow \quad \frac{P'_y}{Q} = \frac{\mu'}{\mu} + \frac{Q'_x}{Q}.$$

Таким образом, интегрирующий множитель, зависящий от x, удовлетворяет ДУ

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) / Q \tag{1.17}$$

и выражается формулой

$$\mu(x) = exp \left(\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) / Q \ dx \right). \tag{1.18}$$

Признак существования такого интегрирующего множителя — независимость от y правой части равенства (1.17).

П р и м е р 3. Решить ДУ

$$(x \cos y - y \sin y)\, dy + (x \sin y + y \cos y)\, dx = 0.$$

Р е ш е н и е . Имеем

$$P(x, y) = x \sin y + y \cos y, \quad Q(x, y) = x \cos y - y \sin y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \cos y + \cos y - y \sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) / Q = \frac{x \cos y - y \sin y}{x \cos y - y \sin y} = 1$$

Поэтому данное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x. Найдем этот интегрирующий множитель из равенства (1.18)

$$\mu = \exp \left(\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) / Q \ dx \right) = e^{\int dx} = Ce^x.$$

Пусть $C = 1$, тогда $\mu = e^x$. Умножая исходное уравнение на e^x, получим уравнение

$$e^x (x \cos y - y \sin y)\, dy + e^x (x \sin y + y \cos y)\, dx = 0,$$

которое, как нетрудно убедиться, уже является уравнением в полных дифференциалах. В самом деле, имеем

$$M(x, y) = e^x (x \sin y + y \cos y) \ , \ N(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y).$$

Отсюда

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x (x \cos y + \cos y - y \sin y), \frac{\partial N}{\partial x} = e^x (x \cos y - y \sin y + \cos y).$$

Эти производные равны и, следовательно, левая часть полученного уравнения имеет вид $dF(x, y)$. Таким образом,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = e^x (x \cos y - y \sin y), \\ \frac{\partial F}{\partial x} = e^x (x \sin y + y \cos y). \end{cases}$$

Интегрируя первое из этих равенств по y, находим

$$F = \int e^x (x \cos y - y \sin y)\, dy = xe^x \sin y + e^x y \cos y - e^x \sin y + \psi(x).$$

Подставим $F(x,y)$ во второе равенство

$$e^x \sin y + xe^x \sin y - e^x \sin y + e^x y \cos y + \psi'(x) = e^x(x \sin y + y \cos y).$$

Тогда получим $\psi'(x) = 0$, т. е. $\psi(x) = C$. Следовательно,

$$F(x,y) = xe^x \sin y + e^x y \cos y - e^x \sin y + C$$

и общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$e^x \left(x \sin y + y \cos y - \sin y\right) = C \ .$$

1.1.6. *Задачи для самостоятельного решения*

1. $y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$, $y(0) = 1$. Ответ: $\frac{1}{2} \ln^2 y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.
2. $\left(1 + x^2\right) dy + ydx = 0$, $y\,(1) = 1$. Ответ: $y = \exp\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x\right)$.
3. В комнате, где температура 20^0, некоторое тело остыло за 20 мин от 100 до 60^0. Найти закон охлаждения тела. Повышением температуры в комнате пренебречь. (Указание: в силу закона Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур.) Ответ: $T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$.
4. $\left(x^2 + 2xy\right) dx + xydy = 0$. Ответ: $\ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C$.
5. $xyy' = y^2 + 2x^2$. Ответ: $y^2 = 4x^2 \ln Cx$.
6. $xy' = 2\left(y - \sqrt{xy}\right)$. Ответ: $16xy = \left(y + 4x - Cx^2\right)^2$.
7. $(2x + y + 1)\,dx + (x + 2y - 1)\,dy = 0$. Ответ: $x^2 + y^2 + xy + x - y = C$.
8. $2\,(x+y)\,dy + (3x + 3y - 1)\,dx = 0$; $y\,(0) = 2$.

Ответ: $3x + 2y - 4 + 2\ln|x + y - 1| = 0$.

9. $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$; $y\,(0) = 0$. Ответ: $y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}$.
10. $\left(y^4 + 2x\right) y' = y$. Ответ: $x = Cy^2 + \frac{y^4}{2}$.
11. $y' - \frac{y}{x} = x^2 y^4$. Ответ: $y\,(x) = \frac{(x)}{x} = \frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln(C/x)}}$.
12. $\left(x^2 \ln y - x\right) y' = y$. Ответ: $x = \frac{1}{\ln y + 1 - Cy}$.
13. $(x + \sin y)\,dx + (x \cos y + \sin y)\,dy$. Ответ: $\frac{1}{2}x^2 + x \sin x - \cos y = C$.
14. $(y + x \ln y)\,dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right) dy = 0$. Ответ: $x^2 \ln y + 2y(x+1) = C$.
15. $ydx - xdy + \ln x dx = 0$ $(\mu = \varphi\,(x))$. Ответ: $y = Cx - \ln x - 1$.

1.2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Иногда ДУ n-го порядка $F\left(x,\, y,\, y',\, y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ подходящей подстановкой удается свести к уравнению низшего порядка (в благоприятном случае — первого порядка, т.е. к уже рассмотренной ранее задаче).

1.2.1. *Уравнения вида* $\frac{d^n}{dx^n}y\left(x\right)=f\left(x\right)$

★ Учитывая, что $y^n=(y^{n-1})'$, получим $y^{(n-1)}=\int f(x)\mathrm{d}x$. Продолжая последовательно интегрировать, восстановим функцию $y(x)$ (с точностью до n произвольных постоянных).

П р и м е р 1 . Найти частное решение уравнения $y'''=x\sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=2.$

Р е ш е н и е . Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:

$$y''=\int x\sin xdx=\sin x-x\cos x+C_1\ ,$$

$$y'=\int\left(\sin x-x\cos x+C_1\right)dx=-2\cos x-x\sin x+C_1x+C_2\ ,$$

$$y=\int\left(-2\cos x-x\sin x+C_1x+C_2\right)dx=-3\sin x+x\cos x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3\ .$$

Воспользуемся начальными условиями:

$$y''(0)=2\ \Rightarrow\ 0+C_1=2\ \Rightarrow\ C_1=2,$$
$$y'(0)=0\ \Rightarrow\ -2+C_2=0\Rightarrow C_2=2,$$
$$y(0)=0\ \Rightarrow\ 0+C_3=0\ \Rightarrow\ C_3=0.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид:

$$y=-3\sin x+x\cos x+x^2+2x.$$

П р и м е р 2 . Найти общее решение уравнения $y''=\sin\left(kx\right)$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y\mid_{x=0}=0$, $y'\mid_{x=0}=1$.

Р е ш е н и е . Последовательное интегрирование дает

$$y'=\int\sin kxdx=-\frac{1}{k}\cos kx+C_1,$$

$$y=\int\left(-\frac{1}{k}\cos kx+C_1\right)dx=-\int\frac{1}{k}\cos kxdx+\int C_1dx=-\frac{1}{k^2}\sin kx+C_1x+C_2.$$

Общее решение

$$y=-\frac{1}{k^2}\sin kx+C_1x+C_2.$$

Из условия $y\mid_{x=0}=0$ находим $C_2=0$. Из условия $y\mid_{x=0}=1$ находим:
$1=-\frac{1}{k}+C_1\ \Rightarrow\ C_1=1+\frac{1}{k}$. Таким образом, частное решение имеет вид:

$$y=-\frac{\sin kx}{k^2}+x\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

1.2.2. *Уравнения, не содержащие искомую функцию*

I. Уравнение второго порядка вида $F\big(x,\, y',\, y''\big) = 0$ решается заменой $y' = p(x), y'' = p'(x)$, которая понизит порядок уравнения до первого.

II. Уравнение произвольного порядка $F\big(x,\, y^{(k)},\, y^{(k+1)}, \ldots,\quad y^{(n)}\big) = 0$, в которое не входит искомая функция (и, возможно, также ее производные до некоторого порядка), решается с помощью замены $y^{(k)} = p(x)$ (за новую функцию берем низшую из производных, входящих в ДУ). Тогда $\quad y^{(k+1)} = p'(x), \ldots,$ $y^{(n)} = p^{(n-k)}(x)$. Порядок уравнения понизится на k единиц.

П р и м е р 1. Проинтегрировать уравнение второго порядка

$$(1+x)\, y'' + y' = 0.$$

Р е ш е н и е. Принимая y' за неизвестную функцию $p(x)$ и учитывая, что $y'' = p'$, перепишем уравнение в виде

$$(1+x)\,\frac{dp}{dx} + p = 0.$$

Это — уравнение первого порядка (с неизвестной функцией $p(x)$). Домножив на dx, получим уравнение

$$(1+x)dp + pd(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad d(p(x+1)) = 0\ ,$$

так что общий интеграл уравнения есть

$$(1+x)\, p = C_1.$$

Теперь вернемся к прежней неизвестной функции $y(x)$ и запишем последнее уравнение так:

$$(1+x)\,\frac{dy}{dx} = C_1 \ \text{ или } \ dy = \frac{C_1 dx}{x+1}\ .$$

Интегрируя уравнение, находим

$$y = C_1 \ln|1+x| + C_2.$$

Получено общее решение исходного уравнения.

П р и м е р 2. Найти общий интеграл уравнения $xy''' + y'' - x - 1 = 0$.

Р е ш е н и е. В уравнении явно не содержатся функции y и y'. Сделаем замену $y'' = p\,(x)\,, \quad y''' = \frac{dp}{dx}$. Подстановка приводит к линейному уравнению

$$p' + \frac{p}{x} = \frac{1}{x} + 1.$$

Проводим решение линейного уравнения методом Бернулли (см. с.14). Решение ищем в виде $p = uv$, в частности $p' = u'v + v'u$. Тогда

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x} + 1,\ u\left(v' + \frac{v}{x}\right) + u'v = \frac{1+x}{x},$$

$$v' + \frac{v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x| + \ln C, \quad C = 1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{x},$$

$$u'v = \frac{1+x}{x}, \quad u'\frac{1}{x} = \frac{1+x}{x}, \quad u' = 1 + x,$$

$$du = (1+x)\,dx, \quad u = \frac{x^2}{2} + x + C_1$$

$$p = uv, \quad p = \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right)\frac{1}{x}, \quad p = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}.$$

Теперь сделаем обратную замену $p = y''$:

$$y'' = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}.$$

Из полученного ДУ второго порядка последовательным интегрированием восстанавливаем $y(x)$:

$$y' = \int\left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{C_1}{x}\right)dx = \frac{x^4}{4} + x + C_1\ln|x| + C_2,$$

$$y = \int\left(\frac{x^4}{4} + x + C_1\ln|x| + C_2\right)dx = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1x\left(\ln|x| - 1\right) + C_2x + C_3.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1x\left(\ln|x| - 1\right) + C_2x + C_3.$$

1.2.3. *Уравнения, не содержащие свободную переменную* x

I. Уравнение второго порядка вида $F\big(y,\, y',\, y''\big) = 0$ решается заменой $y' = p(y), y'' = p'_y y'_x = p'_y p$, которая понизит порядок уравнения до первого. (Здесь вычислена вторая производная $y''(x)$ как производная сложной функции $p(y(x))$.)

II. В общем случае уравнение вида $F\big(y,\, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0$, в которое не входит явно независимая переменная, решается той же заменой $y' = p(y)$, понижающей

порядок на единицу. При этом учитываем, что $y'' = p'_y p$, $y''' = p(p'_y)^2 + p^2 p''_{yy}$, и т.д. Формулы получены дифференцированием сложной функции $p(y(x))$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p(y) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{=p(y)} = p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = pp'_y\,. \tag{1.19}$$

$$y''' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(pp'_y\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(pp'_y\right) \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{=P(y)} = ((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\, p)\, p'_y + p(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\, p'_y))p = p(p'_y)^2 + p^2 p''_{yy}.$$

П р и м е р 1 . Найти общий интеграл уравнения $y'^2 + 2yy'' = 0$.

Р е ш е н и е . Уравнение второго порядка не содержит независимую переменную x и рекомендованная подстановка $y' = p\,(y)\,, y'' = p\frac{dp}{dy}$ приводит к уравнению первого порядка:

$$p^2 + 2y\frac{dp}{dy}p = 0 \quad \text{или} \quad p(p + 2y\frac{dp}{dy}) = 0\ .$$

Поскольку произведение равно нулю, если один из сомножителей равен нулю, то полученное ДУ эквивалентно совокупности двух ДУ:

$$\left[\begin{array}{l} p = \frac{dy}{dx} = 0; \\ p + 2y\frac{dp}{dy} = 0. \end{array}\right.$$

Решение первого уравнения $y = const$, а второе интегрируем как уравнение с разделяющимися переменными:

$$2y\frac{dp}{dy} = -p, \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}, \quad \ln|p| = -\tfrac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|, \quad p = C_1|y|^{-\frac{1}{2}},\ C_1 \neq 0.$$

Проводим обратную замену $p = y'(x)$ и решаем полученное ДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = C_1|y|^{-\frac{1}{2}}; \quad |y|^{\frac{1}{2}}dy = C_1 dx; \quad \pm\tfrac{2}{3}|y|^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2,\ C_1 \neq 0.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{4}{9}|y|^3 = (C_1 x + C_2)^2,\ C_1 \neq 0 \\ y = C_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow\ \tfrac{4}{9}|y|^3 = (C_1 x + C_2)^2,\ C_1,\ C_2 - \text{любые}.$$

П р и м е р 2 . Решить ДУ $y'' = \frac{(y')^2}{y}$.

Р е ш е н и е . Пусть $y' = p\,(y)$, тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$. После подстановки получим

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{p^2}{y} \quad \text{или} \quad p\left(\frac{dp}{dy} - \frac{p}{y}\right) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности ДУ

$$\left[\begin{array}{l} p = \frac{dy}{dx} = 0, \\ \frac{dp}{dy} = \frac{p}{y}. \end{array}\right.$$

Решением первого уравнения совокупности является $y = C_1$. Найдем решение второго уравнения:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{p}{y}, \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}, \quad \ln|p| = \ln|y| + \ln|C_2|, \quad C_2 \neq 0.$$

Делаем обратную замену

$$p = \frac{dy}{dx} = C_2 y, \quad \frac{dy}{y} = C_2 dx, \quad \ln|y| = C_2 x + \ln|C_3|, \quad C_2 C_3 \neq 0.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$\left[\begin{array}{c} y = C_1 \\ y = C_3 e^{C_2 x}, \quad C_2 C_3 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \; y = C_3 e^{C_2 x}, \quad C_2, C_3 - \text{любые}.$$

1.2.4. *Однородные уравнения высших порядков*

I. Уравнение второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ называется *однородным по группе переменных* y, y', y'' (сравните с определением однородной функции на С.8), если

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^k F(x, y, y', y'').$$

Подстановкой $\frac{y'}{y} = z(x)$ порядок такого уравнения понижается на единицу, при этом $y'' = (yz)' = y'z + yz' = (yz)z + yz' = y(z^2 + z')$.

II. Уравнение вида $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ называется *однородным по группе переменных* $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, если

$$F(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}).$$

Подстановка, понижающая порядок, $\frac{y'}{y} = z(x)$, при этом

$$y' = yz, \; y'' = y(z^2 + z'), \; y''' = y(z^3 + 3zz' + z'') \text{ и т.д.}$$

П р и м е р 1 . Найти общее решение ДУ

$$xyy'' - xy'^2 - yy' = 0 \; .$$

Р е ш е н и е . Прежде убедимся, что уравнение является однородным по группе переменных y, y', y'' :

$$F(x, ty, ty', ty'') = xtyty'' - x(ty')^2 - tyty' = t^2(xyy'' - xy'^2 - yy').$$

Проведем замену:

$$y' = yz(x) \; , \; y'' = y(z^2 + z') \; , \text{ тогда}$$

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2 z^2 - y^2 z = 0 \; \Leftrightarrow \; y^2(xz' - z) = 0 \; .$$

Получили ДУ первого порядка, эквивалентное совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ x\frac{dz}{dx}=z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ z=C_1x \end{array}\right..$$

Во втором уравнении делаем обратную замену $\frac{y'}{y}=z(x)=C_1x$. Затем интегрируем полученное ДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y}=C_1xdx \ \Rightarrow \ln|y|=\frac{C_1x^2}{2}+\ln|C_2| \ \Rightarrow \ y=C_2e^{\overline{C_1}x^2} \ , \ \overline{C_1}=\frac{C_1}{2} \ .$$

Получено общее решение $y=C_2e^{\overline{C_1}x^2}$, которое содержит частное решение $y=0$.

Пример 2. Решить ДУ

$$y-xy'=x\sqrt{yy''} \ .$$

Решение. Докажем, что уравнение является однородным по группе переменных y, y', y'' :

$$F(x,ty,ty',ty'')=ty-xty'-x\sqrt{tyty''}=t(y-xy'-x\sqrt{yy''})=tF(x,y,y',y''),(t>0).$$

Проводим замену

$$y'=yz(x) \ , \ y''=y(z^2+z') \ , \text{ тогда}$$

$$y-xyz=x\sqrt{yy(z^2+z')} \ \Leftrightarrow \ y(1-xz-x\sqrt{(z^2+z')}=0 \ , \ (y\geq 0) \ .$$

Получим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{c} y=0 \\ 1-xz-x\sqrt{(z^2+z')}=0 \end{array}\right. .$$

Возводя второе ДУ в квадрат, получаем линейное уравнение первого порядка (см. с.14), решаемое заменой $z=uv, z'=u'v+v'u$:

$$(1-xz)^2=x^2(z^2+z') \ \Leftrightarrow \ x^2z'+2xz-1=0 \ \Leftrightarrow \ x^2(u'v+v'u)+2xuv-1=0,$$

$$\begin{cases} x^2u'+2xu=0 \\ x^2v'u-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=x^{-2} \\ v=C_1 \end{cases} \Rightarrow \ z=C_1x^{-2}.$$

Сделаем обратную замену:

$$\frac{y'}{y}=C_1x^{-2} \ \Leftrightarrow \ \frac{dy}{y}=\frac{C_1dx}{x^2} \ \Leftrightarrow \ y=C_2e^{\overline{C_1}/x} \ , \ \overline{C_1}=-C_1 \ .$$

Уравнение решено (учтено и частное решение $y=0$).

1.2.5. *Выделение полной производной в ДУ высших порядков*

Если ДУ может быть представлено в виде полной производной некоторой функции $G(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})$, то есть

$$\frac{d}{dx}G(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})=0 \ ,$$

тогда интегрированием этого равенства по x порядок ДУ может быть понижен на единицу

$$G(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = C_1.$$

★ Заметим, что нет (и не может быть) единого алгоритма выделения полной производной. Можно лишь увидеть в ДУ производные известных функций. При этом рекомендуем принять к сведению следующие формулы (здесь $y = y(x)$):

$$(yy')' = y'^2 + yy'', \ \left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''y - y'^2}{y^2}, \ (y'^2)' = 2y'y'' \text{ и т.п.}$$

П р и м е р . Выделить полные производные и понизить порядок следующих ДУ:

$$1)\ y'^2 + yy'' + y' = x^2\ ;\ 2)\ y''y - y'^2 = y^2(x-2);\ 3)\frac{y + xy'}{x + y'y''} = 2\ .$$

Р е ш е н и е . 1). Заметим, что $(yy' + y)' = y'^2 + yy'' + y'$ и $(\frac{1}{3}\ x^3)' = x^2$, т.е.:

$$(yy' + y)' = (\frac{1}{3}\ x^3)' \ \Rightarrow\ yy' + y' = \frac{1}{3}\ x^3 + C_1\ .$$

Таким образом, выделение полной производной позволило понизить порядок уравнения на единицу.

2). Второе уравнение можно классифицировать как однородное по группе переменных y, y', y'' и решить соответствующей заменой (см. с.26). Однако, если поделить обе части равенства на y^2, при условии $y \neq 0$, то легко можно выделить полные производные:

$$\left[\begin{array}{c} y = 0 \\ \left(\frac{y'}{y}\right)' = (\frac{1}{2}\ x^2 - 2x)' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} y = 0 \\ \frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\ x^2 - 2x + C_1 \end{array}\right. .$$

3). Данное уравнение домножим на знаменатель и выделим полные производные:

$$\frac{y + xy'}{x + y'y''} = 2 \ \Leftrightarrow\ (xy)' = (x^2 + y'^2)' \ \Leftrightarrow\ xy = x^2 + y'^2 + C_1\ .$$

Выделение полной производной позволяет один раз проинтегрирвать ДУ и понизить его порядок на единицу.

1.2.6. *Задачи для самостоятельного решения*

1. $y''' = \frac{1}{x},\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = -2.$
Ответ: $y = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{7}{4}x^2 + 5x - \frac{9}{4}$.

2. $y^{IV} = \sin x;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2;\ y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
Ответ: $y = \sin x + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$

3. $y''' = 2\frac{\cos x}{\sin^3 x}.$
Ответ: $y = \ln \sin x + C_1 + C_2 x + C_3 x^2.$

4. $\left(1 - x^2\right) y'' - xy' = 2.$
Ответ: $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2.$

5. $y'' = 1 + \frac{x(y'-x)}{1-x^2},\ y(0) = 1,\ y(1) = \frac{1}{2}.$
Ответ: $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{\pi}\arcsin x + 1.$

6. $y'y'' - \sqrt{1 + y'^2} = 0.$
Ответ: $y = \frac{x - C_1}{2}\sqrt{(x - C_1)^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left[(x - C_1) + \sqrt{(x - C_1)^2 - 1}\right] + C_2.$

7. $y'^2 + 2yy' = 0.$ Ответ: $\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2.$

8. $y'' = \frac{1}{a}\left(1 + y'^2\right),\ y(0) = y'(0) = 0.$ Ответ: $y = -a \ln \cos \frac{x}{a}.$

1.3. Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) n-го порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции $y(x)$ и ее производных. Такое уравнение всегда можно записать в виде:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \tag{1.20}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что функции $p_1(x), \ldots, p_n(x), f(x)$ непрерывны. Если правая часть $f(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{1.21}$$

называется *линейным однородным.*

Отметим основные результаты теории линейных дифференциальных уравнений.

Теорема 1.1 (о структуре общего решения ОЛДУ)

Общим решением однородного линейного ДУ n-го порядка (1.21) *является линейная комбинация* $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x)$ *линейно независимых на* $[a,\, b]$ *решений* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *данного ОЛДУ.*

Любая система из n линейно независимых частных решений ОЛДУ n-го порядка называется его фундаментальной системой решений (ФСР).

Теорема 1.2 (об общем решении НЛДУ)

Общее решение НЛДУ (1.20) *порядка* n *есть сумма общего решения* $\overline{y}$ *соответствующего однородного уравнения* (1.21) *и какого-нибудь частного решения* $\tilde{y}$ *неоднородного уравнения* (1.20).

Теорема 1.3 (принцип суперпозиции)

Пусть имеется НЛДУ $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)$.

Тогда частное решение $\tilde{y}(x)$ *этого уравнения есть сумма* $\tilde{y}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{y}_i(x)$, *где каждое* $\tilde{y}_i(x)$ *— решение соответствующего уравнения*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f_i(x), \quad 1 \le i \le m.$$

★ Алгоритм решения произвольного НЛДУ состоит из трех частей:
1) решить каким-нибудь способом соответствующее ОЛДУ (понизить степень ДУ или найти ФСР);
2) найти частное решение НЛДУ (подбором или методом вариации постоянных);
3) записать общее решение НЛДУ (теорема 1.2).

1.3.1. *ЛДУ с переменными коэффициентами*

★ Для ЛДУ с переменными коэффициентами (т.е. коэффициенты зависят от x) нет общего алгоритма решения ОЛДУ. Однако, это всегда однородное по группе переменных $y, y', \ldots, y^{(n)}$ ДУ, для которого есть замена, понижающая порядок (см. С.26). Есть и другие способы решения. Проиллюстрируем их на примере.

П р и м е р . Решить ЛДУ $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 2$.

Р е ш е н и е . Реализуем алгоритм решения НЛДУ по пунктам.

1). Рассмотрим ОЛДУ $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

1-й способ. Проведем рекомендованную на с.26 для однородных уравнений замену $y' = uy,\ y'' = u'y + u^2y$. При этом получим:
$(x^2+1)u' - 2xu + 2 + (x^2+1)u^2 = 0$ — ДУ первого порядка, но классифицировать его по таблице простейших ДУ первого порядка приложения (см. с.125) нельзя.

2-й способ. Попробуем подобрать какое-либо частное решение ОЛДУ среди простейших многочленов. Легко проверить, что частным решением является, например, функция $y = x$. Тогда проведем замену $y = xz(x)$. Относительно новой искомой функции $z(x)$ получим ДУ $x(x^2+1)z'' + 2z' = 0$, допускающее понижение порядка, т. к. не содержит z (см. с.23 и приложения на с.126).Замена, понижающая порядок $z' = u,\ z'' = u'$, приводит к ДУ с разделяющимися переменными $x(x^2+1)u' + 2u = 0$. Его общее решение имеет вид: $u = C_1\frac{x^2+1}{x^2}$. Отсюда восстанавливаем z :

$$z(x) = \int C_1\frac{x^2+1}{x^2}dx = C_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + C_2.$$

А так как $y = xz$, то общее решение исходного ОЛДУ

$$y = C_1(x^2-1) + C_2x.$$

★ Итак, если известно частное решение ОДЛУ $y = y_1(x)$, то порядок ДУ может быть понижен на единицу заменой $y = y_1(x)z(x)$.

3-й способ. Здесь мы не будем пытаться понизить порядок ДУ, а воспользуемся теоремой 1.1, которая утверждает, что для решения ОЛДУ достаточно найти ФСР. Один элемент ФСР мы уже подобрали — это $y_1(x) = x$ (см. 2-й способ). Продолжим подбор частных решений среди многочленов второго порядка. Несложно проверить, что ОЛДУ удовлетворяет $y_2(x) = x^2 - 1$. Система функций $y_1(x), y_2(x)$ линейно независима. Действительно, вычислим определитель Вронского этой системы функций:

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 - 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 + 1 \neq 0, \ \forall x \in R.$$

Итак, ФСР найдена, значит общее решение ОЛДУ по теореме 1.1 есть линейная комбинация элементов фундаментальной системы решений

$$y = C_1(x^2 - 1) + C_2 x.$$

2). Найдем частное решение НЛДУ подбором. Легко убедиться, что функция $y = 1$ удовлетворяет уравнению.

3). Общее решение по теореме 1.2 есть сумма

$$y = C_1(x^2 - 1) + C_2 x + 1.$$

1.3.2. *Решение НЛДУ методом вариации постоянных*

★ Если известно общее решение ОЛДУ (1.21) $y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$, то общее решение НЛДУ (1.20) может быть найдено в виде

$$y = C_1(x) y_1(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x),$$

где $C_i(x)$ — некоторые функции от x. Это метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа). Для того чтобы найти функции $C_i(x)$, нужно сначала решить систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных $C_i',\ 1 \leq i \leq n$:

$$\begin{cases} C_1' y_1(x) + C_2' y_2(x) + \ldots + C_n' y_n(x) = 0, \\ C_1' y_1'(x) + C_2' y_2'(x) + \ldots + C_n' y_n'(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-1)}(x) + C_2' y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \tag{1.22}$$

Затем по вычисленным производным $C_i'(x)$ интегрированием восстановить функции $C_i(x),\ 1 \leq i \leq n$.

Пример. Решить НЛДУ $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 2$, если известно общее решение соответствующего ОЛДУ: $y = C_1(x^2 - 1) + C_2 x$.

Решение. Заметим здесь, что данное ЛДУ не является уравнением вида (1.20), так как коэффициент при старшей производной не равен единице.

Приведем ЛДУ к виду (1.20):

$$y'' - \frac{2x}{x^2+1}y + \frac{2}{x^2+1}y = \frac{2}{x^2+1}.$$

Далее, в общем решении ОЛДУ варьируем постоянные C_1, C_2, то есть решение ищем в виде $y = C_1(x)(x^2-1) + C_2(x)x$. Составляем систему (1.22) для нахождения C_1', C_2'. Общий вид этой системы для случая $n = 2$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) & + & C_2'(x)y_2(x) & = & 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) & + & C_2'(x)y_2'(x) & = & f(x). \end{cases}$$

В нашем случае $y_1(x) = x^2 - 1, y_2(x) = x^2, f(x) = \frac{2}{x^2+1}$, поэтому система имеет вид:

$$\begin{cases} C_1'(x)(x^2-1) & + & C_2'(x)x & = & 0, \\ C_1'(x)\ 2x & + & C_2'(x) & = & \frac{2}{x^2+1}. \end{cases}$$

Решение системы можно провести методом исключения. В итоге получим:

$$\begin{cases} C_1'(x) & = & \frac{2x}{(x^2+1)^2}, \\ C_2'(x) & = & \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}. \end{cases}$$

Находим функции по производным:

$$C_1(x) = \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{x^2+1} + D_1, \quad C_2(x) = \int \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}dx = \frac{2x}{x^2+1} + D_2.$$

Здесь D_1, D_2 — произвольные постоянные. Теперь подставляем функции $C_1(x), C_2(x)$ в общее решение НЛДУ:

$$y = \left(-\frac{1}{x^2+1} + D_1\right)(x^2-1) + \left(\frac{2x}{x^2+1} + D_2\right)x.$$

Раскроем скобки и упростим. В результате общее решение НЛДУ:

$$y = D_1(x^2-1) + D_2x + 1.$$

1.3.3. *ОЛДУ с постоянными коэффициентами*

ОЛДУ с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0, \tag{1.23}$$

причем все коэффициенты a_i — в е щ е с т в е н н ы е константы.

Частные решения, составляющие ФСР этого уравнения, всегда можно найти по известному алгоритму, сводящему решение ДУ к решению алгебраического уравнения.

★ Для того чтобы решить ОЛДУ n-го порядка (1.23) с постоянными коэффициентами, достаточно найти корни *характеристического уравнения*

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0. \tag{1.24}$$

Для записи характеристического уравнения нужно заменить в ОЛДУ (1.23) каждую производную $y^{(m)},\ 0 \le m \le n$, на соответствующую степень k^m. Набору корней $k_i,\ 1 \le i \le n$, соответствует набор функций $y_i,\ 1 \le i \le n$, образующий ФСР данного ОЛДУ (см., например, приложения на с.126). Тогда по теореме 1.1 общее решение ОЛДУ есть линейная комбинация элементов фундаментальной системы: $y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$.

Для случая $n = 2$ характеристическое уравнение будет квадратным:

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \tag{1.25}$$

Сведем в таблицу соответствие между корнями уравнения (1.25) и элементами ФСР соответствующего ОЛДУ:

Корни уравнения (1.25)	ФСР ОЛДУ
$k_{1,2}$ — действительные и различные	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$
$k_1 = k_2 = \tilde{k}$ — действительные и кратные	$y_1 = e^{\tilde{k}x}$, $y_2 = e^{\tilde{k}x}x$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — комплексные	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

П р и м е р 1. Найти решения ОЛДУ:
1) $y'' - 2y' - 8y = 0$; 2) $y'' - 6y' + 9y = 0$; 3) $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Р е ш е н и е.

1).Составим характеристическое уравнение для первого ДУ: $k^2 - 2k - 8 = 0$. Оно имеет два действительных различных корня: $k_1 = 4$, $k_2 = -2$. В этом случае ОЛДУ имеет два линейно независимых частных решения $y_1 = e^{4x}$, $y_2 = e^{-2x}$. Общее решение ДУ имеет вид:

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}.$$

2). Характеристическое уравнение данного ДУ имеет вид: $k^2 - 6k + 9 = 0$. Его корень $k = k_1 = k_2 = 3$ кратности 2. Тогда ФСР образуют функции: $y_1 = e^{3x}$,

$y_2 = e^{3x}x$. Общее решение ДУ :

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} = (C_1 + C_2 x)\, e^{3x}.$$

3). Характеристическое уравнение: $k^2 - 6k + 13 = 0$. Решения характеристического уравнения комплексные: $k_{1,2} = 3 \pm 2i$. Тогда частные решения, образующие ФСР, имеют вид: $y_1 = e^{3x}\cos 2x$, $\quad y_2 = e^{3x}\sin 2x$. И общее решение ДУ:

$$y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\, e^{3x}.$$

Пример 2. Решите уравнения:
1) $y''' - y = 0$; 2) $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0$; 3) $y^{\text{IV}} + 2y'' + y = 0$.

Решение.

1). Характеристическое уравнение:

$$k^3 - 1 = 0, \quad (k-1)\left(k^2 + k + 1\right) = 0,$$

откуда

$$k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Соответствующие этим корням элементы ФСР:

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad y_3 = e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Общее решение ОЛДУ:

$$y = C_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left[C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$$

2). Характеристическое уравнение имеет вид: $k^3 + 2k^2 - 4k - 8 = 0$. Группируя слагаемые, получаем $(k+2)(k^2-4) = 0$, откуда $k_1 = 2$, $k_{2,3} = -2$. Фундаментальная система решений: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$, $y_3 = xe^{-2x}$; общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{-2x}$.

3). Характеристическое уравнение $k^4 + 2k^2 + 1 = (k^2+1)^2 = 0$ имеет двукратные корни $k_{1,2} = i$, $k_{3,4} = -i$. Им соответствует линейно независимая система частных решений:

$$y_1 = e^{0x}\cos x,\ y_2 = xe^{0x}\cos x,\ y_3 = e^{0x}\sin x,\ y_4 = xe^{0x}\sin x.$$

Общее решение ОЛДУ есть их линейная комбинация:

$$y = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x,$$

или

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x.$$

1.3.4. *НЛДУ с постоянными коэффициентами*

Рассмотрим решение НЛДУ с постоянными вещественными коэффициентами a_i:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x). \tag{1.26}$$

Если известно общее решение соответствующего ОЛДУ $\overline{y}$, то (по теореме 1.2, с.30) достаточно найти какое-нибудь частное решение НЛДУ $\tilde{y}$ для записи общего решения НЛДУ: $y = \overline{y} + \tilde{y}$. Подобрать частное решение $\tilde{y}$ возможно алгебраически — методом неопределенных коэффициентов, если функция $f(x)$ имеет вид *квазиполинома* — комбинации экспоненты, полиномов, косинусов и синусов:

$$f(x) = e^{\alpha x}\Big\{P_l(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\Big\}, \tag{1.27}$$

где $P_l(x)$ и $Q_n(x)$ — полиномы степени l и n, соответственно.

★ Частное решение $\tilde{y}$ НЛДУ будем к о н с т р у и р о в а т ь, исходя из того, как выглядит квазиполином:

$$\tilde{y}(x) = e^{\alpha x}\big\{R_m(x)\,\cos\beta x + T_m(x)\,\sin\beta x\big\}x^s, \tag{1.28}$$

где $R_m(x)$ и $T_m(x)$ — полиномы степени m с н е о п р е д е л е н н ы м и к о э ф ф и ц и е н т а м и; $m = \max\{l,\, n\}$; s —число вхождений контрольного числа $\mathfrak{r} = \alpha + i\beta$ в список корней характеристического уравнения для ОЛДУ (см. также таблицу частных решений в приложениях с.127).

★ Заметим, что частное решение $\tilde{y}$ выглядит практически так же, как и правая часть ДУ $f(x)$, отличаясь разве лишь "весовым множителем"x^s.

Подбор частного решения с использованием таблицы на с.127 в п р о с т ы х с л у ч а я х проиллюстрируем с помощью следующего примера.

П р и м е р 1 . Найти решения НЛДУ:
1)$y'' - 5y' + 6y = e^x$; 2)$y'' = x^2 + y$; 3) $y'' - 4y' + 4y = \cos x$.

Р е ш е н и е . 1). Найдем решение соответствующего ОЛДУ: $y'' - 5y' + 6y = 0$. Выпишем характеристическое уравнение и его корни: $k^2 - 5k + 6 = 0$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$. Значит общее решение ОЛДУ :$\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$.

Теперь методом неопределенных коэффициентов подберем частное решение $\tilde{y}$ НЛДУ. Правая часть $f\,(x) = e^x$ — квазимногочлен (1.27) вида $P_l(x)e^{\alpha x}$ с параметрами $\alpha = 1,\ l = 0$. В этом случае можно воспользоваться второй строкой таблицы частных решений на С.127. Так как контрольное число $\mathfrak{r} = \alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$ и вид частного решения такой: $\tilde{y} = R_0(x)e^x = Ae^x$, где A — неопределенный коэффициент. Найдем

A подстановкой в НЛДУ. Функции

$$\tilde{y} = Ae^x, \quad \tilde{y}' = Ae^x, \quad \tilde{y}'' = Ae^x.$$

подставляем в уравнение :

$$Ae^x - 5Ae^x + 6Ae^x = e^x \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = \frac{1}{2}e^x.$$

Окончательно, общее решение НЛДУ

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^x.$$

2). Для ОЛДУ $y'' - y = 0$ решаем характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1,\ k_2 = -1$$

и находим общее решение ОЛДУ

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Поскольку правая часть $f(x) = x^2$ есть многочлен, то контрольное число $\mathfrak{r} = 0$. (см. таблицу частных решений в приложениях на с.127.) Но среди корней характеристического уравнения нет нуля, поэтому $s = 0$. Вид частного решения: $\tilde{y} = R_2(x) = Ax^2 + Bx + C$. После подстановки $\tilde{y}$ в НЛДУ получим

$$2A - \left(Ax^2 + Bx + C\right) = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -A = 1, \\ -B = 0, \\ 2A - C = 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ C = -2\ . \end{cases}$$

Таким образом, частное решение НЛДУ $\tilde{y} = -x^2 - 2$, а общее решение

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \left(x^2 + 2\right).$$

3). Для ОЛДУ $y'' - 4y' + 4y = 0$ решаем характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0, \quad k_{1,2} = 2$. Общее решение ОЛДУ $\bar{y} = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x}$.

Правая часть $f(x) = \cos x$ имеет вид: $P\cos\beta x + Q\sin\beta x$ для $\beta = 1,\ P = 1,\ Q = 0$. При этом контрольное число $\mathfrak{r} = i\beta = i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $s = 0$. Вид частного решения $\tilde{y} = A\cos x + B\sin x$. (см. также таблицу частных решений в приложениях на с.127). После подстановки $\tilde{y}$ в НЛДУ получим

$$(-A\cos x - B\sin x) - 4\,(-A\sin x + B\cos x) + 4\,(A\cos x + B\sin x) = \cos x;$$

$$(-A - 4B + 4A)\cos x + (-B + 4A + 4B)\sin x = \cos x;$$

$$\begin{cases} 3A - 4B = 1 \\ 4A + 3B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{3}{25} \\ B = -\frac{4}{25} \end{cases}.$$

Частное решение НЛДУ

$$\tilde{y} = \frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x,$$

а общее решение НЛДУ

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x} + \frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x.$$

Общий алгоритм подбора частного решения для произвольного квазимногочлена в правой части продемонстрируем в следующем примере.

Пример 2. Определить вид частного решения НЛДУ порядка n по виду правой части $f(x)$ и набору корней характеристического уравнения k_i, $1 \le i \le n$.

1) $k_1 = -1, k_2 = 0, f(x) = e^{-x}(x+1)$; 2) $k_{1,2} = \pm 2i, k_3 = 0,\ f(x) = \cos 2x - x\sin 2x$;

3) $k_1 = k_2 = 3 - 2i, k_3 = k_4 = 3 + 2i,\ f(x) = e^{3x}(\cos 2x + \sin 2x)$.

Решение. 1). По виду квазимногочлена $f(x) = e^{-x}(x+1)$ определим его параметры α, β, l, n, соответствующие формуле (1.27): $\alpha = -1, \beta = 0, l = 1$, можно считать $n = 0$. Далее определим параметры формулы (1.28). Для этого составим контрольное число $\mathfrak{r} = \alpha + i\beta = -1$. Поскольку $\mathfrak{r} = -1 = k_1$, т.е. контрольное число совпадает с одним из корней, кратность которого 1, то $s = 1$. Второй параметр формулы (1.28) — максимальная степень многочленов: $m = \max\{l, n\} = \max\{1, 0\} = 1$. Таким образом, вид частного решения: $\tilde{y} = e^{-x}(Bx + C)x$.

2). Для квазимногочлена $f(x) = \cos 2x - x\sin 2x$ определим параметры α, β, l, n, соответствующие формуле (1.27): $\alpha = 0, \beta = 2, l = 0, n = 1$. Составляем контрольное число $\mathfrak{r} = \alpha + i\beta = 2i$. Тогда $\mathfrak{r} = 2i = k_1$ и контрольное число совпадает с одним из корней, кратность которого 1, поэтому $s = 1$. Далее $m = \max\{l, n\} = \max\{0, 1\} = 1$. Находим вид частного решения по формуле (1.28): $\tilde{y} = ((B_1 x + C_1)\cos 2x + (B_2 x + C_2)\sin 2x)x$.

3). Для квазимногочлена $f(x) = e^{3x}(\cos 2x + \sin 2x)$ определим параметры α, β, l, n, соответствующие формуле (1.27): $\alpha = 3, \beta = 2, l = 0, n = 0$. Составляем контрольное число $\mathfrak{r} = \alpha + i\beta = 3 + 2i$. Оно совпадает с одним из корней, кратность которого 2: $\mathfrak{r} = 3 + 2i = k_3 = k_4$, поэтому $s = 2$. Далее $m = \max\{l, n\} = \max\{0, 0\} = 0$. Находим вид частного решения по формуле (1.28): $\tilde{y} = e^{3x}(A_1\cos 2x + A_2\sin 2x)x^2$.

★ Если правая часть НЛДУ есть сумма квазимногочленов, то, пользуясь принципом суперпозиции (теорема 1.3, с.30), находим частное решение $\tilde{y}$ НЛДУ как сумму частных решений, подобранных для каждого квазимногочлена в отдельности.

Пример 3. Определить вид частного решения НЛДУ

$$y''' - y'' + y' - y = 1 + 4xe^x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 - k^2 + k - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$, $k_{2,3} = \pm i$.

В исходном уравнении неоднородность не является единым квазиполиномом (в самом деле, она включает как слагаемое с экспонентой, так и слагаемое без нее, что невозможно в одном квазиполиноме).

В соответствии с принципом суперпозиции (см. с. 30) найдем отдельно частные решения для двух НЛДУ:

$$y''' - y'' + y' - y = 1 \quad \text{и} \quad y''' - y'' + y' - y = 4xe^x.$$

Для первого НЛДУ:	Для второго НЛДУ:
$f(x) = e^{0x}$	$f(x) = 4xe^{1x}$
контрольное число	контрольное число
$\mathfrak{r} = \alpha + i\beta = 0 \neq k_{1,2,3}$;	$\mathfrak{r} = \alpha + i\beta = 1 = k_1$;
кратность совпадения $\mathfrak{r}$ и k:$s = 0$;	кратность совпадения $\mathfrak{r}$ и k: $s = 1$;
степень полинома $m = 0$.	степень полинома $m = 1$.
Частное решение :	Частное решение :
$\tilde{y}_1 = A$.	$\tilde{y}_2 = e^x(Bx + C)x$.

Здесь A, B, C — неопределенные коэффициенты, которые можно найти подстановкой $\tilde{y}_1$ в первое НЛДУ, а $\tilde{y}_2$ — во второе НЛДУ.

Окончательно, общее решение исходного НЛДУ имеет вид:

$$y(x) = \overline{y} + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x + A + e^x(Bx^2 + Cx).$$

★ Если правая часть НЛДУ с постоянными коэффициентами не является квазиполиномом, то метод неопределенных коэффициентов не работает, но можно применить метод Лагранжа (см. с.31).

Пример 4. Найти решение НЛДУ $y''' + y' = \frac{1}{\sin x}$.

Решение. Найдем частные решения ОЛДУ:

$$y''' + y' = 0, \quad k^3 + k = 0, \quad k_1 = 0,\ k_{2,3} = \pm i.$$

Значит, $y_1 = 0$, $\quad y_2 = \cos x$, $\quad y_3 = \sin x$ есть фундаментальная система решений. Общее решение ОЛДУ

$$\bar{y} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Варьируя постоянные, запишем общее решение НЛДУ

$$y = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x.$$

Составим систему уравнений для определения $C_i'(x)$:

$$\begin{cases} C_1' \cdot 1 + C_2'\cos x + C_3'\sin x = 0 \\ -C_2'\sin x + C_3'\cos x = 0 \\ -C_2'\cos x - C_3'\sin x = \frac{1}{\sin x} \end{cases}.$$

Решение этой системы :

$$\begin{cases} C_1' = \frac{1}{\sin x} \\ C_2' = -\frac{\cos x}{\sin x} \\ C_3' = -1 \end{cases}.$$

Найдем $C_i(x)$:

$$\begin{cases} C_1(x) = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + D_1 \\ C_2(x) = \int -\frac{\cos x}{\sin x}dx = -\ln|\sin x| + D_2 \\ C_3(x) = -x + D_3 \end{cases}.$$

Запишем общее решение НЛДУ :

$$y = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + D_1 + (-\ln|\sin x| + D_2)\cos x + (-x + D_3)\sin x$$

или

$$y = \underbrace{\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \cos x\ln|\sin x| - x\sin x}_{\text{частное решение НЛДУ}} + \underbrace{D_1 + D_2\cos x + D_3\sin x.}_{\text{общее решение ОЛДУ}}$$

1.3.5. *Уравнение Эйлера*

(Однородным) уравнением Эйлера называется ДУ вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \tag{1.29}$$

где все $a_i, 1 \le i \le n$, — постоянные. Характерным признаком уравнения Эйлера является совпадение степени аргумента и порядка производной искомой функции в каждом слагаемом.

★ Для решения однородного уравнения Эйлера нужно составить и решить характеристическое уравнение. Проще всего сделать это подстановкой $y = x^k$; при подстановке учитываем, что $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}, \ldots$, $y^{(n)} = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)x^{k-n}$. По виду корней характеристического уравнения находим ФСР, а значит, и общее решение. Для случая $n = 2$ соответствие между корнями и фундаментальными решениями приведено в таблице (для ДУ высших степеней см. приложение на с.127).

Корни хар. уравнения	ФСР уравнения Эйлера
$k_{1,2}$ — действительные и различные	$y_1 = x^{k_1}$, $y_2 = x^{k_2}$
$k_1 = k_2 = \tilde{k}$ — действительные и кратные	$y_1 = x^{\tilde{k}}$, $y_2 = x^{\tilde{k}} \ln x$
$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — комплексные	$y_1 = x^{\alpha} \cos(\beta \ln x)$, $y_2 = x^{\alpha} \sin(\beta \ln x)$

П р и м е р 1. Решить уравнения Эйлера:
1) $x^2y'' + xy' - y = 0$; 2) $x^2y'' - xy' + y = 0$; 3)$x^2y'' + xy' + y = 0$.

Р е ш е н и е. 1).После степенно́й подстановки $y = x^k$ получаем характеристическое уравнение $k(k-1)+k-1 = 0$, его корни $k_1 = -1$, $k_2 = 1$. Общее решение ДУ: $y = \frac{C_1}{x} + C_2\, x$.

2). Уравнение $k(k-1) - k + 1 = 0$ имеет совпадающие корни $k_{1,2} = 1$. Общее решение ДУ: $y = C_1 x + C_2\, x \ln x = (C_1 + C_2 \ln x)x$.

3). После подстановки $y = x^k$ получим характеристическое уравнение $k(k-1) + k + 1 = 0$, которое имеет комплексно сопряженные корни $k_{1,2} = \pm i$. Общее решение: $y = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x$.

★ Уравнение Эйлера можно свести к линейному уравнению с постоянными коэффициентами (это удобно, если ДУ неоднородное). Для этого заменим независимую переменную с помощью подстановки $x = e^t$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{y'_t}{x'_t} = e^{-t}\, y'_t,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = (-e^{-t}\, y'_t + e^{-t}\, y''_{tt})\, e^{-t} = e^{-2t}\,(y''_{tt} - y'_t) \text{ и т.д..}$$

П р и м е р 2 . Найдите общее решение уравнения $x^2y'' + 5xy' + 3y = \ln x$.

Р е ш е н и е . Это неоднородное уравнение Эйлера. Произведем замену переменной $x = e^t, \ln x = t$ и получим

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt}; \quad y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Подставляя эти значения производных в заданное уравнение и замечая, что $x^2 = e^{2t}$, получаем

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 5e^t \cdot e^{-t}\frac{dy}{dt} + 3y = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 5\frac{dy}{dt} + 3y = t.$$

Делая приведение подобных, имеем

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = t.$$

Таким образом, подстановка привела к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид
$k^2 + 4k + 3 = 0$, его корни $k_1 = -3$, $k_2 = -1$. Частные решения ОЛДУ с постоянными коэффициентами:

$$y_1 = e^{-3t}, \quad y_2 = e^{-t}.$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения по виду правой части — квазимногочлену $f(t) = t$. Поскольку контрольное число $\mathfrak{r} = 0$ не является корнем характеристического уравнения, частное решение ищем в виде
$\tilde{y} = At + B$. После его подстановки в НЛДУ получим систему:

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 3B + 4A = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{4}{9} \end{cases}.$$

Итак, $\tilde{y} = \frac{1}{3}t - \frac{4}{9}$. Таким образом, общее решение НЛДУ с постоянными коэффициентами

$$y = C_1e^{-3t} + C_2e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{4}{9}.$$

Теперь надо возвратиться к старой переменной x, зная, что $t = \ln x$. Общее решение заданного уравнения

$$y = \frac{C_1}{x^3} + \frac{C_2}{x} + \frac{1}{3}\ln x - \frac{4}{9}.$$

1.3.6. *Задачи для самостоятельного решения*

1. $y'' + 4y = \cos 2x$

Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{4}\sin 2x$.

2. $y'' - 3y' + 2y = 0$ $y(0) = 2,\ y'(0) = -3$

Ответ: $y = 7e^x - 5e^{2x}$.

3. $y'' + y' + y = 3e^{2x}$

Ответ: $y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{3}{7}e^{2x}$.

4. $y'' - 8y' + 7y = 3x^2 + 7x + 8$

Ответ: $y = C_1e^x + C_2e^{7x} + \frac{3}{7}x^2 + \frac{97}{49}x + \frac{1126}{343}$.

5. $y'' - 2y' + 10y = x\cos 2x$

Ответ: $y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \left(\frac{3}{26}x + \frac{29}{338}\right)\cos 2x + \left(-\frac{1}{13}x - \frac{1}{169}\right)\sin 2x$.

6. $x^2y'' + xy' - y = 9x^2$

Ответ: $y = C_1x + C_2x^{-1} + 3x^2$.

Глава 2

Ряды

2.1. Числовые ряды

2.1.1. *Определение и вычисление суммы ряда*

Пусть u_1, u_2, $u_3, \ldots$ — числовая последовательность . Выражение вида $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется числовым *рядом*. Сумма первых n слагаемых $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_n$ называется n-й *частичной суммой* ряда. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся*, если существует конечный предел S последовательности S_n его частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Если данный предел равен бесконечности или не существует, то ряд называется *расходящимся*. Для сходящегося ряда число S называется *суммой* ряда.

★ Вычисление суммы числового ряда с помощью определения сводится к вычислению предела последовательности S_n, при этом используются свойства числовых последовательностей и приемы вычисления их пределов. Однако прежде всего нужно найти формулу $n-$го члена последовательности S_n по известной формуле общего члена ряда u_n. Рассмотрим эту задачу на примерах.

Пример. Исследовать сходимость и найти суммы, если это возможно, следующих числовых рядов:

$$1)\frac{1}{6} + \frac{3^2 - 2^2}{6^2} + \frac{3^3 - 2^3}{6^3} + \ldots;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)};\ 3)\frac{7}{3\cdot 8} + \frac{9}{4\cdot 15} + \frac{11}{5\cdot 24} + \ldots\ .$$

Решение. 1). Прежде всего найдем формулу общего члена ряда. Заметим, что если u_n — n-й член ряда, то

$$u_1 = \frac{1}{6} = \frac{3^1 - 2^1}{6^1} = \frac{3^1}{6^1} - \frac{2^1}{6^1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$u_2 = \frac{3^2 - 2^2}{6^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}, u_3 = \frac{3^3 - 2^3}{6^3} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} \ldots,$$

$$u_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}.$$

Теперь рассмотрим n-е частичные суммы S_n:

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2});$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3});$$

$$S_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}).$$

Просуммируем стоящие в скобках n первых членов геометрических прогрессий со знаменателями q ($q = \frac{1}{2}$ и $q = \frac{1}{3}$) по формуле $\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ (b_1 — первый член прогрессии). Получим

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{2 \cdot \frac{1}{2}} - \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{3 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2 \cdot 3^n}, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Теперь имеем удобную для вычисления предела формулу последовательности S_n. Находим сумму ряда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \right) = \frac{1}{2}\,.$$

2). Для того чтобы решить эту задачу, представим общий член ряда в виде суммы простейших дробей

$$u_n = \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3 \cdot n} - \frac{1}{3 \cdot (n+3)}.$$

Коэффициенты $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{3}$ мы здесь просто подобрали, однако можно было действовать методом неопределенных коэффициентов. Теперь вычислим частичные суммы.

$$S_1 = u_1 = \frac{1}{3 \cdot 1} - \frac{1}{3 \cdot 4}; \;\; S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right);$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right).$$

Начиная с 4-й частичной суммы некоторые слагаемые (они подчеркнуты) начнут сокращаться:

$$S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \underline{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \underline{\frac{1}{4}} - \frac{1}{7} \right);$$

$$S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \underline{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - \underline{\frac{1}{5}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \underline{\frac{1}{4}} - \frac{1}{7} + \underline{\frac{1}{5}} - \frac{1}{8}\right) \dots .$$

Заметим, что начиная с $n = 3$ формула частичной суммы будет следующей :

$$S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right).$$

Поскольку предел последовательности не зависит от значения конечного числа ее членов, сумма ряда есть предел

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{11}{18}.$$

3). В этой задаче прежде всего необходимо записать формулу общего члена ряда. Для этого заметим, что если нумеровать слагаемые начиная с $n = 3$, то $u_n = \frac{2n+1}{n(n^2-1)}$. Далее, так же как в пункте 2), представим полученную дробь в виде суммы простейших. Здесь используем метод неопределенных коэффициентов:

$$u_n = \frac{2n+1}{n(n^2-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} + \frac{C}{n+1}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю и приравниваем полученный числитель к числителю левой части:

$$2n + 1 = A(n^2 - 1) + Bn(n + 1) + Cn(n - 1).$$

В результате сравнения коэффициентов при одинаковых степенях получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ \quad\;\; B - C = 2 \\ \quad\quad\;\; -A = 1 \end{cases}.$$

Ее решение $A = -1, B = \frac{3}{2}, C = -\frac{1}{2}$. Таким образом, получено следующее разложение:

$$u_n = -\frac{1}{n} + \frac{3}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}, \; n = 3, 4, \dots .$$

Теперь вычислим частичные суммы:

$$S_1 = u_3 = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 4};$$

$$S_2 = u_3 + u_4 = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 5};$$

$$S_3 = u_3 + u_4 + u_5 = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2\cdot 2} - \underline{\frac{1}{2\cdot 4}} - \underline{\frac{1}{4}} + \frac{3}{2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 5} - \frac{1}{5} + \underline{\frac{3}{2\cdot 4}} - \frac{1}{2\cdot 6}, \dots .$$

Заметим, что начиная с S_3 промежуточные слагаемые сокращаются (они подчеркнуты). В формуле останутся лишь 6 слагаемых:

$$S_k = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot(k+2)} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{2\cdot(k+3)},\ k = 3, 4, \ldots .$$

Теперь считаем предел последовательности:

$$S = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{7}{12} - \frac{1}{2\cdot(k+2)} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{2\cdot(k+3)}\right) = \frac{7}{12}\,.$$

Пример закончен, однако стоит заметить, что нахождение формулы n-го члена последовательности частичных сумм — задача сложная и в большинстве случаев не решаемая. Тем не менее, определение суммы ряда не единственный инструмент в исследовании сходимости рядов и вычислении их сумм.

2.1.2. *Признаки сходимости знакоположительных рядов*

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется знакоположительным, если все u_n положительны. Напомним основные теоремы — признаки сходимости знакоположительных рядов.

Теорема 2.1 (интегральный признак Коши)

Пусть а) функция $f(x) \geq 0$ для всех $x \geq 1$; б) $f(x)$ монотонно убывает. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, составленный из значений $f(x)$ при натуральных значениях аргумента, и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ (см.с.81) ведут себя одинаково — оба сходятся или оба расходятся.[1]

Теорема 2.2 (признак сравнения)

Пусть даны два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, причем $0 \leq u_n \leq v_n$. Тогда:

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится (и имеет сумму $\mathfrak{S}$), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ тем более сходится (обозначим его сумму как S), причем $S \leq \mathfrak{S}$;

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ тоже расходится.

Теорема 2.3 (предельный признак сравнения)

Пусть даны два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, причем все $u_n > 0$, $v_n > 0$, и пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K$. Тогда:

1) если $0 \leq K < \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже сходится;

[1] В лекционном курсе тема "Несобственные интегралы"читается перед темой "Ряды".

2) если $0 < K \leq \infty$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *тоже расходится;*

3) если $0 < K < \infty$*, то ряды ведут себя одинаково (оба сходятся или оба расходятся).*

Теорема 2.4 (признак Д'Аламбера)

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*, причем все* $u_n > 0$*, и пусть существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$.

Тогда:

1) если $\lambda < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится;*

2) если $\lambda > 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится;*

3) если $\lambda = 1$*, то признак неэффективен (ряд может как сходиться, так и расходиться).*

Теорема 2.5 (радикальный признак Коши)

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*, причем все* $u_n > 0$*, и пусть существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$.

Тогда:

1) если $\lambda < 1$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится;*

2) если $\lambda > 1$*, то ряд расходится;*

3) если $\lambda = 1$*, то признак неэффективен (ряд может как сходиться, так и расходиться).*

Теорема 2.6 (необходимый признак сходимости) *Если ряд сходится (неважно знакоположительный или знакопеременный), то предел его общего члена равен нулю.*

З а м е ч а н и е . Необходимый признак сходимости чаще всего используется в эквивалентной формулировке: *если предел общего члена ряда не равен нулю, то ряд расходится.*

Теперь, кроме определения суммы ряда для исследования сходимости рядов, мы можем использовать все сформулированные признаки сходимости.

★ Исследование сходимости ряда полезно начинать с проверки необходимого признака: если предел общего члена не ноль, то ряд расходится; если ноль, то продолжаем исследование, подбирая по виду ряда подходящий признак сходимости. Особенность применения признаков сравнения — предварительная формулировка гипотезы о сходимости ряда и подбор эталонного ряда для сравнения. Здесь часто используется эквивалентность бесконечно больших и бесконечно малых величин. В качестве эталонных используют, как правило, степенные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (для $\alpha \leq 1$ ряд расходится, для $\alpha > 1$ — сходится), и ряд

геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ (если $|q| < 1$, то ряд сходится, если $|q| \geq 1$ — расходится).

П р и м е р . Исследовать на сходимость следующие ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-n}{n(n+1)(n+2)};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{2}{n};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}};\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(3n+1)};$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!};\ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}.$$

Р е ш е н и е . 1). Легко понять, что предел общего члена ряда на бесконечности – ноль, поэтому продолжаем исследование. Функция, стоящая под знаком ряда, — знакопеременная, а , начиная с $n = 5$, — отрицательная. Перепишем ряд в виде суммы:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-n}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{4} \frac{4-n}{n(n+1)(n+2)} - \sum_{n=5}^{\infty} \frac{n-4}{n(n+1)(n+2)}.$$

Понятно, что первоначальный ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{n-4}{n(n+1)(n+2)}$. Изучим его. Заметим, что под знаком ряда стоит дробно-рациональная функция. Такого типа ряды проще всего исследовать с помощью предельного признака сравнения (теорема 2.3). Подбираем эталонный ряд : бесконечно большая величина $n-4$ эквивалентна n, а бесконечно большая $n(n+1)(n+2)$ эквивалентна n^3. Поэтому дробь $\frac{n-4}{n(n+1)(n+2)}$ ведет себя на бесконечности так же, как $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Теперь применим предельный признак сравнения, используя в качестве эталонного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Находим предел отношения общих членов заданного и эталонного рядов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-4)n^2}{n(n+1)(n+2)} = 1.$$

Так как 1– конечное число, отличное от нуля, ряды ведут себя одинаково. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, а значит, знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{n-4}{n(n+1)(n+2)}$ тоже сходится, а вместе с ним сходится и первоначальный знакопеременный ряд.

2). Исследование ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{2}{n}$ начнем , как всегда, с вычисления предела общего члена:

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} n\frac{2}{n} = 2 \neq 0.$$

Значит ряд расходится (см. замечание к необходимому признаку сходимости,теорема 2.6).

3). Для следующего ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$ вычислим предел общего члена , например, с помощью правила Лопиталя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n7\sqrt[3]{n^4}} = 0.$$

Далее применим к ряду признак сравнения (теорема 2.2). Действовать, как в примере 1), мы не можем, так как бесконечно большая $\ln n$ не эквивалентна никакой степенной функции. [2] Для нашего ряда используем неравенство: $\ln n < n$. Тогда $\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}} < \frac{n}{\sqrt[3]{n^7}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ сходится как степенной с показателем больше единицы, то и меньший ряд тоже сходится (по признаку сравнения, теорема 2.2).

4). Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(3n+1)}$ очевидно, что предел общего члена равен нулю. Следующий этап — выбор признака сходимости. Сравнение со степенными рядами здесь не работает. Однако, проведем сравнение с чуть подправленным рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln(3n+1)}.$$

Для этого найдем предел отношения общих членов сравниваемых рядов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)\ln(3n+1)}{(3n+1)\ln(3n+1)} = \frac{2}{3} - \text{конечное число, отличное от 0.}$$

Таким образом, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(3n+1)}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln(3n+1)}$ ведут себя одинаково (по предельному признаку сравнения, теорема 2.3). Для второго ряда воспользуемся интегральным признаком Коши. Вычислим соответствующий ряду несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)\ln(3x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(\ln(3x+1))\Big|_1^{\infty} = \infty.$$

То есть интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)\ln(3x+1)}\,\mathrm{d}x$ расходится, а следовательно, расходится и соответствующий ему ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)\ln(3n+1)}$ (по интегральному признаку Коши,

[2] При сравнении полезно соотношение, связывающее логарифмическую функцию со степенными: если $\beta > 0$, то $x^\beta > \ln x$ для достаточно больших положительных x, начиная с некоторого x_0.

теорема 2.1). Но тогда и первоначальный ряд расходится.

5). Задачу исследования сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$ решаем, используя признак Д'Аламбера, теорема 2.4, (например потому, что под знаком ряда присутствует факториал). Составим и вычислим отношение $(n+1)$-го члена ряда к n-му:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^n\sqrt{(n+1)^2+5}\,(n-1)!}{(n-1)!n4^{n-1}\sqrt{n^2+5}} = \frac{4\sqrt{(n+1)^2+5}}{n\sqrt{n^2+5}}\,.$$

Посчитаем предел найденного отношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{(n+1)^2+5}}{n\sqrt{n^2+5}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n^2}}{n\sqrt{n^2}} = 0 < 1.$$

Так как полученный предел меньше 1, ряд (по признаку Д'Аламбера) сходится.

6). Последний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}$ исследуем с помощью радикального признака Коши (теорема 2.5)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1.$$

Поскольку предел меньше 1, ряд сходится.

★ Заметим, что признаки Д'Аламбера и Коши радикальный более удобны, так как не требуют подбора эталонов. Кроме того, в этом случае вычисление пределов по теоремам Коши или Д'Аламбера не сложнее, чем вычисление предела общего члена ряда по необходимому признаку сходимости. Поэтому в примерах 5) и 6) мы не проверяем равен ли нулю предел общего члена ряда. Однако теоремы Коши и Д'Аламбера не всегда применимы.

2.1.3. *Знакопеременные и комплексные ряды*

Знакопеременным называется ряд, слагаемые которого есть вещественные числа произволього знака. *Знакочередующимся* называется ряд, слагаемые которого имеют чередующиеся знаки, т.е. ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,$$

где все $a_n > 0$ или $a_n < 0$.

Будем рассматривать ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где u_n — числа действительные произвольного знака или комплексные. Определение сходящегося комплексного ряда

точно такое же, как и действительного: ряд сходится, если комплексная последовательность частичных сумм сходится. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся*, если сам он сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится. Напомним основные теоремы, связывающие различные виды сходимости.

Теорема 2.7 (об абсолютной сходимости ряда)

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже сходится.

Теорема 2.8 (о сходимости комплекснозначных рядов)

Пусть из комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$ образован ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$. Справедливы утверждения:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся по отдельности ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ абсолютно сходится тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Теорема 2.9 (признак Лейбница)

Пусть для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n > 0$, выполняются условия:

1) слагаемые ряда убывают по модулю: $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда ряд сходится, а сумма ряда не превосходит модуль первого слагаемого: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \le a_1$.

★ Отметим *основные этапы решения задачи на сходимость* ряда.

1. Исследование сходимости действительных знакочередующихся и комплексных рядов (так же как и знакоположительных) стоит начинать с проверки необходимого признака сходимости (см. с. 47, теорема 2.6). Причем изучение сходимости комплексного ряда сводится к изучению сходимости двух действительных рядов. В силу теоремы 2.8 комплексный ряд расходится тогда и только тогда, когда расходится хотя бы один из составляющих его действительных рядов.

2. Далее, если необходимый признак сходимости выполняется, нужно посмотреть абсолютную сходимость ряда. Для ряда из модулей, как знакоположительного, подбираем один из признаков сходимости. Если абсолютная сходимость есть, то исследование закончено (в силу теоремы 2.7).

3. Если абсолютной сходимости нет, то исследуем ряд (или ряды) на условную сходимость, например по признаку Лейбница (теорема 2.9).

Пример. Исследовать сходимость следующих рядов:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\sin 3^n}{3^n}, \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{2n-1}{3n},$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n, \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{5n+2}\,+\,i\,\frac{\ln n}{n}\right).$$

Решение. 1). Заметим, прежде всего, что первый ряд является знакопеременным, но не знакочередующимся (поскольку выражение $\sin 3^n$ меняет знак нерегулярно). Рассмотрим предел общего члена ряда: $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\,\frac{\sin 3^n}{3^n}=0$, так как $(-1)^n\,\frac{1}{3^n}$ — бесконечно малая, а $\sin 3^n$ — ограниченная. Продолжим исследование: рассмотрим ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin 3^n|}{3^n}$. Ограничим общий член ряда:$\frac{|\sin 3^n|}{3^n}<\frac{1}{3^n}$. Поскольку ряд геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ сходится, то меньший ряд тоже сходится (признак сравнения знакоположительных рядов). Следовательно, первоначальный ряд сходится абсолютно.

2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{2n-1}{3n}$. Этот ряд является знакочередующимся. Проверим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\,\frac{2n-1}{3n}=\begin{cases}\ \ \frac{2}{3} & ;\ \ n=2k,\\ -\frac{2}{3} & ;\ \ n=2k+1.\end{cases}$$

То есть предел общего члена не существует, а значит ряд расходится.

3). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Ряд знакочередующийся. Ряд из модулей имеет вид: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, поэтому удобно его исследовать с помощью радикального признака Коши (в частности, необходимый признак сходимости проверять не будем).

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Следовательно, первоначальный ряд абсолютно сходится.

4). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{5n+2} + i\,\frac{\ln n}{n}\right)$. Ряд из действительных частей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+2}$ — знакочередующийся и сходится по признаку Лейбница. Действительно: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5n+2} = 0$, и последовательность $\frac{1}{5n+2}$ монотонно убывает. Абсолютной сходимости здесь нет, так как общий член ряда из модулей $\frac{1}{5n+2}$ эквивалентен (как бесконечно малая) общему члену расходящегося гармонического ряда $\frac{1}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Ряд из мнимых частей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ — знакоположительный, общий член его стремится к нулю. Для исследования сходимости применим признак сравнения (теорема 3.1): $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{\ln 2}{n}$ для $n \geq 2$. Для меньшего ряда имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{n} = \ln 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, значит он расходится. Следовательно, расходится ряд из мнимых частей. Вывод: весь комплексный ряд — расходящийся.

2.1.4. *Приближенное вычисление сумм числовых рядов*

[3]

До сих пор сумму числового ряда мы вычисляли по определению, что, во-первых, трудно и, во-вторых, в большинстве случаев невозможно. Но вычислять точное значение суммы, как правило, не нужно. Приближенное вычисление суммы ряда основано на том, что S есть предел частичных сумм S_N. Тогда S_N есть приближенное значение S с абсолютной погрешностью

$$|S - S_N| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n| = |R_N|.$$

Будем говорить, что *сумма ряда вычислена с точностью* ε, если абсолютная погрешность не превосходит ε, то есть: $|S - S_N| = |\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n| = |R_N| \leq \varepsilon$. Оценить абсолютную погрешность, значит оценить остаток ряда R_N по абсолютной величине. Числовые ряды R_N будем оценивать двумя способами. Для оценки остатка знакочередующегося ряда будем использовать теорему Лейбница (см. с.51, теорема 2.9); остаток знакоположительного ряда обычно оценивают с помощью бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

★ Пусть нужно найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с точностью ε. Для этого следует: 1) убедиться, что ряд сходится; 2) из неравенства $|R_N| \leq \varepsilon$ с помощью оценок

[3]Готфрид Вильгельм Лейбниц (G.W. Leibniz, 1646-1716), нем. философ, математик, физик, изобретатель, юрист, историк и языковед. Независимо от Ньютона (позднее его) создал дифференциальное и интегральное исчисление; первым опубликовал свое открытие, что породило длительный спор о приоритете.

найти N; 3) вычислить сумму N первых слагаемых S_N (учитывая накапливаемую погрешность округления и арифметических операций) и взять S_N в качестве приближенного значения для S.

П р и м е р 1 . Вычислить сумму ряда с точностью ε :

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)},\ \varepsilon=0,01\,;2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!},\ \varepsilon=0,001.$$

Р е ш е н и е . 1). Первый ряд является знакочередующимся сходящимся рядом, так как удовлетворяет условиям теоремы Лейбница (см. с.51, теорема 2.9). По заключению этой теоремы сумма знакочередующегося ряда не превосходит модуля своего первого слагаемого. Этот факт мы используем для оценки остатка ряда:

$$|R_N|=|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)}|\le|u_{N+1}|=\frac{2(N+1)+1}{(N+1)^3((N+1)+1)}.$$

Если мы потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{2(N+1)+1}{(N+1)^3((N+1)+1)}\le\varepsilon=0,01,$$

заданная точность будет достигнута. Из этого неравенства находим N. Проще всего это сделать подбором:

$$N=1,\ u_2=\frac{5}{24}\not\le\frac{1}{100};\qquad N=2,\ u_3=\frac{7}{27\cdot4}\not\le\frac{1}{100},\ \ldots$$
$$N=5,\ u_6=\frac{13}{216\cdot7}\le\frac{1}{100}\,.$$

Следовательно, для $N\ge5$ достигается точность $\varepsilon=0,01$. Понятно, что для вычисления частичной суммы достаточно взять 5 слагаемых:

$$S\approx S_5=\sum_{n=1}^{5}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)}\approx-1,73.$$

Вычисляя слагаемые частичной суммы в десятичных дробях, мы должны обеспечить один верный знак после запятой, то есть точность округлений и арифметических операций берем на порядок больше (этого, как правило, достаточно). Итак, в данном примере общая погрешность вычислений не должна превышать погрешности метода ($\varepsilon=0,01$), поэтому вычисляем слагаемые и сумму с точностью до трех знаков после запятой, а результат округляем до двух знаков. При этом гаранторованно верным является только первый знак: $S=-1,73\pm0,01$.

2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$, $\varepsilon = 0,001$. Этот ряд знакоположительный, сходящийся (например, по признаку Д'Аламбера, см. с. 47). Оценим остаток ряда суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Для этого заметим, что

$$\text{если } n = 2, \text{ то } u_2 = \frac{2^2}{(4)!} \le \frac{2^2}{4^2} = \frac{1}{2^2}; \text{ если } n = 3, \text{ то } u_3 = \frac{2^3}{(6)!} \le \frac{2^3}{4^3} = \frac{1}{2^3};$$

$$\text{если } n \ge 4, \text{ то } (2n)! = 1 \cdot \ldots \cdot \underbrace{n}_{\ge 4} \cdot \underbrace{(n+1)}_{\ge 4} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(2n)}_{\ge 4} \ge 4^{n+1},$$

$$\text{т.е. } u_n = \frac{2^n}{(2n)!} \le \frac{2^n}{4^{n+1}} \le \frac{1}{2^n}.$$

Таким образом, остаток ряда R_N, $N \ge 1$, оценивается рядом геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$:

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^N}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{2^N} \le \varepsilon = 0,001$. Тогда требуемая точность будет достигнута, начиная с $N = 10$. Теперь вычисляем частичную сумму S_{10}, гарантируя два верных знака после запятой:

$$S \approx S_{10} = \sum_{n=1}^{10} \frac{2^n}{(2n)!} \approx 1,6775 \approx 1,678.$$

★ Стоит заметить, что оценка остатка ряда может быть достаточно грубой (то есть завышенной), что приводит к суммированию большего количества слагаемых в частичной сумме. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 2. Оценить погрешность равенства $S \approx S_{10}$ для следующего числового ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} = S.$$

Решение. Погрешность и есть остаток ряда. Оценим его более аккуратно, чем в предыдущем примере. Если $n \ge 10$, то

$$(2n)! = 1 \cdot \ldots \cdot n(n+1) \cdot \ldots \cdot (2n) \ge 10^{n+1}, \text{ то есть } u_n = \frac{2^n}{(2n)!} \le \frac{2^n}{10^{n+1}} \le \frac{1}{5^n}.$$

Следовательно,

$$R_{10} = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} \le \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{\frac{1}{5^{11}}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4 \cdot 5^{10}} \le 10^{-7}.$$

Мы видим, что десять слагаемых в частичной сумме могут обеспечить 6 верных знаков после запятой. То есть реальная точность приближенной формулы $S \approx S_{10}$ гораздо выше, чем гарантированная в предыдущем примере. Но нужно учесть, что была поставлена обратная задача.

2.1.5. *Задачи для самостоятельного решения*

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$ по определению. Ответ: $\frac{7}{10}$.

2. Исследовать сходимость рядов:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2+(-1)^n}{n^3};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{(n-1)}+n-1};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!};$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)};\ 5)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;\ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+4)}.$$

Ответы: 1) сходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) расходится; 5) сходится; 6) расходится.

3. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ с заданной точностью $\varepsilon = 0,001$.

2.2. Функциональные ряды

2.2.1. *Область сходимости функционального ряда*

Если $u_n(x)$ — последовательность функций,определенных на некотором множестве X, то *функциональным рядом* называется выражение вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Пусть числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, составленный из значений $u_n(x)$ в точке x_0, сходится к числу $S(x_0)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *сходящимся* в этой точке, а сама точка x_0 есть *точка сходимости* функционального ряда.

Функция $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, определенная на множестве точек сходимости ряда, называется *суммой функционального ряда.*

Множество точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости.*

Множество точек x, для которых сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ (функции $u_n(x)$ знакопеременные), будем называть областью *абсолютной сходимости* функционального ряда. Область абсолютной сходимости содержится в области сходимости ряда (см. с. 51, теорема 2.7).

★ Задачу нахождения области сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ можно переформулировать как задачу исследования сходимости соответствующего числового ряда в зависимости от значения параметра x. Поэтому здесь используются признаки сходимости числовых рядов.

Пример. Найти область сходимости следующих функциональных рядов:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n^2};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}2n^2\sqrt{x-2}\ e^{\frac{-n^2}{(x-1)^3}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}.$$

Решение. 1). Отметим сначала, что область определения слагаемых ряда $u_n(x)=\frac{\sin^n x}{n^2}$ — вся действительная ось. Но для любого x верно неравенство:$|\frac{\sin^n x}{n^2}|\leq\frac{1}{n^2}$. По признаку сравнения (см. с.46 теорема 2.2), для всякого фиксированного x ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n^2}$ абсолютно сходится, так как сходится степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Значит, область сходимости, более того — абсолютной сходимости, вся действительная ось.

2). Область определения функций $u_n(x)=2n^2\sqrt{x-2}\ e^{\frac{-n^2}{(x-1)^3}}$ — луч $x\geq 2$. Тогда $\frac{-n^2}{(x-1)^3}<0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}2n^2\sqrt{x-2}\ e^{\frac{-n^2}{(x-1)^3}}=0$, для всякого $x\geq 2$. Таким образом, необходимый признак сходимости выполняется для всех допустимых значений параметра x. Теперь исследуем ряд на абсолютную сходимость, для чего применим радикальный признак Коши (см. с. 47, теорема 2.5):

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^2\sqrt{x-2}\ e^{\frac{-n}{(x-1)^3}}}=0<1 \text{ для любого } x\geq 2\ (\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1).$$

Таким образом, ряд абсолютно сходится на области определения $x\geq 2$.

3). Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$ область определения функций-слагаемых — вся действительная ось. Исследуем абсолютную сходимость ряда с помощью признака Д'Аламбера (см. с. 47, теорема 2.4):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|^{2(n+1)}2n}{2(n+1)|x-2|^{2n}}=|x-2|^2.$$

Если $|x-2|<1$, то ряд абсолютно сходится. Для x, таких, что $|x-2|>1$, ряд расходится, так как предел общего члена ряда не равен нулю (см. с.47 , теорема 2.6):

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{(x-2)^{2n}}{2n} = \infty.$$

Отдельно рассмотрим $x-2=\pm 1$. Подставим $x=3$ в первоначальный ряд, получим:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{2n}$ — сходящийся условно знакочередующийся ряд (см. с.51, теорема 2.9). При подстановке $x=1$ получим также ряд Лейбница, сходящийся условно: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{3n-1}\,\frac{1}{2n}$. Таким образом, область сходимости найдена – это отрезок $[1,3]$, а область абсолютной сходимости — открытый интервал $(1,3)$.

2.2.2. *Равномерная сходимость функционального ряда*

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ *равномерно сходится* к сумме $S(x)$ на множестве X, то есть для всякого положительного ε найдется натуральное $N(\varepsilon)$ такое, что для любого натурального n, большего, чем $N(\varepsilon)$ верно неравенство: $|S(x)-S_n(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon$ на всем множестве X. Символьная запись:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon):\quad \forall n>N\ \ |S(x)-S_n(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon\ ,\forall x\in X.$$

Известно, что равномерная (так же как абсолютная) сходимость на множестве X влечет сходимость ряда в каждой точке этого множества. Но абсолютная и равномерная сходимость не связаны причинно-следственной связью. Поэтому соотношение между областями сходимости разного сорта можно изобразить схематично диаграммой:

<table>
<tr><td colspan="3">область сходимости</td></tr>
<tr><td>область абсолютной сходимости (A)</td><td>$A\cap R$</td><td>область равномерной сходимости (R)</td></tr>
</table>

Сформулируем достаточный признак сходимости.

Теорема 2.10 (признак равномерной сходимости Вейерштрасса)

Пусть для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *существует такой числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *(называемый мажорирующим рядом или мажорантой), что* $|u_n(x)|\le a_n$, $\forall x\in X$, $\forall n\in\mathbb{N}$, *причем ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* X.

Отметим свойства равномерно сходящихся рядов.

Теорема 2.11 (о непрерывности суммы ряда)

Пусть выполнены условия:

а) функции $u_n(x)$ непрерывны на $[a;\, b]$;

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на этом отрезке.

Тогда сумма ряда $S(x)$ является непрерывной функцией на $[a;\, b]$.

Теорема 2.12 (о почленном интегрировании ряда)

Пусть выполнены условия:

а) функции $u_n(x)$ непрерывны на $[a;\, b]$;

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на $[a;\, b]$.

Тогда ряд можно почленно интегрировать:

$$\int\limits_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Теорема 2.13 (о почленном дифференцировании ряда)

Пусть выполнены условия:

а) функции $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемы (то есть функция $u_n(x)$ дифференцируема и ее производная $u_n'(x)$ непрерывна) на $[a;\, b]$;

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к $S(x)$ $\forall x \in [a;\, b]$;

в) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится на $[a;\, b]$.

Тогда сумма ряда $S(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и ряд можно почленно дифференцировать:

$$S'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

★ Исследование равномерной сходимости ряда будем проводить с помощью признака Вейерштрасса. Для этого необходимо сверху оценить функции-слагаемые ряда на некотором множестве независимо от x. Полученный оценкой числовой ряд (мажоранта) должен быть сходящимся.

П р и м е р 1 . Исследовать равномерную сходимость рядов на множестве:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+(nx)^2)} \quad \text{на интервале}\ (-\infty, +\infty);$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}\cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}} \quad \text{на отрезке}\ [0, 2].$$

Р е ш е н и е . 1). Подберем мажорирующий ряд. Так как для любого действительного x верно неравенство $1+(nx)^2 \geq 1$, то

$$\frac{1}{n^2(1+(nx)^2)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, поэтому функциональный ряд равномерно сходится на всей числовой прямой (по признаку Вейерштрасса, см. теорему 2.10). В частности, область сходимости и область равномерной сходимости здесь совпадают (это вся действительная ось).

2). Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}\cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}$ область определения функций-слагаемых — луч $x \geq -1$. Отрезок $[0,2]$ есть часть области определения и на этом отрезке верны неравенства:

$$|\cos nx| \leq 1;\ 1 \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{3};\ \sqrt[3]{n^5+1} \geq \sqrt[3]{n^5}, \text{т.е.} \left|\frac{\sqrt{x+1}\cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ с показателем $\frac{5}{3} > 1$ сходится, то первоначальный функциональный ряд равномерно сходится на множестве $[0,2]$.

П р и м е р 2 . Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ на равномерную сходимость на интервале $(-1,1]$.

Р е ш е н и е . Заметим, прежде всего, что если $|x|>1$, то ряд расходится (по необходимому признаку сходимости (см. с. 47, теорема 2.6), а если $|x|<1$, то сходится как ряд геометрической прогрессии (см., например, с.47, теорема 2.5). В граничной точке $x=1$ получается сумма из нулей, следовательно, это точка сходимости. Для $x=-1$ ряд расходится, так как нарушается необходимый признак сходимости. Итак, мы нашли область сходимости: $x \in (-1,1]$. [1] Далее, для всех $x \in (-1,1)$ можно вычислить сумму ряда как сумму геометрической прогрессии:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} x^n = (1-x)\frac{x}{1-x} = x.$$

Тогда сумма ряда $S(x)$ задается формулой

$$S(x) = x,\ \forall x \in (-1,1); S(1) = 0.$$

[1] Покажем, что на любом интервале $[-1+\delta, 1-\delta]$, $0<\delta<1$, ряд сходится равномерно. Действительно, так как $\forall x \in [-1+\delta, 1-\delta]$, $|x^n(1-x)| \leq (1-\delta)^n\, 2$, то , по признаку Вейерштрасса, функциональный ряд на указанном промежутке сходится равномерно (мажоранта $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\delta)^n\, 2$ — ряд бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

Если предположить, что на интервале $(-1,1]$ ряд сходится равномерно, то он сходится равномерно и на любом отрезке $[\alpha,1], -1<\alpha<1$. Но тогда выполнены все условия теоремы 2.11 на отрезке $[\alpha,1]$, поэтому сумма ряда $S(x)$ есть функция непрерывная на всем этом отрезке. Но это не так. То есть на интервале $(-1,1]$ равномерной сходимости нет.

★ В последней задаче для исследования равномерной сходимости была использована теорема 2.11 о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда. Причем рассуждение строилось от противного: поскольку заключение теоремы не выполнено, значит, нарушена одна из посылок, а именно, равномерная сходимость ряда на указанном множестве. То есть при решении подобных задач удобно использовать не только признак Вейершрасса, но и теоремы 2.11, 2.12, 2.13 (примеры использования других теорем можно посмотреть, например в [25]).

★ Будем говорить, что функциональный ряд можно почленно интегрировать или дифференцировать на множестве, если к нему возможно применить теоремы 2.12 или 2.13 на данном множестве.

Пример 3. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{n^5+x^2}$$

можно почленно интегрировать (в смысле теоремы 2.12).

Решение. Известно, что для любых чисел a и b верно неравенство $a^2+b^2\geq 2ab$. Тогда, если $a^2=n^5$, $b^2=x^2$, тогда для $x\neq 0$

$$n^5+x^2\geq 2n^{\frac{5}{2}}|x| \;\Rightarrow\; \frac{1}{n^5+x^2}\leq\frac{1}{2n^{\frac{5}{2}}|x|} \;\Rightarrow \left|\frac{nx}{n^5+x^2}\right|\leq\frac{n|x|}{2n^{\frac{5}{2}}|x|}=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

Но и для $x=0$ полученная оценка очевидно верна. По признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится всюду. Слагаемые ряда — непрерывные функции на всей действительной оси. Таким образом, все условия теоремы 2.12 выполнены, а значит, ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке.

Пример 4. Можно ли почленно дифференцировать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$$

на области сходимости, используя теорему 2.13?

Решение. Для применения теоремы 2.13 необходимо проверить ее условия. Условие а) — непрерывность слагаемых — выполнено на всей числовой

прямой. Условие б) — сходимость ряда (на всей числовой прямой) — следует из теоремы 2.2, с.46 (признак сравнения), так как

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2},$$

а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. Покажем, что последнее условие — в) нарушается. Рассмотрим ряд из производных: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos nx}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$. Он должен равномерно сходиться на $(-\infty, +\infty)$, но существуют точки, в которых он расходится: $x = 2\pi k$. То есть использовать теорему о почленном дифференцировании на области сходимости нельзя.

2.2.3. *Степенные ряды*

Степенны́м называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Здесь x, x_0 и коэффициенты a_n — вообще говоря, к о м п л е к с н ы е числа. Заменой $(x - x_0) = z$ можно привести ряд к более простому виду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Теорема 2.14 (об области сходимости степенного ряда)

Для всякого степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ существует число $R > 0$ (радиус сходимости ряда) такое, что на множестве $|x - x_0| < R$ ряд абсолютно сходится, на множестве $|x - x_0| > R$ — расходится, а в граничных точках $|x - x_0| = R$ может вести себя по-разному.

Если степенной ряд сходится только в точке x_0, то говорят, что его радиус сходимости равен нулю ($R = 0$).

Теорема 2.15 (о равномерной сходимости степенного ряда)

Действительный степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ равномерно сходится на любом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости ряда.

Следствие 1. Сумма степенного ряда является непрерывной функцией внутри его интервала сходимости.

Следствие 2. Степенной ряд можно почленно интегрировать, если пределы интегрирования лежат внутри его интервала сходимости и проинтегрированный

ряд будет равномерно сходиться в той же области, за исключением, может быть, граничных точек.

Следствие 3. Степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз внутри его интервала сходимости, и ряд из производных будет иметь тот же интервал сходимости, что и исходный, за исключением, может быть, граничных точек.

★ В силу теоремы 2.14 область сходимости степенного ряда отличается от области абсолютной сходимости разве что в граничных точках ($|x - x_0| = R$). А находить область абсолютной сходимости можно, используя признаки сходимости знакоположительных рядов (Д'Аламбера и Коши).[2] Исследование сходимости в граничных точках проводится отдельно подстановкой точек в ряд.

Пример 1. Найти круг сходимости комплекснозначного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+5i)^{2n+2}}{4^n(2n^2-1)} \ .$$

Решение. Для исследования абсолютной сходимости ряда используем признак Д'Аламбера (см. с.47 , теорема 2.4):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z+5i|^{2(n+1)+2}4^n(2n^2-1)}{4^{n+1}(2(n+1)^2-1)|z+5i|^{2n+2}} = \frac{|z+5i|^2}{4} < 1.$$

Полученное неравенство $|z + 5i| < 2$ задает на комплексной плоскости круг с центром в точке $z_0 = -5i$ радиуса 2. На границе этого круга $|z + 5i| = 2$ и ряд из модулей имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n^2-1)}$, но такой числовой ряд сходится. Итак, область сходимости ряда — круг на комплексной плоскости $|z + 5i| \le 2$.

Пример 2. Найти область сходимости действительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{3^n(n+1)}.$$

Вычислить с точностью $\varepsilon = 0,01$ сумму ряда в точках $x = 7 \pm \frac{R}{5}$, где R — радиус сходимости ряда.

Решение. Применим признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n(n+1)(x-7)^{n+1}}{3^{n+1}((n+1)+1)(x-7)^n}\right| = \frac{1}{3}|x-7| \ .$$

[2]можно использовать формулы-следствия этих признаков для нахождения радиуса сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$: $R^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ или $R^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Значит, в интервале $|x-7|<3$ ряд сходится. Рассмотрим граничные точки этого интервала: $x=4$, $x=10$. При подстановке их в степенной ряд получим числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$. Первый из этих рядов — знакочередующийся, удовлетворяющий теореме Лейбница (см.с.51, теорема 2.9), поэтому $x=4$ — точка сходимости. Второй ряд — расходящийся знакоположительный, то есть $x=10$ не входит в область сходимости. Интервал сходимости найден: $4\le x<10$. Теперь подставим в ряд точки $x=7\pm\frac{R}{5}=7\pm\frac{3}{5}$. Получим числовые ряды:

$$S(7+\frac{3}{5})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n(n+1)},\quad S(7-\frac{3}{5})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n(n+1)}.$$

Первый из этих рядов — знакоположительный, второй — знакочередующийся (оба сходятся, так как точка x находится внутри области сходимости). Приближенное вычисление сумм числовых рядов было описано в разделе 2.1.4 на странице 53. Для вычисления суммы знакоположительного ряда оценим его остаток R_N сверху рядом геометрической прогрессии:

$$R_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{5^n(n+1)}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{\frac{1}{5^{N+1}}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{5^N4}.$$

Потребуем, чтобы $\frac{1}{5^N4}\le\varepsilon=0,01$, тогда $N\ge 2$. Следовательно, для достижения указанной точности достаточно взять два слагаемых в частичной сумме:

$$S(7+\frac{3}{5})\approx S_2(7+\frac{3}{5})=\frac{1}{10}+\frac{1}{5^23}=0,11(3)\ .$$

Для второго (знакочередующегося ряда) оценка остатка ряда может быть проведена с помощью теоремы Лейбница (см. с. 51):

$$\big|R_N\big|=\Big|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n(n+1)}\Big|\le\frac{1}{5^{N+1}(N+1)}\le 0,01.$$

То есть для достижения точности 0,01 достаточно взять два слагаемых:

$$S(7-\frac{3}{5})\approx S_2(7-\frac{3}{5})=\frac{-1}{10}+\frac{1}{5^23}=-0,086\,.$$

П р и м е р 3. Найти сумму ряда

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n-1}=2+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{(n-1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n-1}.$$

Р е ш е н и е . Найдем интервал сходимости по признаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+\frac{1}{n+1})x^n}{(1+\frac{1}{n})x^{n-1}}\right| = |x| < 1\ .$$

Если $|x| = 1$, то ряд расходится (по необходимому признаку сходимости). Итак, область определения функции $S(x)$ — интервал $-1 < x < 1$. Заметим, что для $x \neq 0$ верно равенство:

$$S(x) = -x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n = -x^{-1}\overline{S(x)}\,, \text{где } \overline{S(x)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n.$$

Области определения $S(x)$ и $\overline{S(x)}$ совпадают. Вычислим сумму $\overline{S(x)}$. Для этого представим ряд в виде суммы рядов (также сходящихся на указанном интервале):

$$\overline{S(x)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n\,.$$

Первый ряд суммируем как ряд геометрической прогрессии: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-x)^n = \frac{-x}{1+x}$. Второй ряд, как любой степенной, можно почленно продифференцировать в области сходимости:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1} = \frac{-1}{1+x}.$$

Но тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n = \int\frac{-1}{1+x}\mathrm{d}x = -\ln(1+x) + C\,.$$

При подстановке $x = 0$ в левой части равенства получается 0, а в правой C, то есть $C = 0$. Мы нашли $\overline{S(x)} = \frac{-x}{1+x} - \ln(1+x)$. Но тогда $\forall x \neq 0,\ |x| < 1$

$$S(x) = -x^{-1}\overline{S(x)} = -x^{-1}\left(\frac{-x}{1+x} - \ln(1+x)\right) = \frac{1}{1+x} + x^{-1}\ln(1+x)\ .$$

Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x} + x^{-1}\ln(1+x)\right) = 2$ и $S(0) = 2$, то есть функция $S(x)$ определена и непрерывна на интервале $(-1, 1)$.

2.2.4. *Разложение функций в степенные ряды*

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots.$$

При $x_0 = 0$ получается ряд *Маклорена*. Если ряд Тейлора для функции $f(x)$ сходится к ней, то говорят, что функция *разложима* в ряд Тейлора.

Теорема 2.16 (о единственности разложения в степенной ряд)
Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

где стоящий справа ряд сходится в некоторой окрестности точки x_0 к функции $f(x)$. Тогда этот ряд является рядом Тейлора, то есть
$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

★ Сформулированная теорема утверждает, что найти разложение функции $f(x)$ в степенной ряд, значит найти разложение в ряд Тейлора. Но для нахождения коэффициентов ряда Тейлора необходимо уметь вычислить n-ю производную функции $f(x)$ в указанной точке x_0 для любого n. Часто эта задача трудна. Но есть другой способ: использовать уже готовые стандартные разложения простейших функций в ряд Маклорена (см. приложение на с. 128).

Пример 1. Разложить функцию в ряд Тейлора

$$f(x) = \frac{9x}{20 - x - x^2} \ a) \text{ по степеням } x, \ \text{б) по степеням } (x+1).$$

Решение. а). Для разложения этой дроби в ряд Маклорена представим ее в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{9x}{20 - x - x^2} = -x\frac{9}{(x-4)(x+5)} = -x\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+5}\right).$$

Каждую простейшую дробь подготовим к применению стандартного ряда геометрической прогрессии: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \ |q| < 1$.

$$\frac{1}{x-4} = \frac{1}{(-4)(1-\frac{x}{4})} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n, \ \left|\frac{x}{4}\right| < 1;$$

$$\frac{1}{x+5} = \frac{1}{5(1-\left(-\frac{x}{5}\right))} = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{5^n}, \ \left|\frac{x}{5}\right| < 1.$$

В общей части области сходимости $|x| < 4$ верны равенства

$$\frac{9x}{20 - x - x^2} = x\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^n} + x\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{5^{n+1}}\right)x^{n+1}.$$

В итоге получен ряд Маклорена для исходной функции.

б). Чтобы применить стандартные разложения (по степеням x), сделаем в заданной функции замену $y = x + 1$ (то есть $x = y - 1$) :

$$f(y) = \frac{9(y-1)}{20-(y-1)-(y-1)^2} = \frac{9y-9}{20+y-y^2}\,.$$

Далее алгоритм тот же, что и в пункте а). Раскладываем дробь в сумму элементарных дробей:

$$\frac{9y-9}{20+y-y^2} = \frac{9y-9}{(5-y)(4+y)} = \frac{4}{5-y} + \frac{-5}{4+y}\,.$$

Каждое слагаемое раскладываем по степеням y, используя геометрическую прогрессию:

$$\frac{4}{5-y} = \frac{4}{5(1-\frac{y}{5})} = \frac{4}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{5^n},\ |y| < 5\,,$$

$$\frac{-5}{4+y} = \frac{-5}{4(1-(-\frac{y}{4}))} = -\frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^n}{4^n}\,,\ |y| < 4.$$

В области сходимости $|y| < 4$ получаем:

$$\frac{9y-9}{20+y-y^2} = \frac{4}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{5^n} + \frac{-5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n y^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}5}{4^{n+1}}\right)y^n\,.$$

Таким образом, после обратной замены получаем разложение первоначальой функции по степеням $x+1$ в области $|x+1| < 4$:

$$\frac{9x}{20-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}5}{4^{n+1}}\right)(x+1)^n\ .$$

П р и м е р 2 . Разложить в ряд Тейлора функцию

$$f(x) = x\sin^2 x + 1\ \ a)\ \text{по степеням}\, x,\ \ б)\ \text{по степеням}\,(x - \frac{\pi}{4}).$$

Р е ш е н и е . а). Сначала запишем функцию в более удобном виде:

$$f(x) = x\sin^2 x + 1 = \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos 2x + 1\,.$$

Сумма $\frac{x}{2} + 1$ уже состоит из степеней x. Для разложения функции $\cos 2x$ воспользуемся стандартным разложением: $\cos y = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}$, $y \in \mathbb{R}$. В нашем случае $y = 2x$, поэтому для $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos 2x + 1 = \frac{x}{2} + 1 - \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n)!}\ .$$

б). Для разложения по степеням $(x-\frac{\pi}{4})$ вновь сделаем замену переменной: $y=x-\frac{\pi}{4}$. Тогда раскрываем скобки и используем формулу приведения:

$$f(y)=\frac{y+\frac{\pi}{4}}{2}+1-\frac{(y+\frac{\pi}{4})}{2}\cos 2(y+\frac{\pi}{4})=\frac{y}{2}+\frac{\pi}{8}+1+\frac{y}{2}\sin 2y+\frac{\pi}{8}\sin 2y$$

Далее применим стандартное разложение $\sin 2y$

$$f(y)=\frac{y}{2}+\frac{\pi}{8}+1+\frac{y}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2y)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{\pi}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2y)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

и сгруппируем слагаемые по одинаковым степеням y :

$$f(y)=\frac{\pi}{8}+1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)y+y^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{4}y^{2n+1}+y^{2n+2}\right).$$

Итак, после обратной замены получим для $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{\pi}{8}+1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)(x-\frac{\pi}{4})+(x-\frac{\pi}{4})^2+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{4}(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}+(x-\frac{\pi}{4})^{2n+2}\right).$$

П р и м е р 3 . Разложить в ряд Тейлора функцию

$$f(x)=x^2\sqrt{4-5x}\text{ по степеням }x.$$

Р е ш е н и е . В этой задаче применим стандартное разложение

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\,,\ |x|<1$$

для $\alpha=\frac{1}{2}$. Подсчитаем коэффициенты ряда для $n\geq 1$:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)\,.$$

Преобразуем функцию и используем известное разложение:

$$f(x)=x^2\sqrt{4-5x}=2x^2\sqrt{1+\left(-\frac{5x}{4}\right)}=$$

$$=2x^2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}1\cdot 3\cdot\ldots(2n-3)\left(-\frac{5x}{4}\right)^n\right)=$$

$$=2x^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n 2}{8^n n!}1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)x^{n+2}.$$

Разложение имеет место, если $\left|-\frac{5x}{4}\right|<1$, т.е. для $|x|<\frac{4}{5}$.

2.2.5. *Применение рядов Тейлора*

I. Вычисление значений функций. Если функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 разложена в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, то для точки x_1 из области сходимости ряда $f(x_1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n$. То есть для вычисления значения функции нужно вычислить сумму числового ряда. Приемы оценки остатка ряда и примеры рассмотрены на с. 53.

Пример. Вычислить $\frac{1}{\sqrt{e}}$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

Решение. Для функции $f(x) = e^x$ имеем $\frac{1}{\sqrt{e}} = f(-\frac{1}{2})$. Ряд Маклорена для этой функции имеет вид: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$. Поскольку $-\frac{1}{2}$ содержится в области сходимости, то верно равенство

$$e^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}\,.$$

Оценим остаток знакочередующегося числового ряда (см. с. 51, теорема 2.9):

$$|R_N| \le u_{N+1} = \frac{1}{2^{N+1}(N+1)!} \le 0,01.$$

Из неравенства подбором находим $N \ge 3$. Окончательно получим

$$e^{-\frac{1}{2}} \approx \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{2^n n!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{48} \approx 0,542\ .$$

Алгоритм обеспечивает один верный знак после запятой.

II. Вычисление интегралов. Разложение функции в степенной ряд позволяет интегрировать функцию, почленно интегрируя ее ряд в области сходимости (независимо от того возможно ли найти первообразную исходной функции).

Пример.Вычислить приближенное значение интеграла $\int_{0,2}^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Указать число членов ряда, взятых в частичную сумму для достижения нужной точности на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Решение. Заметим сначала, что подынтегральная функция не определена в точке $x_0 = 0$, но предел в этой точке существует и равен 1. Значит, в окрестности $x_0 = 0$ подынтегальная функция раскладывается в ряд Тейлора. Найдем этот степенной ряд с помошью стандартного разложения

$\ln(1+y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}, y \in (-1;\, 1)$. Положим $y = x^2$, тогда

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2(n+1)}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n+1}\,, x \in (-1;\, 1)\,.$$

Теперь, учитывая, что промежуток интегрирования находится в области сходимости, находим интеграл, почленно интегрируя ряд

$$\int_{0,2}^{0,5}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0,2}^{0,5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{0,2}^{0,5}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n+1}\mathrm{d}x\,.$$

Мы свели задачу к вычислению первообразной степенной функции и приближенному вычислению сумм двух числовых рядов:

$$\int_{0,2}^{0,5}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)}\Big|_{0,2}^{0,5} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(0,5)^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(0,2)^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)}\,.$$

Оба числовых ряда — знакочередующиеся ряды Лейбница. Согласно теореме Лейбница количество слагаемых $N = 2$ в частичной сумме для первого ряда находим подбором из неравенства

$$\frac{(0,5)^{2(N+1)+1}}{((N+1)+1)(2(N+1)+1)} < 10^{-3}\,.$$

Для второго ряда аналогичное неравенство

$$\frac{(0,2)^{2(N+1)+1}}{((N+1)+1)(2(N+1)+1)} < 10^{-3}$$

дает значение $N = 1$. Таким образом, с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ получаем

$$\int_{0,2}^{0,5}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x \approx \sum_{n=0}^{2}\frac{(-1)^n(0,5)^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)} - \sum_{n=0}^{1}\frac{(-1)^n(0,2)^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)} \approx 0,1211\,.$$

В ответе гарантированы два верных знака после запятой.

III. Решение дифференциальных уравнений. Решение многих нетривиальных дифференциальных уравнений можно найти в виде ряда. Например, в виде ряда Тейлора (или его частичной суммы). *Метод последовательного дифференцирования* применяется для дифференциальных уравнений

(ДУ), разрешенных относительно старшей производной, при наличии начальных условий.

П р и м е р. Представить в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y' = y^2 + x^3$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$. Найти пять членов ряда.

Р е ш е н и е . Поскольку начальное условие задано в нуле, ищем решение в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + y'(0)\frac{x}{1!} + y''(0)\,\frac{x^2}{2!} + y'''(0)\,\frac{x^3}{3!} + y^{\text{IV}}(0)\,\frac{x^4}{4!} + \dots$$

Первое слагаемое находим из начального условия: $y(0) = 1$. Далее, из ДУ $y'(0) = y^2(0) + 0 = 1$.

Дифференцируем ДУ, учитывая, что $y^2(x)$ — сложная функция: $y'' = 2yy' + 3x^2$. Подставляем $x = 0$: $y''(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0^2 = 2$. И так далее:
$y''' = 2y'y' + 2yy'' + 6x, \quad y'''(0) = 6;$
$y^{\text{IV}} = 2\big(2y'y'' + yy''' + y'y'' + 3\big), \quad y^{\text{IV}}(0) = 0.$

Искомое решение ДУ в окрестности нуля:

$$y(x) \approx 1 + 1 \cdot x + \frac{2}{2!}\,x^2 + \frac{6}{3!}\,x^3 + \frac{30}{4!}\,x^4 = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{5}{4}\,x^4.$$

2.2.6. *Задачи для самостоятельного решения*

1. Найти область сходимости рядов, исследовать их на абсолютную сходимость ($x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$).

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}\ ;\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^x\ ;\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}(z-4)^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}.$$

Ответ: 1) абсолютно сходится на $\mathbb{R}$; 2) сходится при $x \in (0, +\infty)$, абсолютно сходится при $x \in (1, +\infty)$; 3)абсолютно сходится в области $|z - 4| < \frac{1}{2}$.

2. Найти области сходимости и равномерной сходимости действительных рядов.

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}.$$

Ответ: 1) равномерно сходится при $x \in \mathbb{R}$; 2) области сходимости и равномерной сходимости совпадают: $x \in [0, +\infty)$.

3. Разложить функции в ряд Тейлора по степеням x.

$$1)\sin^2 x;\ 2)\frac{3}{1 + x - 2x^2};\ 3)\ \ln(1 + x - 2x^2).$$

Ответ: 1) $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n 2^{n+1})x^n$, $|x| < \frac{1}{2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{n}x^n$, $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$.

4. Вычислить интеграл с точностью $0,001$:

$$\int\limits_0^{0,3}\frac{\ln(1+t)}{t}dt.$$

Ответ:0,28.

5. Найти первые 5 членов разложения решения ДУ в степенной ряд:

$$y'' = y\cos x + x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Ответ: $y(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{5x^6}{6!} + \ldots$.

2.3. Тригонометрические ряды Фурье

2.3.1. *Разложение периодических функций*

Если в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ имеет место равенство

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x + b_n\sin n\omega x),$$

то функциональный ряд в правой части равенства называется *тригонометрическим рядом Фурье* функции $f(x)$, а сама функция называется *разложимой* в ряд Фурье.

Пусть $f(x)$ произвольная периодическая функция с периодом 2ℓ. Тогда возможность разложения ее в ряд Фурье и вид этого ряда описываются в двух следующих теоремах.

Теорема 2.17 (Дирихле)

Если $f(x)$ — $2\ell-$периодическая функция, кусочно непрерывная , кусочно монотонная и ограниченная на отрезке $[-\ell,\ell]$, то для некоторого набора коэффициентов a_n, b_n, ω

1) в каждой точке непрерывности x_0 функции $f(x)$ верно равенство

$$f(x_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x_0 + b_n\sin n\omega x_0);$$

2) в каждой точке x_0 разрыва функции $f(x)$ сумма ряда Фурье $S(x)$ равна среднему арифметическому пределов функции слева и справа, т.е.

$$S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0-0) + f(x_0+0));$$

3) ряд Фурье функции $f(x)$ можно почленно интегрировать.

Теорема 2.18 (о коэффициентах ряда Фурье)
Если функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то коэффициенты ее ряда Фурье вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos n\omega x \mathrm{d}x, \quad n \geq 1;$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin n\omega x \,\mathrm{d}x, \quad n \geq 1; \tag{2.1}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \ \omega = \frac{\pi}{\ell}.$$

П р и м е р. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 1\ , \ x\in & [-2\pi;-\pi), \\ 2\ , \ x\in & [-\pi;2\pi) \end{cases}$ с периодом $T = 2\ell = 4\pi$.

Р е ш е н и е . Заметим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, значит, раскладывается в тригонометрический ряд Фурье. Подсчитаем коэффициенты Фурье.

Круговая частота $\omega = \frac{\pi}{\ell} = \frac{1}{2}$, поэтому по формулам (2.1) из теоремы 2.18 имеем (для $n \neq 0$)

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\cos\frac{n}{2}x\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-2\pi}^{-\pi} 1\cdot\cos\frac{n}{2}x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-\pi}^{2\pi} 2\cdot\cos\frac{n}{2}x\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\sin\frac{n}{2}x}{n}\Big|_{-2\pi}^{-\pi} + 2\,\frac{2\sin\frac{n}{2}x}{n}\Big|_{-\pi}^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[-\sin\frac{\pi n}{2} + \sin\pi n + 2\sin\pi n + 2\sin\frac{\pi n}{2}\right] = \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n}.$$

Отдельно вычислим нулевой коэффициент Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi}\left[\int\limits_{-2\pi}^{-\pi} 1\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-\pi}^{2\pi} 2\,\mathrm{d}x\right] = \frac{7}{4}\,.$$

Аналогично,

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\sin\frac{n}{2}x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-2\pi}^{-\pi} 1\cdot\sin\frac{n}{2}x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-\pi}^{2\pi} 2\cdot\sin\frac{n}{2}x\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{2\cos\frac{n}{2}x}{n}\Big|_{-2\pi}^{-\pi} - 2\,\frac{2\cos\frac{n}{2}x}{n}\Big|_{-\pi}^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[-\cos\frac{\pi}{2}n + \cos\pi n - 2\cos\pi n + 2\cos\frac{\pi}{2}n\right] = \frac{(-1)^{n+1} + \cos\frac{\pi n}{2}}{\pi n}$$

Таким образом, ряд Фурье принимает вид:

$$f(x) = \frac{7}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n}\cos\tfrac{n}{2}x + \frac{(-1)^{n+1} + \cos\frac{\pi n}{2}}{\pi n}\,\sin\tfrac{n}{2}x\right).$$

Напомним, что знак равенства между функцией $f(x)$ и суммой ее ряда Фурье можно поставить в точках непрерывности $f(x)$. В точках разрыва x_0 сумма ряда равна $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ — полусумме ординат слева и справа от точек разрыва.

★ В вычислениях часто используют тригонометрические равенства:

$$\sin\pi n = 0;\quad \cos\pi n = (-1)^n; \tag{2.2}$$

$$\cos\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^k, & \text{если } n = 2k\ , \\ 0, & \text{если } n = 2k+1; \end{cases} \qquad \sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k\ , \\ (-1)^k, & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$$

2.3.2. *Разложение четных и нечетных периодических функций*

I. Функция $f(x)$ — ч е т н а я, 2ℓ-периодическая. Тогда, используя свойства интегралов от четных и нечетных функций, имеем

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\mathrm{d}x,\ a_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\cos n\omega x\,\mathrm{d}x \text{ для } n > 0\,;\ b_n = 0 \text{ для } n \geq 1. \tag{2.3}$$

Итак, ряд Фурье для четной функции не содержит синусов:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\omega x.$$

II. Функция $f(x)$ — н е ч е т н а я, 2ℓ-периодическая. Тогда

$$a_n = 0 \text{ для } n \geq 0\,;\ b_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\sin n\omega x\,\mathrm{d}x \text{ для } n \geq 1. \tag{2.4}$$

И ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega x.$$

П р и м е р. Разложить периодические с периодом $T = 2\pi$ функции в ряд Фурье:
1) $f_1(x) = x,\ \ x \in (-\pi,\, \pi)$; 2) $f_2(x) = |x|,\, x \in (-\pi,\, \pi)$.

1). Функция $f_1(x)$ нечетная периодическая, частота $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Все коэффициенты при косинусах обратятся в нуль: $a_n = 0,\ n \geq 0$. Вычисляем коэффициенты при синусах по формулам (2.4), интегрируя по частям и применяя (2.2):

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f_1(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x = -2\,\frac{\cos\pi n}{n} = -\,\frac{2}{n}\,(-1)^n = \frac{2}{n}\,(-1)^{n+1}.$$

Итого, ряд Фурье функции $f_1(x)$ имеет вид:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\sin nx. \tag{2.5}$$

График суммы ряда представлен на рис. 2.1, a). Для всех значений x, за исключением точек разрыва, сумма ряда Фурье совпадает со значениями $f_1(x)$.

2). Для четной функции $f_2(x)$ период $T = 2\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Все коэффициенты при синусах равны нулю: $b_n = 0$. Коэффициенты при косинусах вычисляем по формулам (2.3), применяя (2.2)

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f_2(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k\ ,\ (n \neq 0) \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{если } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Итого, ряд Фурье функции $f_2(x)$ имеет вид:

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\,\cos(2k+1)x. \tag{2.6}$$

График суммы ряда представлен на рис. 2.1, b). Во всех точках, в силу непрерывности, сумма ряда Фурье совпадает со значениями $f_2(x)$.

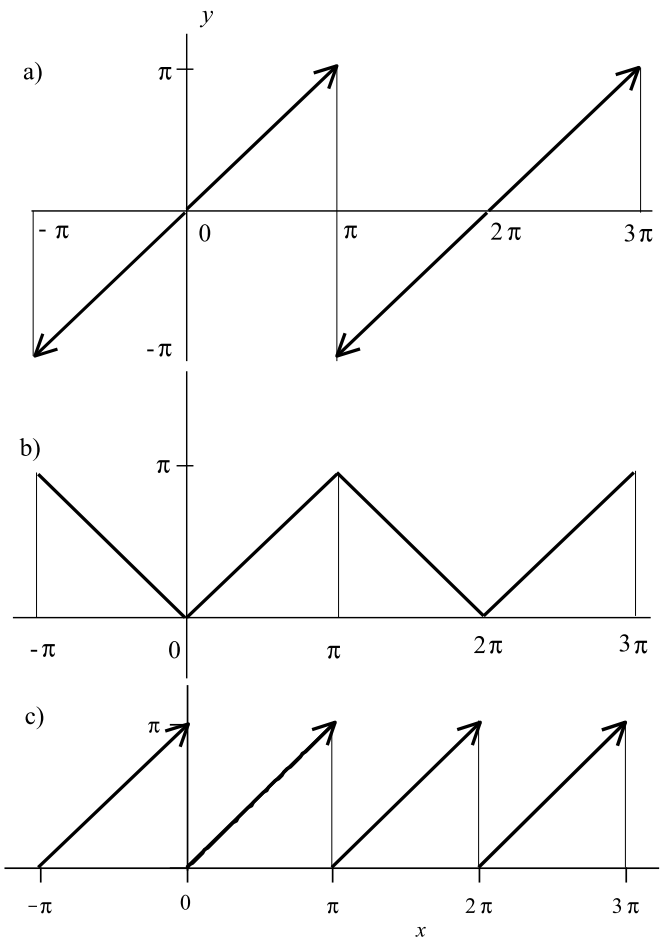

Рис. 2.1. Графики сумм рядов Фурье для нечетной функции $f_1(x)$ (a), четной функции $f_2(x)$ (b)и для функции общего вида $f_3(x)$ (c)

2.3.3. *Разложение непериодических функций*

Функция $f(x)$ — непериодическая, определенная на конечном интервале. Тогда возможны следующие случаи:
1) $f(x)$ задана на $[a,\, b]$. Можно построить периодическую с периодом $T = b - a$ функцию, совпадающую с $f(x)$ на интервале $[a,\, b]$.
2) $f(x)$ задана на $[0,\, \ell]$. В этом случае для периодического продолжения появляются несколько возможностей:

- поступить согласно случаю 1);
- продолжить функцию ч е т н о, а затем периодически. Тогда период новой функции $T = 2\ell$, в ряд Фурье войдут только косинусы;
- продолжить функцию н е ч е т н о, а затем периодически. Период новой функции $T = 2\ell$, в ряд войдут только синусы.

П р и м е р. Разложить функцию $f(x) = x,\ x \in [0,\, \pi)$, в ряд Фурье а) по синусам; б) по косинусам; в) продолжив периодически как функцию общего вида.

Р е ш е н и е . а). Доопределим функцию на интервале $(-\pi; \pi)$ нечетным образом и продолжим ее периодически с периодом $T = 2\pi$. Тогда получим в точности $f_1(x)$ из предыдущего примера (с. 75). Разложение в ряд Фурье нечетной функции не содержит косинусов. Итак, получено нужное разложение в ряд Фурье по синусам и

$$f(x) = f_1(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \ \text{ для всякого } x \in [0,\, \pi)\ .$$

б). Вновь доопределим функцию на интервале $(-\pi; \pi)$ четным образом и, продолжив периодически, получим $f_2(x)$ из предыдущего примера (с. 75). Для $f_2(x)$ получено разложение по косинусам кратных дуг и

$$f(x) = f_2(x) = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x \text{ для всякого } x \in [0,\, \pi).$$

в). Функцию $f(x) = x,\ x \in [0,\, \pi)$, продолжаем периодически на всю действительную ось с периодом $T = \pi$. Тогда полупериод $\ell = \frac{\pi}{2}$, частота $\omega = \frac{\pi}{\ell} = 2$. Полученное продолжение $f_3(x)$ не является ни четной, ни нечетной функцией. Значит, разложение в ряд Фурье содержит ненулевые коэффициенты и при косинусах и при синусах кратных дуг. Вычислим их:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos 2nx \mathrm{d}x = 0,\ n > 0\ , a_0 = \frac{\pi}{2}\ ,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x \sin 2nx \mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\,.$$

Однако тот факт, что все коэффициенты $a_n = 0, n > 0$, можно было заметить сразу. Действительно, функция $f_3(x) - \frac{\pi}{2}$ является нечетной (график $f_3(x)$ симметричен относительно точки $(0, \frac{\pi}{2})$, см. рис. 2.1 (с)). Поэтому ряд Фурье для функции $f_3(x) - \frac{\pi}{2}$ имеет вид: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx$ и в точках непрерывности $f_3(x)$ имеет место равенство

$$f_3(x) - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx \ \Rightarrow\ f_3(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx \ \Rightarrow\ a_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Остальные коэффициенты b_n просчитываются по формуле (2.4). В результате имеем

$$f(x) = f_3(x) = x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2nx \text{ для всякого } x \in [0,\, \pi).$$

Вид различных продолжений функции $f(x)$ представлен на рис. 2.1.

2.3.4. *Вычисление сумм числовых рядов*

★ Вычислить сумму числового ряда можно приближенно (см. стр. 53) и точно. Для точного вычисления используем разложения функций в ряд Тейлора (см. пример на с. 69) или в ряд Фурье. [1] При этом можно использовать уже известные разложения (см. приложения на с.128).

П р и м е р . Найти суммы числовых рядов:

$$1)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2};\ 2)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\sin 3k}{k}.$$

Р е ш е н и е .1). Используем полученное на стр.75 разложение (2.6) функции $f_2(x) = |x|, -\pi \le x \le \pi$ (см. также приложение на с.128)

$$f_2(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\ \cos(2k+1)x, \forall x \in [-\pi, \pi].$$

При $x = \pi$ имеем:

$$f_2(\pi) = \pi = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\ \underbrace{\cos(2k+1)\pi}_{=-1},$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \ = \ \frac{\pi^2}{8}.$$

2). Для второго ряда используем разложение (2.5), полученное на с.75, функции $f_1(x) = x, -\pi < x < \pi$ (см. также приложение на с.128):

$$f_1(x) = x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n} + \ldots\right), \forall x \in (-\pi, \pi).$$

При $x = 3$ имеем

$$f_1(3) = 3 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\sin 3k}{k},$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\sin 3k}{k} = \frac{3}{2}.$$

[1] Заметим, что точно вычислить сумму можно и по определению, см. пример 2 на с. 43.

2.3.5. *Задачи для самостоятельного решения*

1. Разложить периодическую с периодом T функцию $f(x)$ в ряд Фурье, найти значения $S(x)$ суммы полученного ряда в заданных точках x_1, x_2.

$$1)\, f(x) = 10 - x,\ x \in (5, 15),\, T = 10,\, x_1 = 15,\, x_2 = 20;$$

$$2)\, f(x) = x^2,\, x \in (-\pi, \pi),\, T = 2\pi,\, x_1 = 0,\, x_2 = 2\pi;$$

$$3)\, f(x) = \left\{ \begin{smallmatrix} -1\ , & -3<x\leq 0, \\ 1\ , & 0<x\leq 3; \end{smallmatrix} \right.\ T = 6,\ x_1 = 0,\ x_2 = -3.$$

Ответ: 1) $\frac{10}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5},\ S(15) = S(20) = 0;$

2) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ S(0) = 0, S(2\pi) = \frac{\pi^2}{8};$

3) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{3},\ S(0) = S(-3) = 0.$

2. Используя разложения в тригонометрический ряд Фурье, найти суммы числовых рядов.

$$1)\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},\ \ 2)\ \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(4n+1)^2(4n+3)^2}.$$

Ответ: 1) $\frac{\pi}{4}$, 2) $\frac{\pi^2}{32\sqrt{2}}$.

Глава 3

ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Несобственные интегралы

3.1.1. *Определение несобственных интегралов*

Предельную точку x_0 области определения функции $f(x)$ будем называть особой точкой *первого* рода, если $x_0 = \infty$. Если же x_0 — конечное число и $f(x_0 - 0) = \infty$ или $f(x_0 + 0) = \infty$, то x_0 — особая точка *второго* рода .

Для определенного (собственного) интеграла нет особых точек подынтегральной функции на промежутке интегрирования. Введем понятие несобственного интеграла, обобщающее понятие определенного интеграла для случая, когда на промежутке интегрирования есть особая точка.

Сначала закрепим обозначения для нового понятия. Если b (или a) — особая точка первого рода (b или a есть ∞), то обозначение $\int\limits_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ (или $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$) прочитывается как *несобственный интеграл первого рода* [1]. Соответственно, если b (или a или $c \in (a, b)$) — особая точка второго рода, то обозначение $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ прочитывается как *несобственный интеграл второго рода* [2].

Пусть на промежутке интегрирования имеется единственная особая точка. Рассмотрим возможные варианты расположения ее в промежутке $[a, b]$: либо особая точка совпадает с одним из концов интервала (a или b), либо является внутренней конечной точкой. Но тогда, с учетом типа особой точки (первого или второго рода), будем иметь пять вариантов расположения. Добавим еще два варианта: обе точки a и b — особые одинакового типа. Для каждого из вариантов дается определение *несобственного интеграла*, как предела в особой точке определенных интегралов с переменными пределами. Сведем подробное определение несобственных интегралов различных типов в таблицу (особую точку помечаем кружком). При этом предполагаем, что функция $f(x)$ интегрируема по любому

[1] Его называют также *несобственным интегралом по бесконечному промежутку.*
[2] Его называют также *несобственным интегралом от неограниченной функции.*

отрезку $[d,h] \subset (a,b)$, не содержащему особые точки.

Определение несобственных интегралов

	Интегралы I рода	Интегралы II рода
$\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x$	$\int\limits_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{z\to\infty} \int\limits_a^{z} f(x)\mathrm{d}x$	$\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$
$\int\limits_{\textcircled{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x$	$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{z\to-\infty} \int\limits_z^{b} f(x)\mathrm{d}x$	$\int\limits_{\textcircled{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$
$\int\limits_{\textcircled{a}}^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x,$ $c \in (a,b)$	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{z_1\to-\infty \\ z_2\to+\infty}} \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x)\mathrm{d}x =$ $= \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$	$\int\limits_{\textcircled{a}}^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to+0 \\ \varepsilon_2\to+0}} \int\limits_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\mathrm{d}x =$ $= \int\limits_{\textcircled{a}}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x$
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x,$ $\textcircled{c} \in (a,b)$	—	$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^{\textcircled{c}} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{\textcircled{c}}^{b} f(x)\mathrm{d}x =$ $= \lim\limits_{\varepsilon_1\to+0} \int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim\limits_{\varepsilon_2\to+0} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$

Если предел $\lim\limits_{z\to b-0} \int\limits_a^z f(x)\mathrm{d}x$ $(\lim\limits_{z\to a+0} \int\limits_z^b f(x)\mathrm{d}x)$ существует и равен конечному числу, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x$ $(\int\limits_{\textcircled{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x)$ называется *сходящимся*; если же этот предел не существует или бесконечен, то интеграл *расходится*. Для 3-го и 4-го случаев из таблицы сходимость интеграла по отрезку $[a,b]$ означает сходимость о б о и х слагаемых в правой части . Если на отрезке интегрирования границы a и b являются особыми точками разного типа, то $\int\limits_{\textcircled{a}}^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\textcircled{a}}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x$, где c – некоторая точка из (a,b), причем инте-

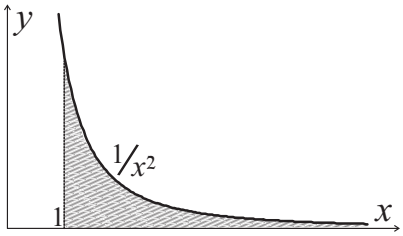

Рис. 3.1. Бесконечно протяженная фигура под кривой $y = 1/x^2$, имеющая площадь, равную единице

грал слева сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба интеграла в правой части.

На отрезке $[a, b]$ может быть k ($k \geq 1$) особых точек x_i (особые точки могут быть внутренними и разных типов): $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k \leq b$. Тогда несобственный интеграл по отрезку $[a, b]$ есть сумма несобственных интегралов типа 1) – 4) из таблицы (либо с особыми точками разного типа на границах интервала интегрирования) и сходится он тогда и только тогда, когда сходятся все интегралы суммы:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \ldots + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{x_k}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

★ Используя определение несобственного интеграла, можно найти его значение, вычислив соответствующий предел в особой точке. При этом, исследование нужно начинать с нахождения особых точек на отрезке интегрирования.

П р и м е р Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,;\ 2) \int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,;\ 3) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Р е ш е н и е . Очевидно, что в первых двух случаях на отрезках интегрирования по одной особой точке. В задаче 3) их две: $-\infty, \infty$. В каждом из случаев представляем несобственный интеграл как соответствующий предел.

1). $\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{z\to\infty} \int\limits_1^{z} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{z\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^z \right) = \lim\limits_{z\to\infty} \left(-\frac{1}{z} + 1 \right) = 1$. Поэтому интеграл с х о д и т с я. Бесконечно длинная криволинейная трапеция имеет к о н е ч н у ю площадь! (рис. 3.1).

2). $\int\limits_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{z\to +0} \int\limits_z^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{z\to 0} \left(-\frac{1}{x}\Big|_z^1 \right) = \lim\limits_{z\to 0} \left(-1 + \frac{1}{z} \right) = \infty$. Интеграл р а с х о д и т с я. Геометрически это означает, что вертикальная область (см. рис.3.1), ограниченная осью OY, отрезком $[0, 1]$ оси OX и графиком функции, имеет бесконечную площадь, несмотря на то, что OY асимптота графика $y = \frac{1}{x^2}$.

3). Представим интеграл в виде суммы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x \, \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} \sin x \, \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Уже первый из этих интегралов расходится, поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \sin x \, \mathrm{d}x = \lim_{z \to -\infty} \int\limits_{z}^{0} \sin x \, \mathrm{d}x = \lim_{z \to -\infty} (-1 + \cos z)$$

и предел не существует. Поэтому расходится и весь интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$.

3.1.2. *Главное значение несобственного интеграла*

Сходимость несобственного интеграла по определению в 3-м и 4-м случаях (см табл. на с.81) означает существование предела функции двух переменных $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Если переменные приравнять $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon)$, то предел будет зависеть от одной переменной (ε). В этом случае мы получаем другое, более слабое, понятие сходимости: говорят, что несобственный интеграл сходится в смысле главного значения (V.p.), если

$$\text{V.p.} \int\limits_{a}^{b} f(x) \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) \mathrm{d}x,$$

или

$$\text{V.p.} \int\limits_{a}^{b} f(x) \mathrm{d}x = \text{V.p.} \left(\int\limits_{a}^{c} f(x) \mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{b} f(x) \mathrm{d}x \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x) \mathrm{d}x + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x) \mathrm{d}x \right)$$

и соответствующие пределы существуют.

Пример 1. Вычислить в смысле главного значения интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$.

Решение.

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, \mathrm{d}x = \lim_{z \to +\infty} \int_{-z}^{z} \underbrace{\sin x}_{\substack{\text{нечет.} \\ \text{функция}}} \mathrm{d}x = 0.$$

Итак, в смысле главного значения интеграл сходится, будучи расходящимся в обычном понимании (см. с.83).

П р и м е р 2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$.

Р е ш е н и е. Интеграл — несобственный II рода, поскольку в точке $x=0$ подынтегральная функция не ограничена. Тогда, по определению (4-й случай таблицы на с. 81) имеем: $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}=\int\limits_{-1}^{\textcircled{0}}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}+\int\limits_{\textcircled{0}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$.

Уже первый из интегралов расходится:

$$\int\limits_{-1}^{\textcircled{0}}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}=\lim_{z\to-0}\int_{-1}^{z}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}=\lim_{z\to-0}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{-1}^{z}=\infty,$$

а потому расходится и весь интеграл.

Но в смысле главного значения интеграл сходится:

$$\text{V.p.}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{\varepsilon}^{1}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varepsilon^2}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\big(0\big)=0.$$

Заметим, что если несобственный интеграл сходится в обычном понимании, то он сходится и в смысле главного значения, причем результаты совпадают. Обратное, вообще говоря, неверно.

3.1.3. *Вычисление несобственных интегралов*

I. Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

Пусть для функции $f(x)$ на интервале (a,b) существует *непрерывная* (в том числе в любой внутренней особой точке) первообразная $F(x)$. Тогда

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{a}^{b}=F(b)-F(a),\tag{3.1}$$

где

$$F(b)=\begin{cases}F(b-0)=\lim\limits_{z\to b-0}F(z), & \text{если } b \text{ конечная особая точка},\\ F(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}F(z), & \text{если } b=\infty;\end{cases}$$

$$F(a) = \begin{cases} F(a+0) = \lim\limits_{z\to a+0} F(z), \text{ если } a \text{ конечная особая точка,} \\ F(-\infty) = \lim\limits_{z\to -\infty} F(z), \text{ если } a = -\infty. \end{cases}$$

Причем интеграл сходится тогда и только тогда, когда и $F(a)$, и $F(b)$ — конечные числа. По сути дела, полученная обобщенная формула Ньютона-Лейбница всего лишь краткая запись предельных переходов, зафиксированных в определении.

★ Заметим, что для применения формулы Ньютона-Лейбница условие непрерывности первообразной существенно! Если нарушается непрерывность (как правило, во внутренних особых точках), то следует действовать по определению, разбивая отрезок интегрирования в "нехороших"точках и вычисляя полученные интегралы (по отрезкам непрерывности $F(x)$) по формуле Ньютона-Лейбница.

II.Формула интегрирования по частям.

Для несобственного интеграла верна формула

$$\int\limits_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\mathrm{d}u,$$

причем, если любые два из выражений $\int\limits_a^b u\mathrm{d}v$, $uv\Big|_a^b$, $\int\limits_a^b v\mathrm{d}u$ имеют смысл (т.е. соответствующие пределы конечны), то имеет смысл и третье.

Отметим также, что можно проводить замену переменной под знаком несобственного интеграла.

П р и м е р 1. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_{-2}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}};\ 2)\ \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}};\ 3)\ \int\limits_{0}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3};\ 4)\ \int\limits_{0}^{1} (\ln x)^2\mathrm{d}x.$$

Р е ш е н и е . 1). Первый интеграл имеет одну особую точку $x = 1$, а первообразная непрерывна на отрезке интегрирования (в том числе и в особой точке). Применяем формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{-2}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} = \tfrac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big|_{-2}^{3} = \tfrac{3}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{9}).$$

2). Интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$ имеет две особые точки: $x = 1$ и ∞. Будем действовать по обобщенной формуле Ньютона-Лейбница. Для того чтобы вычислить

первообразную, сделаем замену переменной: $x = \frac{1}{t}$. Тогда

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C = -\arcsin \tfrac{1}{x} + C.$$

Поскольку на интервале интегрирования первообразная $F(x) = -\arcsin \frac{1}{x}$ непрерывна, то можно применить формулу (3.1)

$$\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arcsin \tfrac{1}{x}\Big|_1^\infty = 0 + \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{2}.$$

3). Для интеграла $\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3}$ особая точка $x = 1$ внутри области интегрирования. Вычислим первообразную

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + C.$$

Теперь видно, что в особой точке $x = 1$ первообразная терпит разрыв второго рода, поэтому сразу применить формулу (3.1) нельзя (сравните с примером из пункта 1). Действуем по определению и разбиваем интеграл в сумму, вычисляя каждое из слагаемых:

$$\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3} = \int\limits_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3} + \int\limits_{1}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+3} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left|\tfrac{x-3}{x-1}\right|\Big|_0^1 + \tfrac{1}{2}\ln\left|\tfrac{x-3}{x-1}\right|\Big|_1^2.$$

Так как $\ln\infty = \infty$, то оба слагаемых равны ∞, значит оба интеграла по отрезкам $[0,1]$ и $[1,2]$ расходятся. Тем более расходится первоначальный интеграл по отрезку $[0,2]$.

4). Для последнего интеграла $\int\limits_0^1 (\ln x)^2 \mathrm{d}x$ единственная особая точка $x = 0$, т.к. $\lim\limits_{x\to+0} \ln x = -\infty$. Применим метод интегрирования по частям

$$\begin{cases} u = (\ln x)^2 \;\; => \;\; du = \frac{2\ln x dx}{x} \\ dv = dx \;\; => \;\; v = x \end{cases} => \int\limits_0^1 (\ln x)^2 \mathrm{d}x = x(\ln x)^2\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 \ln x \mathrm{d}x.$$

Два раза применяя правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to 0} x(\ln x)^2) = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to 0} x = 0.$$

Поэтому $x(\ln x)^2\Big|_0^1 = 0$ и $\int\limits_0^1 (\ln x)^2 \mathrm{d}x = -2\int\limits_0^1 \ln x \mathrm{d}x$. Еще раз применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \;\Rightarrow\; v = x \end{array} \right. \Rightarrow \int\limits_0^1 (\ln x)^2 \mathrm{d}x = -2x\ln x\Big|_0^1 + 2\int\limits_0^1 \mathrm{d}x = 2.$$

П р и м е р 2. Исследовать сходимость *эталонного* интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ в зависимости от значения параметра p.

Р е ш е н и е . При $p \neq 1$, согласно обобщенной формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^\infty = \left\{ \begin{array}{ll} \infty & , \text{ если } -p+1 > 0; \\ \frac{1}{p-1} & , \text{ если } -p+1 < 0. \end{array} \right.$$

Отдельно исследуем случай $p = 1$: $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|\Big|_1^\infty = \infty$, т.е. интеграл расходится.

Окончательно,

$$\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \qquad \begin{array}{ll} - \text{ сходится}, & \text{если } p > 1; \\ - \text{ расходится}, & \text{если } p \leq 1. \end{array} \tag{3.2}$$

З а м е ч а н и е. Аналогично проверяется сходимость следующих эталонных интегралов:

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}; \int\limits_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}; \int\limits_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^p} \qquad \begin{array}{ll} - \text{ сходятся}, & \text{если } p < 1, \\ - \text{ расходятся}, & \text{если } p \geq 1; \end{array} \tag{3.3}$$

3.1.4. *Признаки сходимости несобственных интегралов*

Не всегда нужно (и можно!) вычислять несобственный интеграл. Довольно часто достаточно исследовать его сходимость, не вычисляя. Для этого используются признаки сходимости.

Теорема 3.1 (признак сравнения) *Пусть* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *на* $[a, b)$. *Если интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *сходится, то* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *тоже сходится, причем* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Если $\int\limits_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *расходится, то* $\int\limits_a^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$ *тем более расходится.*

Теорема 3.2 (предельный признак сравнения) *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ *— положительные функции на* (a, b)*; точка* b *является особой для интегралов* $\int\limits_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *и* $\int\limits_a^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Пусть существует $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = K,\ \ 0 \le K \le \infty$. *Тогда:*

а) если $0 \le K < \infty$ *и интеграл* $\int\limits_a^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$ *сходится, то* $\int\limits_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *тоже сходится;*

б) если $0 < K \le \infty$ *и интеграл* $\int\limits_a^{b} g(x)\,\mathrm{d}x$ *расходится, то* $\int\limits_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *тоже расходится;*

в) если $0 < K < \infty$*, то интегралы ведут себя одинаково — оба сходятся или оба расходятся.*

Теорема 3.3 (признак абсолютной сходимости) *Пусть интеграл* $\int\limits_a^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ *сходится. Тогда интеграл* $\int\limits_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *тоже сходится и называется* *абсолютно сходящимся.*

Замечание. Обратная теорема неверна. Интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ называется *условно сходящимся*, если сам он сходится, но интеграл $\int\limits_a^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ расходится.

★ При изучении сходимости несобственного интеграла, подынтегральная функция сравнивается с некоторой эталонной функцией в окрестности особой точки (при этом о сходимости интеграла от эталонной функции все известно). Сравнение может быть непредельным, т.е. в виде неравенства (тогда речь идет о применении теоремы 3.1). Но можно сравнивать предельно, т.е. скорости изменения функций в окрестности особой точки (тогда используется теорема 3.2). Понятно, что основная трудность в таких задачах — найти эталонную функцию.

Пример 1. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Р е ш е н и е . Оценим подынтегральную функцию: $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$. Поскольку интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ сходится (см. (3.2)), по признаку сравнения (теорема 3.1) сходится и $\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x$. Тогда исходный интеграл с х о д и т с я а б с о л ю т н о.

П р и м е р 2. Исследовать сходимость интегралов:

$$1)\ \int\limits_0^\infty \frac{x\operatorname{arctg} x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^4}};\ 2)\ \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{e^{\sin x}-1}.$$

Р е ш е н и е . 1). Для первого интеграла единственная особая точка на отрезке интегрирования ∞. Заметим, что сходимость интеграла первого рода определяется скоростью стремления к нулю подынтегральной функции. Поэтому функция $\operatorname{arctg} x$ влияния на сходимость не оказывает, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$. Теперь для оставшейся степенной функции подберем эквивалентную бесконечно малую при $x \to \infty$:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^4}} \sim \frac{x}{\sqrt[3]{x^4}} \sim \frac{1}{x^{1/3}}.$$

Итак, в качестве эталонной в окрестности ∞ можно взять функцию $g(x) = \frac{1}{x^{1/3}}$, поскольку

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{1/3}x\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} = \frac{\pi}{4} - \text{конечное число, отличное от 0.}$$

Следовательно, в силу теоремы 3.2 интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{x\operatorname{arctg} x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^4}}$$

ведет себя так же, как интеграл от эталонной функции $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/3}}$ (отрезок интегрирования должен быть тот же, что и в эталонном интеграле (3.2)). Но этот известный степенной интеграл (3.2) расходящийся, поскольку $\frac{1}{3} < 1$. Теперь представим первоначальный интеграл в виде суммы

$$\int\limits_0^\infty \frac{x\operatorname{arctg} x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^4}} = \int\limits_0^1 \frac{x\operatorname{arctg} x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^4}} + \int\limits_1^\infty \frac{x\operatorname{arctg} x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+x^4}}.$$

Первый интеграл в сумме есть собственный, а второй интеграл (как только что доказано) расходится. Таким образом, исходный интеграл расходится.

2). Для подынтегральной функции $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}$ на отрезке $[0,1]$ одна особая точка $x = 0$. В окрестности особой точки предел функции $f(x)$ посчитаем с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x}\cos x e^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x}} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x e^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \infty.$$

В ходе вычисления предела получено два утверждения: первое – исследуемый интеграл есть несобственный второго рода, второе – подынтегральная функция $f(x)$, как бесконечно большая в окрестности $x = 0$, эквивалентна функции $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Второе утверждение (точнее – гипотеза) требует проверки:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{\sin x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x e^{\sin x}} = 1.$$

Отметим, что более строго можно получить эталонную функцию через сравнение известных бесконечно малых. В нашем случае для $x \to 0$:

$$\sin x \sim x \;\Rightarrow\; e^{\sin x} - 1 \;\sim\; e^x - 1 \sim x \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Далее, по теореме 3.2 интегралы $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ и $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ одновременно сходятся или расходятся. Поскольку интеграл от эталонной функции сходится (см. (3.3) на с.87 для $p = \frac{1}{2}$), то сходится и первоначальный интеграл.

П р и м е р 3. Исследовать сходимость интеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^\alpha \mathrm{d}x}{(1-x^2) + 5\sqrt[5]{1-x^2}}$$

в зависимости от значения параметра α.

Р е ш е н и е . Преобразуем подынтегральную функцию:

$$f(x) = \frac{(1-x)^\alpha}{(1-x)^{1/5}(1+x)^{1/5}\left[5 + (1-x^2)^{4/5}\right]} = \frac{1}{(1-x)^{1/5-\alpha}}\,\varphi(x),$$

$$\text{где}\;\; \varphi(x) = \frac{1}{(1+x)^{1/5}\left[5 + (1-x^2)^{4/5}\right]} \;\to\; \frac{1}{5\sqrt[5]{2}} \neq 0, \;\text{при}\;\; x \to 1.$$

Итак, на отрезке интегрирования благодаря множителю $(1-x)^{1/5-\alpha}$ возможна единственная особая точка $x = 1$ функции $f(x)$. Причем, если показатель $\frac{1}{5} - \alpha > 0$, то $x = 1$ особая точка, а интеграл несобственный. Если $\frac{1}{5} - \alpha \leq 0$,

то особенности нет, интеграл собственный. Рассмотрим, в качестве эталонной, функцию $g(x) = \frac{1}{(1-x)^{1/5-\alpha}}$, для которой можно отметить то же самое: если $\frac{1}{5} - \alpha > 0$, то интеграл несобственный второго рода, а если $\frac{1}{5} - \alpha \le 0$, то интеграл сходится как собственный. Поскольку

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(1) = \frac{1}{5\sqrt[5]{2}} \left(\begin{smallmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{smallmatrix} \right),$$

интегралы $\int\limits_0^{\textcircled{1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int\limits_0^{\textcircled{1}} g(x)\,\mathrm{d}x$ ведут себя одинаково (теорема 3.2) в случае $\frac{1}{5} - \alpha > 0$. Но интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^{1/5-\alpha}}$ сходится (см. (3.3) на с.87), если $\frac{1}{5} - \alpha < 1$. Поэтому исходный интеграл сходится по теореме 3.2 как несобственный при $0 < \frac{1}{5} - \alpha < 1$ и при $\frac{1}{5} - \alpha \le 0$ сходится как собственный. Поэтому область сходимости для первоначального интеграла: $\alpha > -\frac{4}{5}$.

3.1.5. *Задачи для самостоятельного решения*

1. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x$; в) $\int\limits_{-1}^1 e^{1/x}\,\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$; г) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$;

д) $\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{(x^2-2)}}$; е) $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$; ж) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\mathrm{d}x$; з) $\int\limits_0^{\pi} x\ln\sin x\mathrm{d}x$;

и) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10}\,\mathrm{d}x$; к) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-5x+7}$; л) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$; м) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{x^3-1}$; н) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;

п) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^2}$; р) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1-x)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\,\mathrm{d}x$; с) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(4x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Ответы: а) расходится; б) $-3/2$; в) расходится; г) $\sqrt{2\pi}$; д) $\pi/2$; е) $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}$; ж) $-(\pi\ln 2)/2$; з) $-(\pi^2\ln 2)/2$; и) расходится; к) $2\pi/\sqrt{31}$; л) $\pi/2$; м) $\frac{\ln 7}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$; н) 0; п) $4\pi/(3\sqrt{3})$; р) $\frac{3\ln 2}{2} - \frac{\pi(3+2\sqrt{3})}{4}$; с) $\pi\sqrt{3}/9$.

2. Вычислить интегралы в смысле главного значения:

а) V.p. $\int\limits_{-1}^7 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3}$; б) V.p. $\int\limits_{1/2}^4 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$; в) V.p. $\int\limits_0^{\pi} x\operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$; г) V.p. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3-5\sin x}$;

д) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$; е) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x$; ж) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{13+x}{17+x^2}\,\mathrm{d}x$;

з) V.p. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$.

Ответы: а) $1/9$; б) $\ln 2$; в) $-\pi\ln 2$; г) $-\frac{\ln 3}{4}$; д) 0; е) π; ж) $13\pi/\sqrt{17}$; з) $-\ln 2$.

3. Исследовать сходимость интегралов:

а) $\int\limits_0^8 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt[3]{x}}$; б) $\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{e^{\sin x}-1}$; в) $\int\limits_0^\pi \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$; г) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$;

д) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\arcsin 1/x}{1+x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; е) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^5)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$; ж) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x}$; з) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{x^3}{1+x^2}\right)^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

Ответы: а) — д), з) сходится; е), ж) — расходится.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{\sin(1/x)\,\mathrm{d}x}{x^2+x\sqrt{x}+x^2\cos(1/x)}$; б) $\int\limits_0^1 \cos\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$; в) $\int\limits_0^{1/2} \frac{\cos^3\ln x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$;

д) $\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$; е) $\int\limits_0^{+\infty} x^2\sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right)\mathrm{d}x$; ж) $\int\limits_0^1 \frac{\cos(1/x)\,\mathrm{d}x}{x^2\left(\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)^\alpha}$ (рассмотреть все значения параметра α); з) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^\alpha\sin x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ (рассмотреть все значения параметра α).

Ответы: а) — е) сходится условно; ж) сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $0 < \alpha \le 1$; з) сходится абсолютно при $\alpha < 2$, условно при $2 \le \alpha < 3$.

3.2. Интегралы, зависящие от параметра

3.2.1. *Определенные интегралы, зависящие от параметра*

Пусть функция двух переменных $f(x,\, y)$ определена в прямоугольнике Π : $\left\{ \begin{smallmatrix} a \le x \le b, \\ c \le y \le d \end{smallmatrix} \right.$. Если взять определенный интеграл по одной из переменных, то интеграл будет функцией от оставшейся переменной: $\int\limits_a^b f(x,\, y)\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}(y),\ \ y \in [c,\, d]$.

Он называется (определенным) интегралом, зависящим от параметра y.

Теорема 3.4 *Пусть функция $f(x,\, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π. Тогда интеграл $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^b f(x,\, y)\,\mathrm{d}x$ есть функция, непрерывная на $[c,\, d]$.*

С л е д с т в и е. Пусть функция $f(x,\, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π. Тогда $\lim\limits_{y \to y_0} \int_a^b f(x,\, y)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim\limits_{y \to y_0} f(x,\, y)\mathrm{d}x$.

Теорема 3.5 *Пусть функция $f(x,\, y)$ и ее производная $f'_y(x,\, y)$ непрерывны в прямоугольнике Π. Тогда функция $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^b f(x,\, y)\,\mathrm{d}x$ дифференцируема и* $\frac{\mathrm{d}\mathcal{I}}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\int\limits_a^b f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\right) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x.$

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть функция двух переменных $f(x,\, y)$ определена на множестве M : $\left\{ \begin{smallmatrix} \varphi(y) \le x \le \psi(y), \\ c \le y \le d \end{smallmatrix} \right.$. Тогда интеграл вида : $\mathcal{I}(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,\, y)\mathrm{d}x$ также называется (определенным) интегралом, зависящим от параметра y.

Теорема 3.6 (о непрерывности по параметру)

Пусть функция $f(x,\, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π : $\left\{ \begin{smallmatrix} a \le x \le b, \\ c \le y \le d \end{smallmatrix} \right.$; функции $\varphi(y), \psi(y)$ непрерывны при $y \in [c, d]$ и значения этих функций содержатся в промежутке $[a, b]$. Тогда интеграл $\mathcal{I}(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x$ есть функция, непрерывная на $[c,\, d]$.

Теорема 3.7 *Пусть функции $f(x,\, y)$ и $f'_y(x,\, y)$ непрерывны в прямоугольнике Π : $\left\{ \begin{smallmatrix} a \le x \le b, \\ c \le y \le d \end{smallmatrix} \right.$, а функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — дифференцируемы на $[c,\, d]$ и*

значения этих функций содержатся в промежутке $[a, b]$. *Тогда интеграл* $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,\, y)\mathrm{d}x = \mathcal{I}(y)$ *является функцией, дифференцируемой на* $[c,\, d]$, *причем*

$$\mathcal{I}'_y = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,\, y)\mathrm{d}x + f\big(\psi(y),\, y\big)\,\psi'(y) - f\big(\varphi(y),\, y\big)\,\varphi'(y). \tag{3.4}$$

Теорема 3.8 *Пусть функция* $f(x,\, y)$ *непрерывна в прямоугольнике* Π : $\left\{\begin{smallmatrix} a \le x \le b, \\ c \le y \le d \end{smallmatrix}\right.$, *интеграл* $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^b f(x,\, y)\mathrm{d}x$. *Тогда*

$$\int\limits_c^d \mathcal{I}(y)\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_a^b f(x,\, y)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_c^d f(x,\, y)\mathrm{d}y. \tag{3.5}$$

Заметим, что последняя теорема — другая формулировка теоремы о смене порядка интегрирования для двойного интеграла.

★ Приведенные теоремы являются инструментом исследования функции $\mathcal{I}(y)$, не использующим вычисление первообразной (тем более, что это не всегда возможно).

П р и м е р 1. Вычислить предел функции $\mathcal{I}(y)$ в точке $y = 0$, если

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_y^{1+y} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2 + y^2}.$$

Р е ш е н и е . Для вычисления предела воспользуемся теоремой 3.6, условия которой для данного интеграла выполнены в прямоугольнике Π, совпадающем со всей плоскостью. В частности, в точке $y = 0$ функция $\mathcal{I}(y)$ непрерывна:

$$\lim_{y\to 0} \mathcal{I}(y) = \mathcal{I}(0) = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

П р и м е р 2. Исследовать на непрерывность функцию

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_0^1 \frac{y f(x)\mathrm{d}x}{y^2 + x^2},$$

если функция $f(x)$ непрерывна и положительна на отрезке $[0, 1]$.

Р е ш е н и е . Заметим, что $\mathcal{I}(0) = 0$. Рассмотрим предел подынтегральной функции при $y \to 0$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{yf(x)}{x^2+y^2} = \begin{cases} \frac{0\cdot f(x)}{x^2+0} = 0 \ , \text{ если } x \neq 0 \\ \lim\limits_{y\to 0} \frac{yf(0)}{0+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0)}{y} = \infty, \text{ если } x = 0, f(x) > 0. \end{cases}$$

Таким образом, подынтегральная функция, как функция двух переменных, терпит разрыв в точке $(0,0)$. В остальных точках плоскости XoY, $0 < x \leq 1$, она непрерывна. Значит в любом прямоугольнике Π, не содержащем точку $(0,0)$, выполнены условия теоремы 3.4 и функция $\mathcal{I}(y)$ непрерывна. Но $\lim\limits_{y\to 0} \mathcal{I}(y) \neq \mathcal{I}(0) = 0$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}(\frac{1}{n}) \neq 0$. Действительно, поскольку $f(x)$ непрерывна, то $0 < m < f(x)$ для подходящего m и для любого $x \in [0,1]$. Но тогда имеет место оценка:

$$\mathcal{I}(\tfrac{1}{n}) = \int\limits_0^1 \frac{\frac{1}{n} f(x)\mathrm{d}x}{x^2 + \frac{1}{n^2}} > \int\limits_0^1 \frac{mn\mathrm{d}x}{1+(nx)^2} = m \operatorname{arctg} nx\Big|_0^1 = m \operatorname{arctg} n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} m\tfrac{\pi}{2} \neq 0\,.$$

Значит, функция $\mathcal{I}(y)$ терпит разрыв в точке $y = 0$.

П р и м е р 2. Для интеграла $\mathcal{I}(y) = \int\limits_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ найти производную по параметру $\mathcal{I}'_y$.

Р е ш е н и е . Согласно формуле (3.4)

$$\mathcal{I}'_y = \int\limits_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2}\, e^{y\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + e^{y\sqrt{1-\cos^2 y}}(-\sin y) - e^{y\sqrt{1-\sin^2 y}}\cos y =$$

$$= \int\limits_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2}\, e^{y\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x - e^{y|\sin y|}\sin y - e^{y|\cos y|}\cos y.$$

П р и м е р 3. Вычислить интеграл $\mathcal{I} = \int\limits_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0,\ b > 0)$.

Р е ш е н и е . Заметим прежде всего, что в точках $x = 1, x = 0$ подынтегральная функция ограничена:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^a - x^b}{\ln x} = 0\cdot 0 = 0,\ \lim_{x\to 1} \frac{x^a - x^b}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^a - x^b)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to 1} x(ax^{a-1} - bx^{b-1}) = a - b.$$

Таким образом, интеграл собственный. Применим здесь теорему 3.8 об интегрировании по параметру. Можно трактовать подынтегральную функцию $\frac{x^a - x^b}{\ln x}$

как приращение некоторой другой функции: $\frac{x^a-x^b}{\ln x} = \frac{x^y}{\ln x}\Big|_{y=b}^{y=a}$, производная по y от которой есть x^y. Пусть $x^y = f(x,\, y)$. Очевидно, что $f(x,y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике $\Pi : \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \le x \le 1, \\ a \le y \le b. \end{smallmatrix} \right.$ Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{x^a-x^b}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{x^y}{\ln x}\Big|_{y=b}^{y=a}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_b^a x^y \mathrm{d}y = \int\limits_b^a \mathrm{d}y \int\limits_0^1 x^y \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_b^a \left(\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_{x=0}^{x=1} \right) \mathrm{d}y = \int\limits_b^a \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y = \ln(y+1)\Big|_b^a = \ln\frac{a+1}{b+1}\,.$$

3.2.2. *Несобственные интегралы, зависящие от параметра, равномерная сходимость*

Рассмотрим теперь н е с о б с т в е н н ы й и н т е г р а л, зависящий от параметра y, вида $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}(y)$. Будем для определенности считать, что b — единственная (конечная или бесконечная) особая точка функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Если для каждого $y_0 \in Y$ несобственный интеграл $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x,\, y_0)\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}(y_0)$ сходится (по определению на с.81), то интеграл $\mathcal{I}(y)$ называется сходящимся на множестве Y. По сути дела множество Y есть область определения функции $\mathcal{I}(y)$.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}(y)$ сходится р а в н о м е р н о н а м н о ж е с т в е Y_1, если для всякого положительного ε найдется $\delta(\varepsilon)$ на интервале (a, b) такое, что для всякого z, удовлетворяющего неравенству $\delta(\varepsilon) < z < b$, верно $\left| \int\limits_z^{\textcircled{b}} f(x,\, y)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$ на всем множестве Y_1. Символьная запись:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta(\varepsilon) < b,\; \forall z \;:\; a < \delta(\varepsilon) < z < b \;\Rightarrow\; \left| \int\limits_z^{\textcircled{b}} f(x,\, y)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \;\; \forall y \in Y_1. \quad (3.6)$$

★ Заметим, что просто сходимость по параметру y определяется для точки y_0, соответственно область сходимости Y есть объединение точек сходимости. В то

же время равномерная сходимость на множестве Y_1 определяется по отношению ко множеству в целом. Кроме того, $Y_1 \subseteq Y$.

Однако доказательство равномерной сходимости на основе определения трудно. Приведем два д о с т а т о ч н ы х признака равномерной сходимости.

Теорема 3.9 (признак Вейерштрасса)

Пусть $|f(x,\, y)| \le \varphi(x)$ при $a \le x < b$, $\forall y \in [c,\, d]$, и несобственный интеграл $\int\limits_a^{b} \varphi(x)\mathrm{d}x$ от м а ж о р а н т ы $\varphi(x)$ сходится.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{b} f(x,\, y)\mathrm{d}x$ сходится равномерно для $y \in [c,\, d]$.

Теорема 3.10 (признак Абеля)

Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ сходится, а функция $f(x,\, y)$ монотонна по x и равномерно ограниченна, т.е. $|f(x,\, y)| \le M$ для $x \ge a$ и сразу $\forall y \in [c,\, d]$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)\, f(x,\, y)\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно для $y \in [c,\, d]$.

П р и м е р 1. Найти область равномерной сходимости для интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+y^2}$.

Р е ш е н и е . Покажем, что интеграл сходится равномерно $\forall y \in (-\infty,\, \infty)$. Действительно, поскольку на этой области верна оценка $\frac{1}{1+x^2+y^2} \le \frac{1}{1+x^2}$ и интеграл от мажоранты сходится

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi,$$

то по признаку Вейерштрасса первоначальный интеграл равномерно сходится на всей числовой прямой.

П р и м е р 2 . Найти область определения функции:

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin((1-y^2)x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Р е ш е н и е . Область определения $\mathcal{I}(y)$ это множество значений параметра y, для которых интеграл сходится. Понятно, что подынтегральная функция не определена для $x = 0$. Однако

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin((1-y^2)x)}{x} = 1 - y^2.$$

Поэтому в точках вида $(0, y)$ можно доопределить подынтегральную функцию так, что она будет непрерывна. Далее, $\mathcal{I}(1) = \mathcal{I}(-1) = 0$. Если же $y \neq \pm 1$, то

$$\mathcal{I}(y) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty \frac{\sin((1-y^2)x)}{(1-y^2)x} \mathrm{d}(1-y^2)x, \text{ если } |y| < 1, \\ -\int\limits_{-\infty}^0 \frac{\sin((1-y^2)x)}{(1-y^2)x} \mathrm{d}(1-y^2)x, \text{ если } |y| > 1. \end{cases}$$

Введем обозначение $t = (1-y^2)x$, тогда решение сводится к исследованию сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ (равного интегралу $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ в силу четности подынтегральной функции). Докажем, что несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ сходится. Заметим, что особая точка на промежутке интегрирования одна $t = \infty$, а в подозрительной точке $t = 0$ предел подынтегральной функции равен 1, поэтому она особой не является. Для начала разобьем интеграл на сумму интегралов

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t + \int\limits_1^\infty \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t.$$

Первый интеграл в сумме — собственный, в силу ограниченности подынтегральной функции. Второй (несобственный) вычислим с помощью формулы интегрирования по частям (см. с. 85):

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{t} = u \\ \sin t \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}v \end{array} \middle| \begin{array}{l} \mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ v = -\cos x \end{array} \right] = -\frac{\cos t}{t} \Big|_1^\infty - \int\limits_1^\infty \frac{\cos t}{t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Первое слагаемое равно $\cos 1$, а второе — сходящийся интеграл. Сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{\cos t}{t^2} \, \mathrm{d}x$ следует из сравнения со сходящимся эталонным интегралом $\int\limits_1^\infty \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t$ (см. с.87, теорема 3.1). Таким образом, функция $\mathcal{I}(y)$ определена для любого действительного y. Если же учесть известный факт, что $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ (доказательство приведено дальше на с.98), то получим формулу для функции

$$\mathcal{I}(y) = \begin{cases} 0, \text{ если } |y| = 1, \\ \frac{\pi}{2}, \text{ если } |y| < 1, \\ -\frac{\pi}{2}, \text{ если } |y| > 1. \end{cases}$$

П р и м е р 3. Исследовать характер сходимости несобственного интеграла $\mathcal{I}(y) = \int\limits_0^\infty y\, e^{-xy}\mathrm{d}x$ при $y \in [0,\, \infty)$.

Р е ш е н и е . Исследование проведем двумя способами: по определению и по признаку Вейерштрасса.

1). Применение определения подразумевает построение равномерной (т.е. не зависящей от y) оценки остатка интеграла. Для этого отделимся от "неудобной"точки $y = 0$ и отступим от левой границы интервала вглубь: пусть $y \in [a,\, \infty)$, $a > 0$. Тогда на полученном луче легко получаем оценку следующего интеграла:

$$\left|\int_z^\infty y\, e^{-xy}\mathrm{d}x\right| = \left|-e^{-xy}\Big|_z^\infty\right| = e^{-zy} \le e^{-za} < \varepsilon$$

при $z > \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{a}$ и с р а з у д л я в с е х $y \ge a > 0$. Итак, интеграл $\int\limits_0^\infty y\, e^{-xy}\mathrm{d}x$ по определению сходится равномерно при $y \in [a,\, \infty)$.

Если теперь устремить a к нулю, то полученная оценка для z становится бессмысленной ($z > \infty$), поэтому данный способ исследования характера сходимости в области $y \approx 0$ непригоден.

С другой стороны, из (3.6) следует, что равномерная сходимость предполагает наперед заданную малость интеграла $\int\limits_z^\infty f(x,\, y)\mathrm{d}x$ для достаточно больших z при л ю б ы х y из рассматриваемой области $\big($в нашем случае это $[0,\, \infty)\big)$. Но $\max\limits_{y\in[0,\,\infty)}\left|\int\limits_z^\infty f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\right| = \max\limits_{y\in[0,\,\infty)} e^{-zy} = e^0 = 1$, т.е. этот интеграл оказался н е с к о л ь у г о д н о м а л ы м ! Итак, на всей неотрицательной полуоси $y \ge 0$ и с х о д н ы й интеграл сходится н е р а в н о м е р н о.

2). Попробуем теперь воспользоваться признаком Вейерштрасса . Если $y \in [a,\, \infty), a > 0$, то верна оценка

$$y\, e^{-xy} \le e^y\, e^{-xy} \le e^{-(x-1)y} \le e^{-(x-1)a}, \quad \forall y \in [a,\, \infty), \forall x > 1.$$

Таким образом, в качестве мажорирующей выступает функция $\varphi(x) = e^{-(x-1)a}$, для которой интеграл

$$\int_1^\infty e^{-(x-1)a}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\, e^{-(x-1)a}\Big|_1^\infty = \frac{1}{a}$$

сходится. Значит (теорема 3.9), сходится равномерно на множестве $[a, \infty)$ интеграл $\int\limits_1^\infty y\, e^{-xy}\mathrm{d}x$. Что же касается первоначального интеграла

$\mathcal{I}(y) = \int\limits_0^\infty y\, e^{-xy}\mathrm{d}x$, то он есть сумма собственного $\int\limits_0^1 y\, e^{-xy}\mathrm{d}x$ и несобственного $\int\limits_1^\infty y\, e^{-xy}\mathrm{d}x$, сходящегося равномерно на множестве $[a, \infty)$. Следовательно, $\mathcal{I}(y)$ сходится равномерно на множестве $[a, \infty)$.

Вопрос отсутствия равномерной сходимости на $[0, \infty)$ не может быть решен с помощью достаточного признака. Поэтому доказательство такое же, как в первом способе.

Пример 4. Показать, что интеграл $\int_0^\infty e^{-xy}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно при $y \geq 0$.

Решение. Пусть $f(x,\, y) = e^{-xy},\ g(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Очевидно, что функция $f(x,\, y)$ при фиксированном y монотонно убывает по x. Кроме того, она равномерно ограниченна, т.к. $\left|e^{-xy}\right| \leq 1$ при $x \geq 0$, $y \geq 0$. Интеграл $\int\limits_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ сходится (см. пример 1 на с. 98). По признаку Абеля (с. 97) исходный интеграл сходится равномерно при неотрицательных y.

3.2.3. *Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра*

Равномерно сходящиеся несобственные интегралы как функции от параметра наследуют (возможно при дополнительных условиях) свойства подынтегральной функции, такие как непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость.

Теорема 3.11 (о непрерывности несобственного интеграла) *Пусть функция $f(x,\, y)$ непрерывна при $a \leq x < b$, $y \in [c,\, d]$, а интеграл $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно при $y \in [c,\, d]$.*

Тогда функция $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x$ непрерывна на $[c,\, d]$.

Теорема 3.12 (о дифференцировании интеграла по параметру)
Пусть: 1) функция $f(x,\, y)$ и ее производная $f'_y(x,\, y)$ непрерывны при $a \leq x < b$, $y \in [c,\, d]$;

2) интеграл $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x$ сходится;

3) интеграл $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f'_y(x,\, y)\mathrm{d}x$ сходится равномерно при $y \in [c,\, d]$.

Тогда функция $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x$ дифференцируема на $[c,\, d]$,

причем $\mathcal{I}'_y = \int\limits_a^{\textcircled{b}} f'_y(x,\, y)\,\mathrm{d}x$ *или*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\right) = \int\limits_a^{\textcircled{b}} \frac{\partial}{\partial y}\, f(x,\, y)\mathrm{d}x.$$

Теорема 3.13 (об интегрировании интеграла по параметру)
Пусть: 1) функция $f(x, y)$ *непрерывна при* $a \le x < b$, $y \in [c,\, d]$*;*
2) интеграл $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x$ *сходится равномерно при* $y \in [c,\, d]$.
Тогда

$$\int\limits_c^d \mathcal{I}(y)\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{\textcircled{b}} \mathrm{d}x \int\limits_c^d f(x,\, y)\,\mathrm{d}y.$$

★ Применение приведенных теорем предполагает исследование на равномерную сходимость соответствующих интегралов. При этом мы будем пользоваться в основном признаком Вейерштрасса.

Пример 1. Исследовать на непрерывность функции $\mathcal{I}(y)$ на указанных промежутках:
1) $\mathcal{I}(y) = \int\limits_0^\infty e^{-yx^2}\,\mathrm{d}x$, при $0 < y < +\infty$;
2) $\mathcal{I}(y) = \int\limits_0^\infty \frac{x}{2+x^y}\,\mathrm{d}x$, при $y > 2$.

Решение. 1). Подынтегральная функция $f(x, y) = e^{-yx^2}$ является непрерывной как функция двух переменных на всей плоскости XoY. Поэтому для доказательства непрерывности функции $\mathcal{I}(y)$ (по теореме 3.11) достаточно доказать равномерную сходимость $\mathcal{I}(y)$ по параметру y на любом отрезке $[c, d]$, лежащем в $(0, +\infty)$. При доказательстве воспользуемся признаком Вейерштрасса (теорема 3.9). Оценим подынтегральную функцию равномерно по y на отрезке $[c, d]$. Для всякого фиксированного x функция $f(x, y) = e^{-yx^2}$ является убывающей по переменной y на множестве $(0, +\infty)$. Значит, верна оценка

$$f(x, y) = e^{-yx^2} \le e^{-cx^2},\ \forall x \in (0, +\infty)\ \forall y \in [c, d] \subset (0, +\infty).$$

Таким образом, в качестве мажорирующей на отрезке $[c, d]$ можно взять функцию $\varphi(x) = e^{-cx^2}$. Соответствующий интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-cx^2}\,\mathrm{d}x, c > 0$, сходится по признаку сравнения (теорема 3.1): $e^{-t^2} \le e^{-t}$ для достаточно больших t (здесь

$t = \sqrt{c}x$). Итак, на любом отрезке $[c, d] \subset (0, +\infty)$ первоначальный интеграл равномерно сходится, значит функция $\mathcal{I}(y)$ непрерывна для $y \in (0, +\infty)$.

2). Здесь сначала проведем замену $t = x^2$:

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_0^\infty \frac{x}{2 + x^y}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{2 + (x^2)^{y/2}}\,\mathrm{d}x^2 = \int\limits_0^\infty \frac{1}{4 + 2\,t^{y/2}}\,\mathrm{d}t\,,\ y > 2.$$

Понятно, что подынтегральная функция непрерывна всюду. А равномерную по y сходимость достаточно доказать на любом отрезке $[c, d]$, $c > 2$. Действовать будем по признаку Вейерштрасса, для чего оценим подынтегральную функцию равномерно по y на отрезке $[c, d]$. Поскольку оценивать придется степень $t^{y/2}$, необходимо определиться с величиной основания (если $t > 1$, то показательная функция возрастает, если $0 < t < 1$, то убывает). Поэтому для удобства оценки разобьем интеграл в сумму:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{4 + 2\,t^{y/2}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \frac{1}{4 + 2\,t^{y/2}}\,\mathrm{d}t + \int\limits_1^\infty \frac{1}{4 + 2\,t^{y/2}}\,\mathrm{d}t.$$

Первый интеграл является собственным, поэтому не нуждается в доказательстве равномерной сходимости. Во втором случае $t \geq 1$, поэтому при каждом фиксированном t функция $4 + 2\,t^{y/2}$ является возрастающей по y для $2 < c \leq y \leq d$, а сама $f(t, y)$ – убывает. Но тогда имеем оценку:

$$f(t, y) = \frac{1}{4 + 2\,t^{y/2}} \leq \frac{1}{4 + 2\,t^{c/2}},\ \forall t \in [1, +\infty),\ 2 < c \leq y \leq d.$$

От полученной мажоранты $\varphi(t) = \frac{1}{4+2\,t^{c/2}}$ интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{1}{4+2\,t^{c/2}}\,\mathrm{d}t$ сходится, так как в окрестности бесконечности

$$\frac{1}{4 + 2\,t^{c/2}} \sim \frac{1}{2t^{c/2}} \text{ и } \int\limits_1^\infty \frac{1}{t^{c/2}}\,\mathrm{d}t \ - \text{сходится для } \frac{c}{2} > 1.$$

Доказана равномерная сходимость на отрезке $[c, d], c > 2$, следовательно (теорема 3.11), функция $\mathcal{I}(y)$ непрерывна на $[c, d]$, а значит, для $y > 2$.

П р и м е р 2 . Исследовать на дифференцируемость функцию $\mathcal{I}(y) = \int\limits_0^\infty e^{-yx^2}\,\mathrm{d}x$ при $0 < y < +\infty$.

Р е ш е н и е . Проверим выполнение условий теоремы 3.12.

1). Непрерывность подынтегральной функции для $y \in (0, +\infty)$ и $x \in [0, +\infty)$ очевидно есть.

2). Покажем сходимость интеграла $\mathcal{I}(y)$ для $y \in (0, +\infty)$. Действительно, можно оценить подынтегральную функцию (для каждого фиксированного y) в окрестности бесконечности функцией вида e^{-t} (здесь $t = \sqrt{y}x$), интеграл от которой сходится (аналогично сделано в примере 1).

3). Проверим последнее условие — равномерную по y сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty f'_y(x,y)\mathrm{d}x$ на любом отрезке $[c,d] \subset (0,+\infty)$. Имеем

$$\int\limits_0^\infty f'_y(x,y)\mathrm{d}x = -\int\limits_0^\infty x^2\, e^{-yx^2}\mathrm{d}x.$$

Поскольку экспонента — убывающая по переменной y функция, получаем оценку

$$x^2\, e^{-yx^2} \le x^2 e^{-cx^2},\ 0 < c \le y \le d,\ \forall x \in [0,+\infty).$$

Далее вычисляем интеграл от мажорирующей функции, применяя формулу интегрирования по частям

$$\begin{cases} u = x \ \Rightarrow\ du = dx \\ dv = xe^{-cx^2}dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2c}e^{-cx^2} \end{cases} \Rightarrow \int\limits_0^\infty x^2\, e^{-cx^2}\mathrm{d}x = -\underbrace{\frac{x}{2c}e^{-cx^2}\Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{2c}\int\limits_0^\infty e^{-cx^2}\mathrm{d}x.$$

Первое слагаемое равно нулю, а второе — первоначальный интеграл, для которого сходимость доказана в пункте 2). Можно применить признак Вейерштрасса (теорема 3.9): интеграл от мажорирующей функции сходится, значит, $\int\limits_0^\infty f'_y(x,y)\mathrm{d}x$ равномерно сходится на любом отрезке $[c,d] \subset (0,+\infty)$. Отсюда получаем заключение теоремы 3.12: функция $\mathcal{I}(y)$ дифференцируема на $[c,d]$, а значит, всюду в $(0,+\infty)$.

3.2.4. *Вычисление интегралов*

Теория интегралов от параметра позволяет вычислять определенные интегралы, не берущиеся по формуле Ньютона-Лейбница. При этом используется прием введения параметра, но таким образом, чтобы после дифференцирования (как правило, используется теорема 3.12) под интегралом получалась функция, для которой существует первообразная.

★ Схема применения теоремы о дифференцировании несобственного интеграла от параметра для вычисления интегралов: 1) ввести параметр y так, чтобы было удобно по нему дифференцировать; 2) проверить все условия

теоремы 3.12; 3) применить теорему 3.12 и вычислить (по формуле Ньютона-Лейбница) $\mathcal{I}'(y)$; 4) восстановить по $\mathcal{I}'(y)$ функцию $\mathcal{I}(y)$, вычислив неопределенный интеграл с точностью до константы C; 5) уточнить значение C подстановкой конкретного значения y в формулу для $\mathcal{I}(y)$.

Пример 1. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$\mathcal{I}(\alpha,\beta)=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,\mathrm{d}x,\ \alpha>0,\ \beta>0.$$

Решение. В этом примере интеграл есть функция двух параметров α,β. Сначала рассмотрим возможность дифференцирования по переменной α, то есть проверим условия теоремы 3.12.

1). Подынтегральная функция непрерывна для $x>0,\alpha>0,\beta>0$.

2). Интеграл является сходящимся для указанных значений α и β. Докажем это. Кроме особой точки ∞ есть "подозрительная"на особую — точка $x=0$. Однако можно вычислить по правилу Лопиталя предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}=0.$$

Значит, в точке $x=0$ функция ограничена и для подынтегральной функции единственная особая точка ∞. Но тогда достаточно рассмотреть сходимость интегралов

$$\int\limits_1^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}}{x}\,\mathrm{d}x-\int\limits_1^\infty \frac{e^{-\beta x^2}}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

В силу оценок

$$\frac{e^{-\alpha x^2}}{x}\le e^{-\alpha x^2}\le e^{-\alpha x}\,,\quad \forall x\in[1,+\infty),\alpha>o,$$

и сходимости интеграла $\int\limits_1^\infty e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$ получаем сходимость $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$ (признак сравнения — теорема 3.1 на с.87). Аналогично и для второго слагаемого $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-\beta x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$. Таким образом, сходится интеграл $\mathcal{I}(\alpha,\beta)$.

3). Проверяем третье условие теоремы 3.12: равномерную сходимость по параметру α интеграла от производной $\int\limits_0^\infty f'_\alpha(x,\alpha,\beta)\mathrm{d}x$ для $\alpha\in[c,+\infty)$, $c>0$.

Имеем

$$\int\limits_0^\infty f'_\alpha(x,\alpha,\beta)\mathrm{d}x = -\int\limits_0^\infty xe^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x.$$

Оценим подынтегральную функцию

$$xe^{-\alpha x^2} \le xe^{-cx^2},\ 0 < c \le \alpha,\ x \ge 0.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_0^\infty xe^{-cx^2}\mathrm{d}x$ сходится, интеграл $\int\limits_0^\infty f'_\alpha(x,\alpha,\beta)\mathrm{d}x$ равномерно сходится на множестве $[c,+\infty)$ по признаку Вейерштрасса. Итак, условия теоремы 3.12 выполнены, значит, имеем право записать

$$\mathcal{I}'_\alpha(\alpha,\beta) = \int\limits_0^\infty f'_\alpha(x,\alpha,\beta)\mathrm{d}x = -\int\limits_0^\infty xe^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^\infty \tfrac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}(-\alpha x^2) = \tfrac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x^2}\Big|_0^{+\infty} = -\tfrac{1}{2\alpha}.$$

Теперь восстановим функцию $\mathcal{I}(\alpha,\beta)$:

$$\mathcal{I}(\alpha,\beta) = \int \mathcal{I}'_\alpha(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha = -\int \tfrac{1}{2\alpha}\mathrm{d}\alpha = -\tfrac{1}{2}\ln\alpha + C(\beta).$$

Определим функцию $C(\beta)$, положив в первоначальном интеграле $\alpha = \beta$:

$$\mathcal{I}(\beta,\beta) = 0 = -\tfrac{1}{2}\ln\beta + C(\beta) \ \Rightarrow\ C(\beta) = \tfrac{1}{2}\ln\beta.$$

Таким образом, интеграл вычислен

$$\mathcal{I}(\alpha,\beta) = \tfrac{1}{2}\ln\beta - \tfrac{1}{2}\ln\alpha = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{\beta}{\alpha}.$$

П р и м е р 2. Вычислить интеграл $\mathcal{I}(\alpha,k) = \int\limits_0^\infty e^{-kx}\,\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x,\ k>0, \alpha\in\mathbb{R}$.

Р е ш е н и е . Заметим, что для подынтегральной функции нет элементарной первообразной, поэтому воспользоваться обобщенной формулой Ньютона-Лейбница (см. с.84) не удастся.

Рассмотрим возможность дифференцирования по параметру α. Заметим, что подынтегральная функция $f(x,k,\alpha) = e^{-kx}\,\frac{\sin\alpha x}{x}$ существенно упростится, если ее продифференцировать по α: $f'_\alpha(x,k,\alpha) = e^{-kx}\cos\alpha x$. При этом неопределенный интеграл от последней функции по переменной x может быть успешно вычислен интегрированием по частям ("возвратное интегрирование"). Если

же дифференцировать по параметру k, то подынтегральная функция только усложнится. Осталось обосновать дифференцирование по параметру α.

Проверим выполнение условий теоремы 3.12 о дифференцировании интеграла по параметру.

1). Функция $f(x,k,\alpha) = e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}$ непрерывна всюду, где она определена, т.е. при $x \neq 0$. Доопределим функцию в нуле так, чтобы и там она стала непрерывной: $f(0,k,\alpha) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,k,\alpha)$. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} f(x,k,\alpha) = \alpha$, получим $f(x,k,\alpha) = \begin{cases} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}; & x\neq 0, \\ \alpha; & x=0. \end{cases}$ Подынтегральная функция с т а л а н е п р е р ы в н о й всюду, в том числе и на промежутке интегрирования $x \geq 0$.

1′). Производная $f'_\alpha(x,k,\alpha) = e^{-kx}\cos\alpha x$ н е п р е р ы в н а всюду.

2). Докажем, что интеграл $\int_0^\infty f(x,k,\alpha)\,\mathrm{d}x$ с х о д и т с я. Оценим подынтегральную функцию: при $x \geq 0$

$$\left|f(x,k,\alpha)\right| = \left|e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}\right| \leq e^{-kx}\frac{|\alpha x|}{x} = |\alpha|e^{-kx}, k > 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\mathrm{d}x = \frac{e^{-kx}}{-k}\Big|_0^\infty = \frac{1}{k}$ сходится , интересующий нас интеграл сходится даже абсолютно.

3). Докажем, что интеграл от производной по параметру $\int_0^\infty f'_\alpha(x,k,\alpha)\,\mathrm{d}x$ с х о д и т с я р а в н о м е р н о на $\mathbb{R}$. Поскольку

$$\left|f'_\alpha(x,k,\alpha)\right| = \left|e^{-kx}\cos\alpha x\right| \leq e^{-kx},\ k > 0, \alpha \in \mathbb{R},$$

функция e^{-kx} выступает в качестве мажоранты (независящей от параметра α) для f'_α. Интеграл от мажоранты $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\mathrm{d}x$ сходится, поэтому по признаку Вейерштрасса интеграл $\int_0^\infty f'_\alpha(x,k,\alpha)\mathrm{d}x$ сходится р а в н о м е р н о.

Итак, мы имеем право дифференцировать $\mathcal{I}(\alpha,k)$ по параметру α. Производная $\mathcal{I}'_\alpha = \int\limits_0^\infty e^{-kx}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x = \frac{k}{k^2+\alpha^2}$; тогда

$$\mathcal{I}(\alpha,k) = \int \frac{k}{k^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{k} + C.$$

Постоянную интегрирования C найдем из условия $\mathcal{I}\big|_{\alpha=0} = 0 \Rightarrow C = 0$. Окончательно, $\mathcal{I}(\alpha,k) = \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{k}$, $k > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

П р и м е р 3 . Вычислить интеграл $\mathcal{J} = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Р е ш е н и е . Интеграл не может быть вычислен по формуле Ньютона-Лейбница. Попытаемся ввести параметр: $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$, однако, дифференцирование по параметру в таком виде приводит к расходящемуся интегралу. Тогда

домножим подынтегральную функцию на "множитель сходимости"e^{-kx}. В результате получен интеграл $\mathcal{I}(\alpha, k)$ из предыдущего примера. А этот интеграл уже вычислен и $\mathcal{I}(\alpha, k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{k}$ для $\alpha \in R$, $k > 0$. В частности,

$$\mathcal{I}(1, k) = \operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{k} = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-kx} \sin x}{x} \, \mathrm{d}x, \quad k > 0.$$

Если бы возможно было применить теорему 3.11 (о непрерывности интеграла от параметра), то функция $\mathcal{I}(1, k)$ была бы н е п р е р ы в н о й по k $(k \geq 0)$ и

$$\mathcal{J} = \int\limits_0^\infty \lim_{k \to +0} \frac{e^{-kx} \sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{k \to +0} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-kx} \sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{k \to +0} \operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{k}.$$

Согласно 3.11 функция $\mathcal{I}(1, k)$ будет непрерывной по k, если:
1) $f(x,\, k) = \frac{e^{-kx} \sin x}{x}$ непрерывна при $k \in [0, \infty), x \in [0, \infty)$ (очевидно), и
2) интеграл $\mathcal{I}(1, k) = \int\limits_0^\infty f(x,\, k) \, \mathrm{d}x$ сходится равномерно по k $(k \geq 0)$: по признаку Абеля (см. пример на с. 100).

Итак, полностью обосновано действие:

$$\mathcal{J} = \lim_{k \to +0} \mathcal{I}(1, k) = \lim_{k \to +0} \operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{k} = \tfrac{\pi}{2}.$$

3.2.5. *Задачи для самостоятельного решения*

1. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + \alpha^2} \, \mathrm{d}x$; б) $\lim\limits_{\alpha \to 1} \int\limits_{2}^{4} \frac{x \, \mathrm{d}x}{1 + x^2 + \alpha^5}$; в) $\lim\limits_{\alpha \to 1} \int\limits_{0}^{1} x^2 e^{\alpha x^3} \mathrm{d}x$;

г) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int\limits_{0}^{\pi} x \cos(1 + \alpha) x \mathrm{d}x$.

Ответы: а) 1; б) $\frac{1}{2} \ln 3$; в) $\frac{e-1}{3}$; г) -2.

2. Найти $\mathfrak{I}'(\alpha)$, если:

а) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^\alpha \frac{\ln(1 + \alpha x)}{x} \, \mathrm{d}x$; б) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} e^{\alpha^4 x^2} \mathrm{d}x$; в) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_{\mathrm{ch}\alpha}^{\mathrm{sh}\alpha} \ln(1 + x^2 + \alpha^2) \mathrm{d}x$.

Ответы: а) $\frac{2}{\alpha} \ln(1 + \alpha^2)$; б) $4\alpha^3 \int\limits_{\sin \alpha}^{\cos \alpha} x^2 e^{\alpha^4 x^2} \mathrm{d}x + e^{\alpha^4 \sin^2 \alpha} \cos \alpha + e^{\alpha^4 \cos^2 \alpha} \sin \alpha$;

в) $\frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right) + \operatorname{ch} \alpha \cdot \ln(\operatorname{ch}^2 \alpha + \alpha^2) - \operatorname{sh} \alpha \cdot \ln(\operatorname{ch}^2 \alpha +$
$+ \alpha^2 + 1)$.

3. С помощью дифференцирования по параметру α вычислить интеграл $\mathfrak{I}(\alpha)$, если:

а) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\mathrm{d}x$, $|\alpha| < 1$; б) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^{\pi} \ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$, $|\alpha| < 1$;

в) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$.

Ответы: а) 0; б) $2\pi\arcsin\alpha$; в) $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha\cdot\ln\bigl(1+|\alpha|\bigr)$.

4. Исследовать на равномерную сходимость на множестве E интеграл $\mathfrak{I}(\alpha)$:

а) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\alpha^2 x}{\sqrt[3]{x^2}}\operatorname{arctg}\alpha x\,\mathrm{d}x$, $E = \{\alpha:\ |\alpha| \geq 1\}$;

б) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{4+\alpha^2x^2}$, $E = \mathbb{R}$;

в) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$, $E = \{\alpha:\ -\infty < \alpha < -1/2\}$;

г) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\cdot\operatorname{arctg}\alpha x\,\mathrm{d}x$, $E = \mathbb{R}$.

Ответы: а), б), г) — сходится равномерно; в) сходится неравномерно.

5. Доказать, что функция $\mathfrak{I}(\alpha)$ непрерывна на множестве E, если:

а) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x$, $E = \mathbb{R}$; б) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, $E = \mathbb{R}$;

в) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^{1} \frac{\sin(\alpha/x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, $E = (0,\,1)$; г) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, $E = [0,\,1)$.

6. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, $|\alpha| \leq 1$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x\ \operatorname{arctg}\beta x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

д) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$; е) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

ж) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin^2\beta x\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, $\alpha > 0$.

Ответы: а) $-\arcsin^2\alpha$; б) $\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2(\alpha+\beta)}}$; в) $\frac{\pi}{2}\left(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}\right)$;
г) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\beta^\beta}$; д) $\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$; е) $\frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha\beta+1)$; ж) $\beta\operatorname{arctg}\frac{2\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{4}\ln\left(1+\frac{4\beta^2}{\alpha^2}\right)$.

3.3. Гамма-функция Эйлера

Рассмотрим одну из важнейших специальных функций, часто встречающуюся в различных приложениях.

Гамма-функцией $\Gamma(p)$ называется функция, определяемая посредством несобственного интеграла

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

Особыми точками для этого интеграла являются $x = \infty$ и $x = 0$ (последняя — при $p < 1$). Область определения гамма-функции: $p > 0$ (определение $\Gamma(p)$ для $p \leq 0$ см в [27]). В частности, $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \mathrm{d}x = 1$.

3.3.1. *Свойства гамма-функции*

1). Формула приведения

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p). \tag{3.8}$$

Любое нецелое число p можно представить в виде $p = n + \alpha$, где $n = [p]$ — целая часть, а $\alpha = \{p\}$ — дробная часть $(0 < \alpha < 1)$ числа p. Тогда на основании (3.8):

$$\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1) = (p-1)(p-2)\,\Gamma(p-2) = \ldots = \\ = (p-1)(p-2)\ldots(p-n)\,\underbrace{\Gamma(p-n)}_{=\Gamma(\alpha)},$$

причем значения $\Gamma(\alpha)$ табулированы.

Если $p = n \in \mathbb{N}$, последовательное применение формулы (3.8) дает $\Gamma(n) = (n-1)!$ или

$$n! = \Gamma(n+1). \tag{3.9}$$

2). Вертикальные асимптоты $\Gamma(p)$

Из (3.8) получаем

$$\Gamma(p) = \tfrac{\Gamma(p+1)}{p}\,; \tag{3.10}$$

при $p \to +0$: $\Gamma(p) \to +\infty$, т.е. $\Gamma(0) = \lim\limits_{p\to+0} \Gamma(p) = +\infty$.

3). Формула дополнения

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \qquad (0 < p < 1). \tag{3.11}$$

П р и м е р 1. Вычислить $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Р е ш е н и е . Если в формуле (3.11) положить $p = \frac{1}{2}$, то получим

$$\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi \quad \text{или} \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

П р и м е р 2 . Вычислить интеграл Пуассона $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Р е ш е н и е . Сделаем замену $x^2 = t$, тогда $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$, и получаем

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{1/2-1}\,e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(по результату предыдущего примера).

П р и м е р 3 .Выразить через значения гамма-функции интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$.

Р е ш е н и е . Сделаем замену:

$$t = x^\alpha \;\Rightarrow\; x = t^{\frac{1}{\alpha}} \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{\alpha}t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt,$$

$$\text{тогда} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

3.3.2. *Задачи для самостоятельного решения*

1. Вычислить: а) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$; б)$\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right)$.

Ответ: а) $\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$; б)$-\frac{32\sqrt{\pi}}{945}$.

2. Выразить через значения гамма-функции интегралы:

а) $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x^\beta}\mathrm{d}x,\ \ \alpha > -1,\ \beta > 0$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x}e^{p\,x}\mathrm{d}x,\ \ p > 0$.

Ответы: а) $\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$; б) $\Gamma(p)$.

3.4. Преобразование Фурье

3.4.1. *Интеграл Фурье и спектральные характеристики непериодической функции*

Непериодическая функция $f(x)$ называется оригиналом по Фурье если:

i) на любом конечном отрезке кусочно непрерывна и кусочно монотонна или

i′) на любом конечном отрезке кусочно гладка;

ii) кроме того, $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$, т.е. интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ сходится.

Теорема 3.14 (Теорема Фурье) *Если непериодическая функция $f(x)$, определенная на $(-\infty, \infty)$, является оригиналом по Фурье (т.е. удовлетворяет условиям i (i′) и ii), то почти всюду (т.е. за исключением точек разрыва) имеет место равенство*

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\omega(x-\xi)}\,\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\omega, \quad x \in (-\infty, \infty). \tag{3.12}$$

Это равенство называется *интегральной формулой Фурье* для функции $f(x)$, а ее правая часть — *интегралом Фурье* (в комплексной форме) для данной функции.

Интегральную формулу Фурье записывают еще так:

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi}\,\mathrm{d}\xi \right) e^{i\omega x} \mathrm{d}\omega. \tag{3.13}$$

Функция

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{3.14}$$

называется *спектральной функцией* (или *спектральной плотностью*) функции $f(x)$. Как правило, она является комплекснозначной функцией частоты ω.

Отметим, что внешний интеграл в (3.13) вычисляется как несобственный интеграл в смысле главного значения:

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{d}\omega = \lim_{M\to+\infty} \int\limits_{-M}^{M} F(\omega)\mathrm{d}\omega.$$

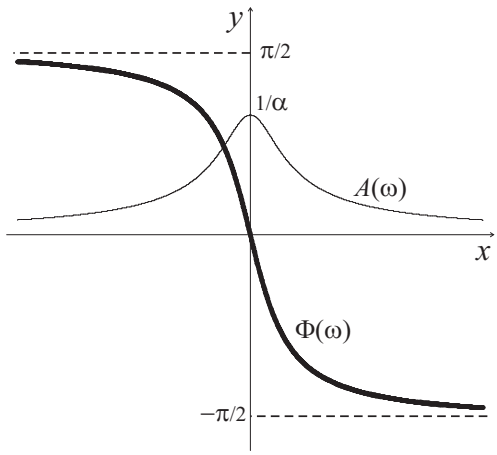

Рис. 3.2. Амплитудный $A(\omega)$ и фазовый $\varphi(\omega)$ частотные спектры для функции из примера на с. 112

Действительнозначные функции $A(\omega) = |F(\omega)|$, $\varphi(\omega) = \arg F(\omega)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$, называются *амплитудной* и *фазовой спектральными функциями* (*характеристиками*) непериодической функции $f(x)$. Их называют также амплитудным и фазовым *частотными спектрами* функции $f(x)$. Графики их — непрерывные кривые.

Свойства частотных спектров непериодической функции

1. Амплитудный спектр $A(\omega)$ — четная функция, график ее симметричен относительно прямой $\omega = 0$.
2. Ось $O\omega$ является асимптотой амплитудного спектра, т.е. $\lim\limits_{\omega\to\infty} A(\omega) = 0$ (см. рис. 3.2).
3. Фазовый частотный спектр $\varphi(\omega) = \arg F(\omega)$ ограничен ($\varphi(\omega) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) и симметричен относительно точки $\omega = 0$ на оси $O\omega$ (см. рис. 3.2).

Пример 1. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \qquad \alpha > 0,$$

представить интегралом Фурье. Найти ее спектры.

Решение. Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha}\, e^{-\alpha x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha}$, то функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$. На всяком отрезке конечной длины $f(x)$ — кусочно гладкая. Поэтому для нее выполнены

условия разложения в интеграл Фурье, т.е.

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x}\, \mathrm{d}\omega,$$

$$\text{где} \quad F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi}\, \mathrm{d}\xi = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\xi} \mathrm{d}\xi = -\tfrac{1}{\alpha+i\omega}\, e^{-(\alpha+i\omega)\xi}\Big|_0^{\infty} = \tfrac{1}{\alpha+i\omega}\,,$$

поскольку $\lim\limits_{\xi\to\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\xi} = \lim\limits_{\xi\to\infty} e^{-\alpha\xi}\left(\cos\omega\xi - i\sin\omega\xi\right) = 0.$

Итак, по теореме 3.14 функцию $f(x)$ можно представить комплексным интегралом Фурье

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\alpha + i\omega}\, \mathrm{d}\omega. \tag{3.15}$$

Здесь равенство имеет место всюду, т.е. за исключением точки разрыва $x = 0$, для которой и интеграл в правой части расходящийся. Для нахождения спектральных характеристик $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ преобразуем спектральную функцию

$$F(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\,,$$

откуда получаем

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}\,,$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{Im} F(\omega)}{\operatorname{Re} F(\omega)} = \operatorname{arc\,tg} \frac{-\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}}{\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}} = -\operatorname{arc\,tg} \tfrac{\omega}{\alpha}\,.$$

Графики этих функций представлены на рис. 3.2.

3.4.2. *Различные формы записи интеграла Фурье*

От интеграла Фурье в комплексной форме (3.12) можно перейти к интегралу Фурье в действительной форме, напоминающей тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \Big[\cos\omega x \cos\omega\xi + \sin\omega x \sin\omega\xi \Big] \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\omega$$

или

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \int\limits_{0}^{\infty} \Big[a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x \Big] \mathrm{d}\omega, \qquad x \in (-\infty,\, \infty), \tag{3.16}$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega\xi \mathrm{d}\xi, \qquad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\omega\xi \mathrm{d}\xi. \tag{3.17}$$

Отметим также, что

$$F(\omega) = \pi(a(\omega) - ib(\omega)). \tag{3.18}$$

Аналогично тому, как это делалось в рядах Фурье (с. 74), получаются специальные формулы в случае наличия симметрии раскладываемой функции:

1) $f(x)$ — четная, тогда $b(\omega) = 0$, $f(x) \overset{\text{пв}}{=} \int\limits_0^\infty a(\omega)\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega$, где $a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi\,\mathrm{d}\xi$;

2) $f(x)$ — нечетная, тогда $a(\omega) = 0$, $f(x) \overset{\text{пв}}{=} \int\limits_0^\infty b(\omega)\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega$, где $b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(\xi)\sin\omega\xi\,\mathrm{d}\xi$.

П р и м е р 1. От комплексной формы интеграла Фурье (3.15) в предыдущем примере перейти к действительной форме.

Р е ш е н и е . 1-й способ. Преобразуем интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\alpha + i\omega}\,\mathrm{d}\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos\omega x + i\sin\omega x)(\alpha - i\omega)}{(\alpha + i\omega)\,(\alpha - i\omega)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\cos\omega x + \omega\sin\omega x}{\alpha^2 + \omega^2}\,\mathrm{d}\omega + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\sin\omega x - \omega\cos\omega x}{\alpha^2 + \omega^2}\,\mathrm{d}\omega =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\alpha\cos\omega x + \omega\sin\omega x}{\alpha^2 + \omega^2}\,\mathrm{d}\omega$$

(один из интегралов обращается в нуль в силу нечетности подынтегральной функции по ω).

Окончательно, интеграл Фурье в действительной форме для функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\alpha\cos\omega x + \omega\sin\omega x}{\alpha^2 + \omega^2}\,\mathrm{d}\omega.$$

2-й способ. Воспользуемся равенством (3.18), ведь Фурье-образ в комплексной

форме $F(\omega)$ уже вычислен на с.113 :

$$F(\omega)=\frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2}=\pi(a(\omega)-ib(\omega))\ \Rightarrow\ a(\omega)=\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)},\ b(\omega)=\frac{\omega}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}.$$

Но тогда действительная форма интеграла Фурье получена

$$f(x)\overset{\text{пв}}{=}\int\limits_0^\infty\Big[a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x\Big]\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\alpha\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{\alpha^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega.$$

П р и м е р 2. Представить интегралом Фурье вида (3.16) функцию

$$f(x)=\begin{cases}1; & |x|\le 1,\\ 0; & |x|>1.\end{cases}$$

Р е ш е н и е . Функция четна, поэтому $b(\omega)=0$;

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi\,\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1\cos\omega\xi\,\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\omega\xi}{\omega}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\omega}{\omega}\,.$$

Итак,

$$F(\omega)=\pi a(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega},\ f(x)\overset{\text{пв}}{=}\int\limits_0^\infty\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\omega}{\omega}\,\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega,$$

где, напомним, буквы «пв» (почти всюду) означают, что последний интеграл сходится к функции $\begin{cases}1, & \text{если } |x|<1,\\ 0, & \text{если } |x|>1,\\ 1/2, & \text{если } |x|=1.\end{cases}$

Интересное следствие отсюда: при $x=0$ получаем

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=1\quad\text{или}\quad\int\limits_0^\infty\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}\,.$$

В качестве побочного результата вычислен несобственный интеграл для функции, первообразная которой не является элементарной функцией.

3.4.3. *Преобразование Фурье и его свойства*

Пусть непериодическая функция $f(x)$ удовлетворяет достаточным условиям разложения в интеграл Фурье (см. с. 111), тогда

$$f(x)\overset{\text{пв}}{=}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega,\quad x\in(-\infty,\,\infty),\tag{3.19}$$

где

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \mathrm{d}x, \quad \omega \in (-\infty, \infty). \tag{3.20}$$

Операция, ставящая функции $f(x)$ в соответствие функцию $F(\omega)$ согласно (3.20), называется *прямым преобразованием Фурье* (сокращенно ППФ).

Операция, ставящая функции $F(\omega)$ в соответствие функцию $f(x)$ согласно (3.19), называется *обратным преобразованием Фурье* (сокращенно ОПФ).

Функция, допускающая ППФ, называется *оригиналом*, а функция, получающаяся в результате ППФ, — *изображением по Фурье* (*Фурье-образом*).

Соответствие между оригиналом $f(x)$ и изображением $F(\omega)$ будем обозначать так: $f(x) \risingdotseq F(\omega)$.

Свойства преобразования Фурье

Пусть $f(x) \risingdotseq F(\omega)$ и $g(x) \risingdotseq G(\omega)$, тогда

1) $\alpha f(x) + \beta g(x) \risingdotseq \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$, где α, β — произвольные числа (линейность ПФ);

2) $f^{(k)}(x) \risingdotseq (i\omega)^k F(\omega)$ (дифференцирование оригинала);

3) $\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \risingdotseq -\frac{i}{\omega} F(\omega)$ (интегрирование оригинала);

4) $f(x-\beta) \risingdotseq e^{-i\omega\beta} F(\omega)$ (теорема запаздывания);

5) $e^{i\beta x} f(x) \risingdotseq F(\omega - \beta)$ (теорема смещения);

6)$f(ax) \risingdotseq \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ (теорема подобия);

7) $(-i)^k x^k f(x) \risingdotseq F^{(k)}(\omega)$ (дифференцирование изображения);

8) $F(x) \risingdotseq 2\pi f(-\omega)$ (симметрия ПФ);

9) $f(x)\sin(\omega_0 x) \risingdotseq \frac{1}{2i}(F(\omega-\omega_0) - F(\omega+\omega_0))$,
$f(x)\cos(\omega_0 x) \risingdotseq \frac{1}{2}(F(\omega-\omega_0) + F(\omega+\omega_0))$ (теорема о модуляции);

10) $\frac{1}{2i}(f(x+x_0) - f(x-x_0)) \risingdotseq F(\omega)\sin(\omega t_0)$,
$\frac{1}{2}(f(x+x_0) + f(x-x_0)) \risingdotseq F(\omega)\cos(\omega t_0)$;

11) $f_1 * f_2 \risingdotseq F_1(\omega) F_2(\omega)$, где $f_1(x) * f_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t)\mathrm{d}t$ (теорема о свертке).

★ Для нахождения изображения по оригиналу и наоборот (оригинала по изображению) можно использовать определение (см. с. 116). Но можно обойтись без вычисления интеграла, воспользовавшись таблицей изображений (см. приложение на с. 128) и перечисленными свойствами преобразования Фурье.

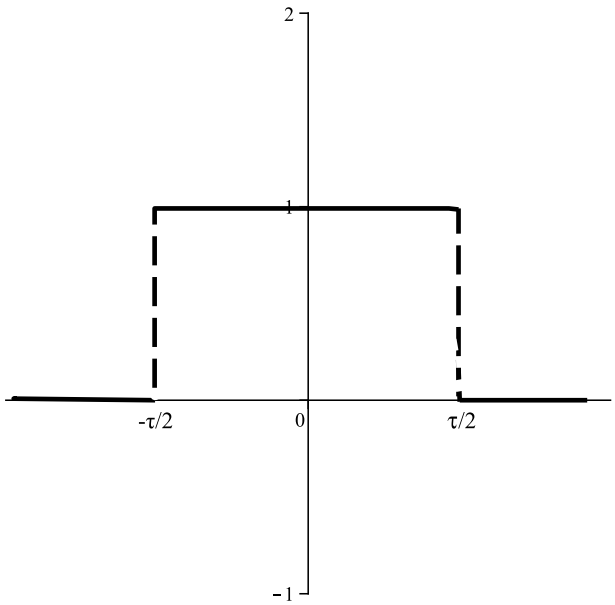

Рис. 3.3. Стробирующая функция $G_\tau(x)$

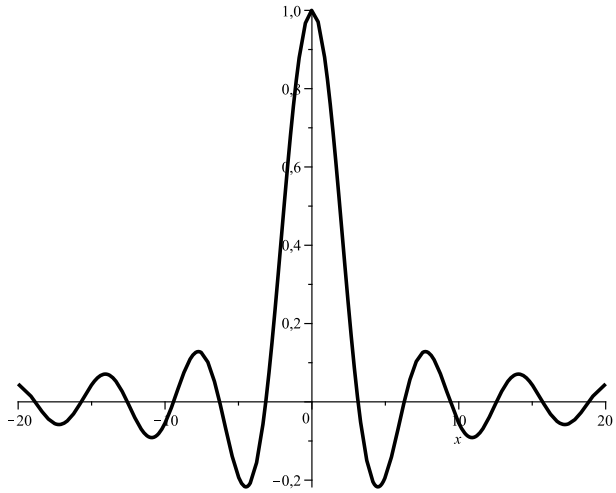

Рис. 3.4. Функция отсчетов $S(\omega)$

П р и м е р 1 . Найти изображение по Фурье для так называемой стробирующей (см. рис. 3.3) функции

$$G_\tau(x) = \begin{cases} 1; & |x| \le \frac{\tau}{2}, \\ 0; & |x| > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Воспользуемся результатом примера 2 на странице 115:

$G_2(x) \risingdotseq 2S(\omega)$, где $S(\omega) = \begin{cases} \frac{\sin\omega}{\omega}; & \omega \ne 0, \\ 1; & \omega = 0 \end{cases}$ (т.н. функция отсчетов, см. рис. 3.4).

Далее по теореме подобия 6) для $a = \frac{2}{\tau}$ имеем

$$G_\tau(x) = G_2(\tfrac{2x}{\tau}) \risingdotseq \tfrac{\tau}{2} 2S(\tfrac{\tau}{2}\omega) = \tau S(\tfrac{\tau}{2}\omega).$$

Задача решена.

П р и м е р 2 . Найти изображение по Фурье для оригиналов:

$$1)\, f(x) = xe^{-|x|};\ 2)\, f(x) = e^{-2|x|}\cos 3x;\ 3)\, f(x) = \begin{cases} e^{-2x}; & x \ge 4, \\ 0; & x < 4. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . 1). Воспользуемся табличным оригиналом: $e^{-|x|} \risingdotseq \frac{2}{1+\omega^2}$ и свойством 7) — теорема о дифференцировании изображения.

$$xe^{-|x|} = i(-ixe^{-|x|}) \risingdotseq i\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)' = \frac{-4i\omega}{1+\omega^2}.$$

2). Для функции $f(x) = e^{-2|x|}\cos 3x$ снова используем таблицу (см приложение на с. 128): $e^{-2|x|} \risingdotseq \frac{4}{4+\omega^2}$ и теорему о модуляции (свойство 9)) :

$$e^{-2|x|}\cos 3x \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{4+(\omega-3)^2} + \frac{4}{4+(\omega+3)^2}\right).$$

3). Теперь найдем изображение для $f(x) = \begin{cases} e^{-2x}; & x \geq 4, \\ 0; & x < 4. \end{cases}$

В примере на с. 112 получено изображение $e^{-2x}\eta(x) \risingdotseq \frac{1}{2+i\omega}$, где

$\eta(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0, \\ 0; & x < 0 \end{cases}$ — единичная функция Хевисайда (см. рис. 3.5).

Преобразуем запись заданного оригинала

$$f(x) = e^{-2x}\eta(x-4) = e^{-8}e^{-2(x-4)}\eta(x-4).$$

По теореме запаздывания $e^{-2(x-4)}\eta(x-4) \risingdotseq e^{-4i\omega}\frac{1}{2+i\omega}$, поэтому окончательно получаем

$$f(x) = e^{-2x}\eta(x-4) \risingdotseq \frac{e^{-4i\omega-8}}{2+i\omega}.$$

П р и м е р 3 . Найти оригиналы для изображений:

$$1)\, F(\omega) = \frac{6}{\omega^2 - 2i\omega + 3};\ 2)\, F(\omega) = \frac{e^{i\omega}}{(1+i\omega)(2+i\omega)}.$$

Р е ш е н и е . 1). Функцию $F(\omega)$ преобразуем так, чтобы можно было применить таблицу $e^{-\alpha|x|} \risingdotseq \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$, кроме того, применим теорему смещения 5):

$$F(\omega) = \frac{6}{\omega^2 - 2i\omega + 3} = \frac{(3/2)4}{(\omega-i)^2+4} \risingdotseq \tfrac{3}{2}e^{iix}e^{-2|x|} = \tfrac{3}{2}e^{-2|x|-x}.$$

2). Заданную дробь разложим в сумму простейших:

$$F(\omega) = \frac{e^{i\omega}}{(1+i\omega)(2+i\omega)} = e^{i\omega}\left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{2+i\omega}\right).$$

Теперь используем табличное изображение $\frac{1}{\alpha+i\omega} \risingdotseq e^{-\alpha x}\eta(x)$ и теорему запаздывания 4):

$$F(\omega) \risingdotseq (e^{-(x+1)} - e^{-2(x+1)})\eta(x+1) = f(x).$$

Некоторые действия над оригиналами сводятся к более простым действиям над их изображениями (см. приведенные свойства). Поэтому исходную (сложную) задачу для оригинала можно с помощью ППФ свести к менее трудоемкой для изображения, найти ее решение, а затем с помощью ОПФ вернуться в пространство оригиналов к искомому решению. Этот прием используется для решения дифференциальных уравнений.

3.4.4. *Косинус- и синус-преобразования Фурье*

Функции $F_c(\omega)$ и $F_s(\omega)$ будем называть прямыми косинус- и синус-преобразованиями Фурье для односторонней (т.е. определенной для $x \geq 0$) функции-оригинала $f(x)$, если

$$F_c(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\mathrm{d}x,\ \ F_s(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x. \tag{3.21}$$

И, соответственно,

$$f(x) \overset{\text{пв}}{=} 2\int\limits_0^\infty F_c(\omega)\cos(\omega x)\mathrm{d}\omega,\ \ f(x) \overset{\text{пв}}{=} 2\int\limits_0^\infty F_s(\omega)\sin(\omega x)\mathrm{d}\omega,\ x \in [0,\infty) \tag{3.22}$$

обратные косинус- и синус-преобразования Фурье.

Доопределяя одностороннюю функцию-оригинал на всю действительную ось по-разному, будем получать преобразования Фурье соответствующих продолжений, которые выражаются через косинус- и синус-преобразования первоначальной функции. [1]

Сведем в таблицу возможные варианты продолжений:

Оригиналы	Фурье-образы
односторонняя функция $f(x),\ x \in [0,\infty)$	$F_c(\omega),\quad F_s(\omega)$
$f_1(x) = f(x)\eta(x) = \begin{cases} f(x); & x \geq 0, \\ 0; & x < 0. \end{cases}$	$F_1(\omega) = \pi(F_c(\omega) - iF_s(\omega))$ $a(\omega) = F_c(\omega),\ b(\omega) = F_s(\omega)$
четное продолжение: $f_2(x) = \begin{cases} f(x); & x \geq 0, \\ f(-x); & x < 0. \end{cases}$	$F_2(\omega) = 2\pi F_c(\omega) = \pi a(\omega) \Rightarrow$ $a(\omega) = 2F_c(\omega),\ (b(\omega) = 0)$
нечетное продолжение: $f_3(x) = \begin{cases} f(x); & x \geq 0, \\ -f(-x); & x < 0. \end{cases}$	$F_3(\omega) = -2\pi i F_s(\omega) = -\pi i b(\omega) \Rightarrow$ $b(\omega) = 2F_s(\omega),\ (a(\omega) = 0).$

Для четных и нечетных функций определение косинус- и синус-преобразований Фурье дается так же как и для односторонних (см. (3.21)). В частности, их преобразование Фурье $F(\omega)$ отличается лишь коэффициентом от $F_c(\omega)$ или $F_s(\omega)$ (см. таблицу).

[1] Сравните с процедурой периодического продолжения функции, заданной на отрезке $[0, l]$, для рядов Фурье, с.76

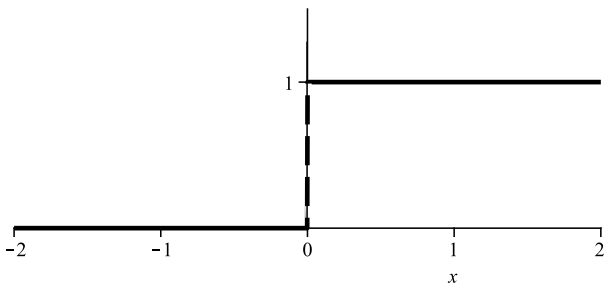

Рис. 3.5. Единичная функция Хевисайда $\eta(x)$

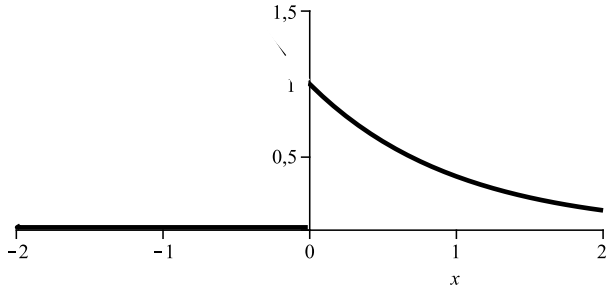

Рис. 3.6. График одностороннего продолжения $f_1(x)$

П р и м е р 1 . Найти синус-преобразование для функций:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} x; & |x| \le 1, \\ 0; & |x| > 1; \end{cases} \quad 2)\, g(x) = \begin{cases} 2; & 0 \le x \le 1, \\ 0; & x > 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . 1). Функция $f(x)$ является нечетной функцией-оригиналом. Ее синус-преобразование находим по определению (3.21):

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 x\sin(\omega x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\sin\omega}{\pi\omega^2} - \frac{\cos\omega}{\pi\omega}; & \omega \ne 0, \\ 0; & \omega = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $F(\omega) = -2\pi i F_s(\omega)$.

2). Функция $g(x)$ — односторонняя, находим ее синус-преобразование по формуле (3.21) для $\omega \ne 0$ ($F_s(0) = 0$):

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 2\sin(\omega x)\mathrm{d}x = -\frac{2\cos\omega x}{\pi\omega}\Big|_0^1 = \frac{2 - 2\cos\omega}{\pi\omega}.$$

П р и м е р 2 . Продолжив функцию $f(x) = e^{-2x}, x \ge 0$ тремя способами, найти преобразование Фурье для каждого случая.

Р е ш е н и е . 1-й способ

1). Продолжим $f(x)$, доопределив ее слева нулем (см. рис. 3.6):

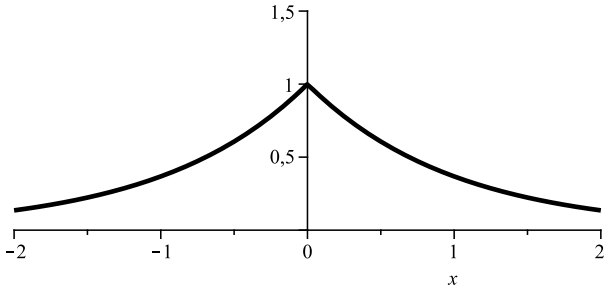

Рис. 3.7. График четного продолжения $f_2(x)$

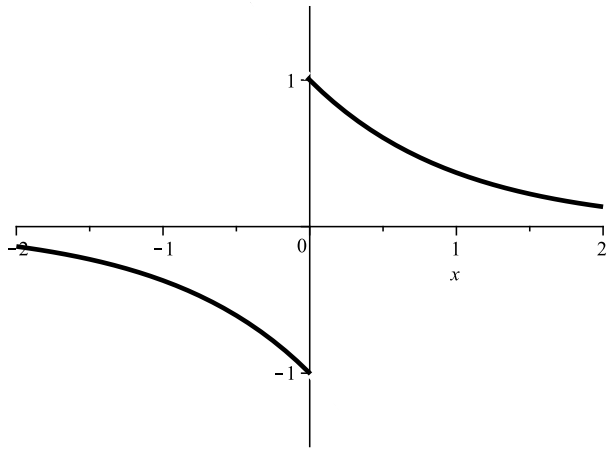

Рис. 3.8. График нечетного продолжения $f_3(x)$

$f_1(x) = f(x)\eta(x)$. Но для полученной функции преобразование Фурье известно (см. приложение на с. 128):

$$e^{-2x}\eta(x) \risingdotseq \frac{1}{2+i\omega} = \frac{2-i\omega}{4+\omega^2} = \frac{2}{4+\omega^2} - \frac{i\omega}{4+\omega^2} = \pi(F_c(\omega) - iF_s(\omega)).$$

Т.е. получили:

$$F_1(\omega) = \frac{1}{2+i\omega},\ F_c(\omega) = \frac{2}{\pi(4+\omega^2)},\ F_s(\omega) = \frac{\omega}{\pi(4+\omega^2)}.$$

2). Продолжим $f(x)$ на всю ось четно (см. рис.3.7): $f_2(x) = e^{-2|x|}$, Фурье-образ этой функции также известен (см. приложение на с. 128):

$$e^{-2|x|} \risingdotseq \frac{4}{4+\omega^2} = 2\pi F_c(\omega) \Rightarrow F_2(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2},\ F_c(\omega) = \frac{2}{\pi(4+\omega^2)}.$$

3). Теперь продолжим $f(x)$ нечетно (см. рис.3.8): $f_3(x) = \begin{cases} e^{-2x}; & x \geq 0, \\ -e^{2x}; & x < 0. \end{cases}$

Снова воспользуемся таблицей (приложение на с.128):

$$f_3(x) \risingdotseq \frac{-2i\omega}{4+\omega^2} = -2\pi i F_s(\omega) \Rightarrow F(\omega) = \frac{-2i\omega}{4+\omega^2},\ F_s(\omega) = \frac{\omega}{\pi(4+\omega^2)}.$$

2 - й с п о с о б

Поскольку для всех трех способов продолжения косинус- и синус- преобразования $F_c(\omega)$, $F_s(\omega)$ находятся для односторонней функции $f(x)$, проще было

бы сначала найти именно их. Сделать это можно по таблице для $f(x)\eta(x)$ (как в пункте 1)):

$$F_c(\omega) = \frac{2}{\pi(4+\omega^2)},\ F_s(\omega) = \frac{\omega}{\pi(4+\omega^2)}.$$

Но тогда сразу все Фурье-образы известны:

$$F_1(\omega) = \pi(F_c(\omega) - iF_s(\omega)) = \frac{1}{2+i\omega},\ F_2(\omega) = 2\pi F_c(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2},$$

$$F_3(\omega) = -2\pi i F_s(\omega) = \frac{-2i\omega}{4+\omega^2}.$$

3.4.5. *Задачи для самостоятельного решения*

1). Представить функции-оригиналы $f(x)$ их интегралами Фурье в комплексной и действительной форме:

$$a) f(x) = \mathrm{sign}(x-a) - \mathrm{sign}(x-b),\ b>a;\ b)\ f(x) = \begin{cases} \mathrm{sign}x; & |x|<1, \\ 0; & |x|>1. \end{cases}$$

Ответы:a) $F(\omega) = \frac{2\sin\pi\omega(b-a)}{\pi\omega} e^{-\pi i\omega(a+b)}$; $b)\ F(\omega) = \frac{2\sin^2\pi\omega}{\pi i\omega}$.

2). Найти спектральные характеристики функций-оригиналов:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 1+x; & -1<x<0, \\ 1-x; & 0<x<1, \\ 0; & |x|>1; \end{cases} \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} 2; & 0<x<2, \\ 0; & x<0,\ x>2. \end{cases}$$

Ответы: $a)\ F(\omega) = \frac{\sin^2\pi\omega}{\pi\omega^2}$, $A(\omega) = \frac{\sin^2\pi\omega}{\pi\omega^2}$, $\varphi(\omega) = 0$;
$b)\ F(\omega) = \frac{\sin 4\pi\omega + i(\cos 4\pi\omega - 1)}{\pi\omega}$, $A(\omega) = \frac{2|\sin 2\pi\omega|}{\pi|\omega|}$,
$\varphi(\omega) = -\arg F(\omega) = \begin{cases} 0; & \omega = 0, \omega = \frac{1}{2}, \\ -2\pi\omega; & 0<\omega<\frac{1}{2}, \end{cases}$ $\varphi(\omega + \frac{1}{2}) = \varphi(\omega)$.

3). Найти косинус- и синус-преобразования функций:

$$a)\ f(x) = xe^{x^2};\ b)\ f(x) = e^{-\alpha|x|}\cos\beta x,\ \alpha>0.$$

Ответы: $a)\ F_s(\omega) = \frac{\omega\sqrt{\pi}}{4} e^{-\omega^2/4}$; $b)\ F_c(\omega) = \frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)}{(\alpha^2+(\beta+\omega)^2)(\alpha+(\beta-\omega)^2)}$.

4). Восстановить оригинал, если

$$a)\ F(\omega) = \frac{1}{(i\omega+1)(i\omega+2)},\ b)\ F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} + \frac{3e^{-2i\omega}}{7+i\omega}.$$

Ответы: $a)\ e^{-x}\eta(x) - e^{-2x}\eta(x)$; $b)\ e^{-|x|} + 3e^{-7(x-2)}\eta(x-2)$.

Библиографический список

1. Карташев А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. М.: Наука, 1986. 272 с.

2. Бугров Я.С. Высшая математика: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Дрофа (Высшее образование.Современный учебник), 2005. 464с.

3. Богданов Ю.С. Курс дифференциальных уравнений / Ю.С. Богданов, С.А. Мазаник, Ю.Б. Сыроид. Минск: Універсітэцкае, 1996. 288 с.

4. Матвеев Н.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Н.М. Матвеев. СПб.: Специальная литература, 1996. 372 с.

5. Тихонов А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 1998. 232 с.

6. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.Л. Краснов. М.: Высш. шк., 1983. 128 с.

7. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф. Филиппов. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 240 с.

8. Боярчук А.К. Справочное пособие по высшей математике. Т.5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А.К. Боярчук, Г.П. Головач. М.: Едиториал УРСС, 2001. 384 с.

9. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие для втузов. / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Едиториал УРСС, 2002. 256 с.

10. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. М.: Наука, 1973. 128 с.

11. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. М.: Высш. шк., 1989, 384 с.

12. Альсевич Л.А. Практикум по дифференциальным уравнениям / Л.А. Альсевич, Л.П. Черенкова. Минск: Вышэйшая школа, 1990. 320 с.

13. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1 / В.И. Смирнов. М.: Наука, 1981. 480 с.

14. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2 / В.И. Смирнов. М.: Наука, 1974. 656 с.

15. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1 / Л.Д. Кудрявцев. М.: Высш. шк., 1988. 712 с.

16. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2 / Л.Д. Кудрявцев. М.: Высш. шк., 1988. 576 с.

17. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.3 / Л.Д. Кудрявцев. М.: Высш. шк., 1989. 352 с.

18. Воробьев Н.Н. Теория рядов / Н.Н. Воробьев. М.: Наука, 1986. 408 с.

19. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, В.И. Шабунин. М.: Наука, 1986. 528 с.

20. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, В.И. Шабунин. СПб.: ИЧП «Кристалл», 1994. 496 с.

21. Ефимов А.В. Сборник задач по математике для втузов. Т.1: Линейная алгебра и основы математического анализа / А.В. Ефимов, Б.П. Демидович (ред.). М.: Наука, 1981. 464с.

22. Ефимов А.В. Сборник задач по математике для втузов. Т.2: Специальные разделы математического анализа / А.В. Ефимов, Б.П. Демидович (ред.). М.: Наука, 1981. 368с.

23. Справочное пособие по высшей математике. Т.1: Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. М.: Едиториал УРСС, 2001. 360 с.

24. Справочное пособие по высшей математике. Т.3: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. М.: Едиториал УРСС, 2001. 224 с.

25. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях / П.А. Шмелев. М.: Высш. шк., 1983. 176 с.

26. Зенков А.В. Ряди и ряды Фурье. / А.В.Зенков . Екатеринбург: Изд-во УГТУ - УПИ, 2010. 74 с.

27. Зенков А.В. Дифференциальные уравнения, несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра / А.В.Зенков. Екатеринбург: Изд-во УГТУ - УПИ, 2010. 87 с.

28. Махнев А.А. Определенные и несобственные интегралы. Интегралы, зависящие от параметра. Ряды/ А.А.Махнев , Н.В.Мельникова , Ю.Б.Мельников. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2001. 226 с.

Приложения

1. *Типы ДУ первого порядка*

Тип уравнения	**Способ решения**
ДУ с разделяющимися переменными $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\,g(y)$	Разделение переменных $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$ либо $g(y) = 0$
Однородные уравнения $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$	Замена $z(x) = \frac{y}{x}$, $y' = z'x + z$
Уравнения, сводящиеся к однородным $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$	Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то замена $a_1x + b_1y = z(x)$ Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, замена $\begin{cases} x = u+\alpha, \\ y = v+\beta, \end{cases}$ где $\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1 = 0, \\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2 = 0. \end{cases}$
Линейное ДУ $y' + P(x)y = Q(x)$	Замена $y = u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$
ДУ Бернулли $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$	Замена $y = u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$
Уравнение в полных дифференциалах $M(x,\,y)\,\mathrm{d}x + N(x,\,y)\,\mathrm{d}y = 0$, если $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$	Восстановление функции $F(x,y)$ из системы $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y). \end{cases}$ $F(x,y) = C$ – общий интеграл.

2. *Типы ДУ второго порядка*

Тип уравнения	**Способ решения**
$\frac{d^2y}{dx^2} = f\,(x)$	Последовательное интегрирование $y = \int(\int f(x)\mathrm{dx})\mathrm{dx}$
$F\big(x,\, y',\, y''\big) = 0$	Замена $y' = p(x), y'' = p'(x).$
$F\big(y,\, y',\, y''\big) = 0$	Замена $y' = p(y), y'' = p'_y p.$
Однородное ДУ $F(x, y, y', y'') = 0$, если $F(x, ty, ty', ty'') = t^m F(x, y, y', y'')$	Замена $\frac{y'}{y} = z(x)$, $y'' = y(z^2 + z').$
ДУ в полных производных $\frac{d}{dx}G(x, y, y') = 0$	Сведение к ДУ 1-го порядка $G(x, y, y') = C_1$

3. *Фундаментальные системы решений для ОЛДУ с постоянными коэффициентами*

1. Корень характеристического уравнения $\tilde{k}$ действительный кратности r ($r \geqslant 1$). Тогда в ФСР войдут функции $e^{\tilde{k}x}, xe^{\tilde{k}x}$, $x^2e^{\tilde{k}x}, \ldots,$ $x^{r-1}e^{\tilde{k}x}$.

2. Среди корней характеристического уравнения имеется пара комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$, встречающаяся r раз, $r \geqslant 1$ (r-кратная пара корней). Тогда в фундаментальную систему решений войдут функции

$$\left.\begin{array}{llll} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & \ldots, & x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & \ldots, & x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}\right\} (\text{ всего } 2r \text{ функций}).$$

Количество функций в ФСР равно порядку дифференциального (и характеристического) уравнения.

4. *Подбор частного решения НЛДУ с постоянными коэффициентами по виду правой части.*

Правая часть ДУ	**Вид частного решения**
$P_l(x)$ — многочлен степени l	$x^s R_l x)$, где $\mathfrak{r}=0$ — корень характеристического уравнения кратности $s, s \geqslant 0$
$P_l(x)e^{\alpha x}$; $P_l(x)$ — многочлен степени l	$x^s R_l(x)e^{\alpha x}$, где $\mathfrak{r}=\alpha$ — корень характеристического уравнения кратности $s, s \geqslant 0$
$P\cos\beta x + Q\sin\beta x$, $P, Q-$ числовые коэффициенты	$x^s(R\,\cos\beta x + T\,\sin\beta x)$, где $\mathfrak{r}=i\beta$ — корень характеристического уравнения кратности $s, s \geqslant 0$, R, T – неопределенные коэффициенты
$P_l(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$, $P_l(x), Q_n(x)$ — многочлены степени l и n	$x^s(R_m(x)\,\cos\beta x + T_m(x)\,\sin\beta x)$, где $\mathfrak{r}=i\beta$ — корень характеристического уравнения кратности $s, s \geqslant 0$, $m=\max\{l,n\}$
$(P_l(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$; $P_l(x), Q_n(x)$ — многочлены степени l и n	$x^s(R_m(x)\,\cos\beta x + T_m(x)\,\sin\beta x)e^{\alpha x}$, где $\mathfrak{r}=\alpha+i\beta$ — корень характеристического уравнения кратности $s, s \geqslant 0$, $m=\max\{l,n\}$

$R_m(x)$, $T_m(x)$, $R_l(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами соответствующей степени.

5. *Фундаментальные системы решений для ЛДУ Эйлера*

Для уравнения $n-$го порядка ФСР состоит из n функций, причем каждому корню кратности r характеристического уравнения соответствует r функций – элементов ФСР уравнения Эйлера.

1. $k-$ действительный корень кратности r, тогда ему соответствуют r функций:

$$x^k, x^k\ln x, x^k\ln^2 x, \dots, x^k\ln^{r-1} x.$$

2. $k=\alpha\pm i\beta$ — r-кратная пара комплексно-сопряженных корней, тогда $2\,r$ соответствующих ей функций:

$$x^\alpha\cos(\beta\ln x), x^\alpha\cos(\beta\ln x)\ln x, x^\alpha\cos(\beta\ln x)\ln^2 x, \dots, x^\alpha\cos(\beta\ln x)\ln^{r-1} x,$$
$$x^\alpha\sin(\beta\ln x), x^\alpha\sin(\beta\ln x)\ln x, x^\alpha\sin(\beta\ln x)\ln^2 x, \dots, x^\alpha\sin(\beta\ln x)\ln^{r-1} x.$$

6. *Разложение простейших функций в ряд Маклорена*

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, x \in \mathbb{R};$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, x \in \mathbb{R};$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, x \in \mathbb{R};$

$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, x \in \mathbb{R};$

$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, x \in \mathbb{R};$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, x \in (-1;\, 1);$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots, x \in (-1;\, 1);$

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, x \in [-1;\, 1].$

7. *Разложение некоторых функций в тригонометрический ряд Фурье*

$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n} + \ldots\right),\ -\pi < x < \pi\ ;$

$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \ldots\right),\ -\pi < x < \pi\ ;$

$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2} + \ldots\right),\ -\pi < x < \pi\ ;$

$f(x) = \left\{ \begin{smallmatrix} -a\ , & -\pi<x<0, \\ a\ , & 0<x<\pi, \end{smallmatrix} \right.\ f(x) = \frac{4a}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \ldots\right);$

$f(x) = x(\pi - x)$ при $0 \le x \le \pi$ и нечетно продолжена на $(-\pi, 0)$, тогда

$f(x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3} + \ldots\right).$

8. *Некоторые образы преобразования Фурье*

1. $e^{-\alpha|x|} \risingdotseq \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2},\ \alpha > 0;$

2. $\left\{ \begin{array}{ll} e^{-\alpha x}; & x > 0, \\ -e^{-\alpha x}; & x < 0 \end{array} \right. \risingdotseq \frac{2i\omega}{\alpha^2+\omega^2};$

3. $e^{-\alpha x}\eta(x) \risingdotseq \frac{1}{\alpha+i\omega};$

4. $e^{-\frac{x^2}{2}} \risingdotseq \sqrt{2\pi} e^{\frac{-\omega^2}{2}};$

5. $S(\frac{x\tau}{2}) \risingdotseq \frac{2\pi}{\tau} G_\tau(\omega);$

6. $G_\tau(x) \risingdotseq \tau S(\frac{\omega\tau}{2}).$

$$G_\tau(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1; & |x| \le \frac{\tau}{2}, \\ 0; & |x| > \frac{\tau}{2}, \end{array} \right. \quad S(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sin x}{x}; & x \ne 0, \\ 1; & x = 0, \end{array} \right. \quad \eta(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1; & x \ge 0, \\ 0; & x < 0. \end{array} \right.$$

Оглавление

Предисловие **3**

Глава 1. Дифференциальные уравнения **4**
1.1. Дифференциальные уравнения первого порядка 4
1.1.1. *Уравнения с разделяющимися переменными* 6
1.1.2. *Однородные уравнения* 8
1.1.3. *Уравнения, сводящиеся к однородным* 12
1.1.4. *Линейные уравнения и уравнения Бернулли* 14
1.1.5. *Уравнения в полных дифференциалах и сводящиеся к ним* 17
1.1.6. *Задачи для самостоятельного решения* 21
1.2. Дифференциальные уравнения высших порядков 21
1.2.1. *Уравнения вида* $\frac{d^n}{dx^n}y(x) = f(x)$ 22
1.2.2. *Уравнения, не содержащие искомую функцию* 23
1.2.3. *Уравнения, не содержащие свободную переменную* x . . . 24
1.2.4. *Однородные уравнения высших порядков* 26
1.2.5. *Выделение полной производной в ДУ высших порядков* . . 27
1.2.6. *Задачи для самостоятельного решения* 28
1.3. Линейные дифференциальные уравнения 29
1.3.1. *ЛДУ с переменными коэффициентами* 30
1.3.2. *Решение НЛДУ методом вариации постоянных* 31
1.3.3. *ОЛДУ с постоянными коэффициентами* 32
1.3.4. *НЛДУ с постоянными коэффициентами* 35
1.3.5. *Уравнение Эйлера* 39
1.3.6. *Задачи для самостоятельного решения* 41

Глава 2. Ряды **43**
2.1. Числовые ряды 43
2.1.1. *Определение и вычисление суммы ряда* 43
2.1.2. *Признаки сходимости знакоположительных рядов* 46
2.1.3. *Знакопеременные и комплексные ряды* 50
2.1.4. *Приближенное вычисление сумм числовых рядов* 53
2.1.5. *Задачи для самостоятельного решения* 56
2.2. Функциональные ряды 56
2.2.1. *Область сходимости функционального ряда* 56
2.2.2. *Равномерная сходимость функционального ряда* 58
2.2.3. *Степенные ряды* 62
2.2.4. *Разложение функций в степенные ряды* 65
2.2.5. *Применение рядов Тейлора* 69
2.2.6. *Задачи для самостоятельного решения* 71
2.3. Тригонометрические ряды Фурье 72
2.3.1. *Разложение периодических функций* 72
2.3.2. *Разложение четных и нечетных периодических функций* 74
2.3.3. *Разложение непериодических функций* 76
2.3.4. *Вычисление сумм числовых рядов* 78
2.3.5. *Задачи для самостоятельного решения* 79

Глава 3. Интегралы **80**
3.1. Несобственные интегралы 80
3.1.1. *Определение несобственных интегралов* 80
3.1.2. *Главное значение несобственного интеграла* 83
3.1.3. *Вычисление несобственных интегралов* 84
3.1.4. *Признаки сходимости несобственных интегралов* 87
3.1.5. *Задачи для самостоятельного решения* 91
3.2. Интегралы, зависящие от параметра 93
3.2.1. *Определенные интегралы, зависящие от параметра* 93
3.2.2. *Несобственные интегралы, зависящие от параметра, равномерная сходимость* 96
3.2.3. *Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра* 100
3.2.4. *Вычисление интегралов* 103
3.2.5. *Задачи для самостоятельного решения* 107
3.3. Гамма-функция Эйлера 109
3.3.1. *Свойства гамма-функции* 109
3.3.2. *Задачи для самостоятельного решения* 110
3.4. Преобразование Фурье 111
3.4.1. *Интеграл Фурье и спектральные характеристики непериодической функции* 111
3.4.2. *Различные формы записи интеграла Фурье* 113
3.4.3. *Преобразование Фурье и его свойства* 115
3.4.4. *Косинус- и синус-преобразования Фурье* 119
3.4.5. *Задачи для самостоятельного решения* 122

Библиографический список **123**

Приложения **125**

Учебное издание

Голикова Елена Александровна
Зенков Андрей Вячеславович
Соболева Анастасия Сергеевна

Дифференциальные уравнения, ряды, несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра

Редактор *Н.П. Кубыщенко*
Компьютерная верстка *Е.А. Голиковой*

Подписано в печать 17.09.2010 Формат 60x84 1/16
Бумага типографская Плоская печать Усл. печ. л. 4,7
Уч.-изд. л. 4,7 Тираж 200 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
Отпечатано в отделении полиграфии ИВТОБ
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, ауд. И-120
тел. (343)-375-41-43