А.В. Зенков

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ и ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет–УПИ»

А.В. Зенков

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Учебник
для студентов физических специальностей

Екатеринбург
2010

УДК 512 (075.8)
ББК 22.37
З30

Рецензенты:
кафедра математики Уральского государственного горного университета
(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. В.Б. Сурнев);
д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. Института математики и механики УрО РАН
В.С. Балаганский

Зенков А.В.

З30 **Дифференциальные уравнения, несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра**: Учебник для студентов физических специальностей / А.В. Зенков. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2010. 92 с.; ил.

ISBN 5-321-00361-2

Учебник подготовлен на основе расширенного текста лекций по дисциплине "Ряды и ряды Фурье, дифференциальные уравнения, несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра", читавшихся автором в течение длительного времени студентам физических специальностей физико-технического факультета УГТУ-УПИ в весеннем семестре I курса.

Настоящее издание включает только дифференциальные уравнения, несобственные интегралы и интегралы с параметром, а остальные заявленные темы составляют предмет одновременно публикуемой отдельной книги.

Учебник снабжён подборкой задач с ответами для самостоятельной работы студентов.

В конце приведён список изданий, повлиявших на содержание данного учебника и/или рекомендуемых автором для желающих изучить предмет более углублённо.

В оформлении обложки использованы картина Яна Вермеера (1669) и эскиз Н.К. Рёриха (1913).

Библиогр.: 29 назв. Рис.6.

УДК 512 (075.8)
ББК 22.37

ISBN 5-321-00361-2

Глава I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Основные определения

Дифференциальное уравнение (ДУ) — это уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и её производные или дифференциалы. Если искомая функция зависит только от одного аргумента, по которому и взяты все производные, то ДУ называется *обыкновенным* дифференциальным уравнением:

$$F\left(x,\, y(x),\, y'(x),\, y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0. \tag{1}$$

Здесь x — независимая переменная, $y(x)$ — искомая функция, $F(\ldots)$ — заданная функция.

Порядок n старшей производной, входящей в ДУ (1), называется *порядком* ДУ.

Если искомая функция зависит от нескольких аргументов, и в уравнение входят её частные производные, то ДУ называется уравнением в частных производных. Такие ДУ мы рассматривать не будем, оставляя их изучение до курса *Методов математической физики* (IV семестр).

Пример. Уравнение Ван-дер-Поля [1] $y'' + \alpha(y^2 - 1)y' + \beta y = 0$, описывающее электрические автоколебания в электронной лампе, есть обыкновенное ДУ 2-го порядка.

[1] Балтазар Ван-дер-Поль (B. van der Pol, 1889-1959), нидерландский инженер, изучавший электрические колебания в 1920-30 гг.

Пример. Уравнение Кортевега-Де Фриса (КдФ) [2] $u'_t + 6u\,u'_x + u'''_{xxx} = 0$ для искомой функции $u = u(x,\, t)$ координаты и времени, описывающей одномерные уединённые нелинейные волны (*солитоны*), является примером ДУ в частных производных.

Решение уравнения (1) есть функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество

$$F\left(x,\, \varphi(x),\, \varphi'(x),\, \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) \equiv 0.$$

График решения ДУ — интегральная кривая. Интегральная кривая с ориентацией согласно изменению аргумента — *траектория*.

Если функция $F(\ldots)$ в уравнении (1) линейна по $y,\, y',\, y'', \ldots, y^{(n)}$, то это уравнение называется *линейным* дифференциальным уравнением (ЛДУ), в противном случае — нелинейным. Оба уравнения в приведённых выше примерах — нелинейные [3].

Иногда ДУ (1) можно привести к виду

$$y^{(n)} = f\left(x,\, y,\, y',\, y'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{2}$$

разрешённому относительно старшей производной.

Любое обыкновенное ДУ всегда имеет бесконечно много решений.

Пример. Пусть $f(x)$ — непрерывная на интервале $I = (a,\, b)$ функция, $y(x)$ — её первообразная. Тогда $y'(x) = f(x)$, и для отыскания первообразной мы получили обыкновенное ДУ первого порядка. Решения его известны:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t + C \qquad (x_0 \in I),$$

где C — произвольная постоянная. Итак, в решение ДУ первого порядка входит одна константа.

---

[2] Густав Де Фрис (G. de Vries, 1866-1934) был учеником нидерландского математика Дидерика Йоханнеса Кортевега (D.J. Korteweg, 1848-1941) под руководством которого в 1894 г. защитил в университете Амстердама докторскую диссертацию об уравнении, носящем ныне их имена. Исследование оставалось незамеченным вплоть до 1964 г., когда численное решение уравнения КдФ обнаружило частицеподобное поведение его решения.

[3] Вообще, реальные процессы в природе описываются линейными ДУ как правило лишь при достаточно грубых идеализациях.

Аналогично, решение ДУ n-го порядка содержит n произвольных констант: $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Для выделения единственного решения из бесконечного множества требуются дополнительные условия, позволяющие найти конкретные числовые значения констант C_i, $i = \overline{1, n}$. Обычно формулируется *задача Коши* или *краевая* задача (С.53).

Задача Коши для ДУ (2) состоит в нахождении для данного уравнения такого решения, которое удовлетворило бы следующим *начальным условиям* (НУ):

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_{1\,0}, \\ y''(x_0) = y_{2\,0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1\;0}. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь x_0 — заданное фиксированное значение аргумента, y_0, $y_{1\,0}, \ldots, y_{n-1\;0}$ — заданные n чисел.

Задача Коши может не иметь решения, а если имеет — возможно, неединственное. Теорема существования и единственности решения, гарантирующая «благоприятную» ситуацию, для ДУ (2) нами не изучается (см., например, [**1**]). В частных случаях ДУ первого порядка (С.6) и линейных уравнений (С.27) мы эту теорему рассмотрим.

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $x \in (a, b)$, называется *общим решением* ДУ (2) на (a, b), если

1) для каждого набора констант $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ является решением ДУ, т.е.

$$\varphi^{(n)} \equiv f\left(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n-1)}\right);$$

2) при любых начальных условиях (3), $x_0 \in (a, b)$, существует единственный набор значений $\{C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\}$, при котором функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0)$ является решением уравнения (2), удовлетворяющим НУ (3).

Всякое решение ДУ, получающееся из его общего решения при конкретных числовых значениях констант $C_i = C_i^0$, $i = \overline{1,n}$, называется *частным* решением ДУ.

Не всегда удаётся выразить искомое решение в явном виде $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Конечное [4] уравнение $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, определяющее решение $y(x)$ дифференциального уравнения как неявную функцию, называется *общим интегралом* ДУ. При конкретных числовых значениях констант $C_i = C_i^{\circ}$, $i = \overline{1,n}$, из общего интеграла получается *частный* интеграл ДУ.

Если задачу об отыскании всех решений ДУ удаётся свести к вычислению конечного числа интегралов [5] и производных от известных функций и к алгебраическим операциям, то говорят, что ДУ *интегрируется в квадратурах*. К сожалению, класс таких уравнений крайне узок.

2. Уравнения первого порядка: теорема существования и единственности решения

ДУ первого порядка $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$, разрешённое относительно производной искомой функции, будем называть уравнением *в нормальной форме*. Задача Коши для него имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{4}$$

На геометрическом языке задача Коши заключается в поиске той интегральной кривой дифференциального уравнения, которая проходит через начальную точку (x_0, y_0).

Теорема существования и единственности решения задачи Коши (4).

Пусть функция $f(x, y)$ и её производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области $\mathcal{D}$ плоскости xOy; начальная точка $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

Тогда:

1) Существование. В некоторой δ-окрестности $|x - x_0| < \delta$ точки x_0 существует решение задачи Коши;

2) Единственность. Если $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ — два решения задачи Коши, то $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

Без доказательства.

---

[4] Т.е. не дифференциальное.

[5] Даже если эти интегралы не выражаются через элементарные функции, ДУ считается решённым, поскольку задача сведена к более элементарной.

Геометрическая интерпретация. *При выполнении условий теоремы (непрерывность $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в области $\mathcal{D}$) через каждую точку (x_0, y_0) этой области проходит интегральная кривая и притом только одна.*

Примечания.

1) Если функция $f(x, y)$ непрерывна, а её производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ — нет, то решение задачи Коши (4) по-прежнему существует в каждой точке области $\mathcal{D}$, однако оно не обязательно единственно. *Единственность решения гарантируется непрерывностью* $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2) Если и $f(x, y)$ разрывна, то возможны любые ситуации: решение может не существовать; существовать, но быть неединственным; существовать и быть единственным.

3) Теорема имеет локальный характер: она гарантирует существование единственного решения лишь в достаточно малой окрестности точки x_0.

4) Теорема указывает лишь достаточные (но не необходимые) условия существования единственного решения ДУ $y' = f(x, y)$. А именно: может существовать единственное решение задачи Коши $\begin{cases} y' &= f(x,y), \\ y(x_0) &= y_0, \end{cases}$ даже если в точке (x_0, y_0) не выполняется одно из условий 1, 2 или оба вместе!

Пример. Проиллюстрируем третье утверждение на примере уравнения первого порядка $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3y^{2/3}$.

Правая часть $f(x, y) = 3y^{2/3}$ непрерывна на всей плоскости xOy, но её производная $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{y^{1/3}} \to \infty$ при $y \to 0$, поэтому второе условие теоремы нарушается во всех точках оси Ox.

Легко видеть, что функция $y_1(x) = (x + C)^3$, где C — произвольная константа, есть решение данного ДУ. Но и функция $y_2(x) \equiv 0$ — тоже его решение, причём не получающееся из первого ни при каком значении C. Через каждую точку оси Ox проходят две интегральные кривые — прямая $y = 0$ (сама ось Ox) и кубическая парабола (рис. I.1). Нарушается единственность решения!

Рассмотрим теперь точку $M(1, 1)$. В достаточно малой её окрестности (какой?) выполнены все условия теоремы существования и единственности,

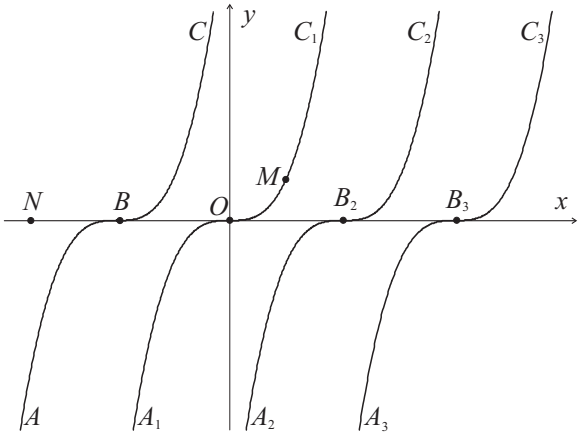


Рис. I.1. Нарушение единственности решения уравнения $y' = 3y^{2/3}$

поэтому через каждую точку этой окрестности проходит единственная интегральная кривая. В большей окрестности, захватывающей точки на оси Ox, единственности решения уже не будет.

Пример. Иллюстрация четвёртого утверждения: для уравнения $y' = \frac{1}{y^2}$ во всех точках оси Ox разрывны и $f(x, y) = \frac{1}{y^2}$, и $\frac{\partial f}{\partial y}$; тем не менее через каждую точку $(x_0, 0)$ этой оси проходит единственная интегральная кривая $y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$.

3. Метод изоклин для уравнений первого порядка

Поскольку решение ДУ далеко не всегда можно найти точными аналитическими методами, важное значение имеют приближённые, численные процедуры нахождения решений.

Для приближённого построения интегральных кривых используется, в частности, метод изоклин. Изоклина [6] — геометрическое место точек, в которых наклон касательных к интегральным кривым один и тот же: $y' = k = \text{const}$. Поэтому для ДУ $y' = f(x, y)$ уравнение изоклины имеет вид $f(x, y) = k$, где k — постоянная. Начертив несколько изоклин, надо провести плавные кривые, которые в точках пересечения с изоклинами $f(x, y) = k_1$, $f(x, y) = k_2, \ldots$ имеют касательные с угловыми коэффициентами k_1, $k_2, \ldots$ Эти кривые и будут искомыми интегральными кривыми.

Пример. Построить интегральные кривые уравнения

$$y' = y^2 - x. \tag{5}$$

[6] *ἰσοκλίνής* (греч.) *имеющий равный наклон.*

Р е ш е н и е. Изоклины удовлетворяют уравнению $y^2 - x = k$ и являются параболами, ось симметрии которых — ось Ox. Взяв значения $k = -1,\ 0,\ 1,\ 2$, построим изоклины и на каждой изоклине $y^2 - x = k$ проведём штрихи с наклоном $\alpha = \operatorname{arc\,tg} k$ (см. рис. I.2). Затем начертим гладкие кривые так, чтобы в точке пересечения кривой с изоклиной касательная к кривой и штрихи на изоклине были параллельны. Полученные кривые приближённо представляют интегральные кривые дифференциального уравнения. Из (5) следует, что интегральные кривые, проходящие достаточно далеко от начала координат, пересекают ось Ox практически под прямым углом: $\alpha \approx 90°$. Действительно, если $|x| \gg 1$ или $|y| \gg 1$, то $y' \to \infty$ $(\operatorname{tg}\alpha \to \infty)$ и $\alpha \to \frac{\pi}{2}$.

З а м е ч а н и е. Нулевая изоклина $f(x,\ y) = 0$ даёт уравнение линий, на которых могут располагаться точки экстремума интегральных кривых (ср. с рис. I.2).

4. Виды уравнений первого порядка, интегрируемых в квадратурах

Универсального метода аналитического решения ДУ первого порядка (как и уравнений высших порядков) не существует. Ниже перечислены основные типы уравнений, допускающих интегрирование в квадратурах, но, вообще говоря, отнесение каждого конкретного ДУ, которое может встретиться в практике инженера или исследователя, к одному из этих типов есть редкая удача.

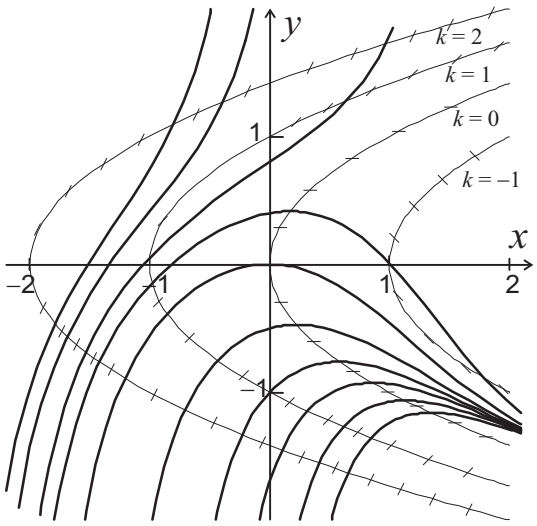


Рис. I.2. Построение интегральных кривых ДУ $y' = y^2 - x$ с помощью изоклин

Уравнения с разделяющимися переменными

Они могут быть записаны в виде

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\,g(y) \quad \text{или} \tag{6}$$

$$P(x)\,Q(y)\,\mathrm{d}x + R(x)\,S(y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{7}$$

Предполагаем, что функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны. Если $g(y) = 0$ при $y = y_1$, $y = y_2, \ldots$, то функции $y(x) \equiv y_1$, $y(x) \equiv y_2, \ldots$ являются, как легко видеть, решениями ДУ (6).

В окрестности каждой точки, где $g(y) \neq 0$, разделим обе части уравнения (6) на $g(y)$ и умножим на $\mathrm{d}x$. Тем самым переменные в уравнении разделились (откуда и название этого типа уравнений), и осталось только проинтегрировать по x обе части полученного уравнения:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C, \tag{8}$$

где C — произвольная константа.

Аналогично разделяются переменные в уравнении (7).

Пример. Решить уравнение $y' = 3y^{2/3}$.

Правая часть равна нулю при $y = 0$, поэтому $y(x) \equiv 0$ — решение ДУ. Чтобы найти другие решения, разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{3y^{2/3}} = \int \mathrm{d}x + C \;\Rightarrow\; y^{1/3} = x + C \quad \text{или} \quad y = (x + C)^3. \tag{9}$$

Как уже отмечалось выше (С.7), через каждую точку $(x_0, 0)$ оси Ox проходят два решения: $y(x) \equiv 0$ (*особое* решение, см. С. 22) и $y = (x - x_0)^3$ — частное решение, полученное из общего (9). Имеются также «склеенные» решения, составленные из двух или трёх кусков таких решений, например, ABx, NB_3C_3, ABB_2C_2 и т.п. (см. рис. I.1, С. 8). Такие составные функции являются решениями, т.к. они всюду имеют производную (в точке стыка правая производная равна левой) и всюду удовлетворяют данному уравнению.

ДУ, сводимые к уравнениям с разделяющимися переменными

Уравнения $y' = f(ax + by + c)$, где a, b, c — константы, приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z(x) = ax + by + c$.

Тогда $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, и приходим к уравнению $z' = a + bf(z)$, в котором переменные разделяются: $\int \frac{\mathrm{d}z}{a+bf(z)} = \int \mathrm{d}x + C$.

Пример. Решить уравнение $y' = (x+y)^2$.

Делаем замену $z(x) = x + y$. Тогда $z' = 1 + y'$, и получаем уравнение $z' = z^2 + 1$, допускающее разделение переменных: $\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \int \mathrm{d}x + C$, откуда $\operatorname{arc\,tg} z = x + C$ или $z = \operatorname{tg}(x + C)$. Возвращаясь к старым переменным, получаем общее решение: $y = \operatorname{tg}(x + C) - x$.

Однородные дифференциальные уравнения

Однородным называется ДУ, которое можно записать в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{или} \tag{10}$$

$$M(x,\, y)\mathrm{d}x + N(x,\, y)\mathrm{d}y = 0, \tag{11}$$

где $M(x,\, y)$ и $N(x,\, y)$ — *однородные* функции одной и той же степени.

Функция $M(x,\, y)$ называется однородной функцией степени k, если для любых x, y и для любого $t > 0$

$$M(tx,\, ty) \equiv t^k M(x,\, y).$$

Для решения однородного ДУ делается замена $\frac{y}{x} = z(x)$, откуда $y = xz$ и $y' = z + xz'$. Уравнение (10) принимает вид $z + xz' = f(z)$ и допускает разделение переменных: $\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Пример. Решить уравнение $xy\,\mathrm{d}x = (x^2 + y^2)\mathrm{d}y$.

Функции $M(x,\, y) = xy$ и $N(x,\, y) = x^2 + y^2$ обе являются однородными функциями второй степени, т.к. $M(tx,\, ty) = tx\,ty = t^2xy = t^2M(x,\, y)$, $N(tx,\, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2N(x,\, y)$.

Преобразуем уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Обозначим $\frac{y}{x} = z(x)$, тогда $y' = z + xz'$. Уравнение примет вид

$$z + xz' = \frac{z}{1 + z^2} \;\Rightarrow\; xz' = -\frac{z^3}{1 + z^2}.$$

Разделим переменные:

$$\int \frac{1+z^2}{z^3}\,\mathrm{d}z = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{\mathrm{d}z}{z^3} + \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\ln|x| - \ln C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -\frac{1}{2z^2} + \ln|z| = -\ln|Cx| \;\Rightarrow\; \ln|Cxz| = \frac{1}{2z^2}\,.$$

Возвращаясь к первоначальной функции $y = xz$, имеем: $\ln|Cy| = \frac{x^2}{2y^2}$. Получен общий интеграл для исходного ДУ, т.к. искомая функция $y(x)$ не выражена (и не может быть выражена!) в явном виде.

Заметим, что произвольную константу оказалось выгодно записать не в виде C, а в виде $\ln C$; это упрощает ответ.

Уравнения, сводимые к однородным

Уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\,,$$

где a_i, b_i, c_i — константы, при $c_1 = c_2 = 0$ является однородным. Пусть теперь хотя бы одно из чисел c_i отлично от нуля. Возможны два случая:

а) $\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Введём новые переменные ξ, η по формулам $x = \xi + h$, $y = \eta + k$, где h, k — пока неизвестные константы; тогда $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\xi$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}\eta$. Исходное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1h + b_1k + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2h + b_2k + c_2}\,.$$

Выберем h и k как решение [7] системы $\begin{cases} a_1h+b_1k+c_1 = 0, \\ a_2h+b_2k+c_2 = 0. \end{cases}$ Тогда относительно введённых переменных ξ, η уравнение станет однородным:

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\,.$$

Произведя в его общем решении обратную замену $\xi = x - h$, $\eta = y - k$, найдём общее решение исходного ДУ.

б) $\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$. В этом случае строки определителя пропорциональны: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$, и исходное ДУ принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{(a_1x + b_1y)/\lambda + c_2} = f(a_1x + b_1y);$$

[7] Оно заведомо существует, т.к., по условию, определитель из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля.

замена $z = a_1 x + b_1 y$ $\left(\text{откуда } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b_1}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - a_1\right)\right)$ приводит его к уравнению с разделяющимися переменными $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a_1 + b_1 f(z)$.

Аналогично интегрируется уравнение $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$.

Пример. Решить уравнение $(x + y - 2)\,\mathrm{d}x + (x - y + 4)\,\mathrm{d}y = 0$.

Приведём уравнение к нормальной форме: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x-y+2}{x-y+4}$. Определитель системы $\begin{cases} -h - k + 2 = 0, \\ h - k + 4 = 0 \end{cases}$ отличен от нуля; система имеет единственное решение $h = -1$, $k = 3$. При замене переменных $x = \xi - 1$, $y = \eta + 3$ получаем однородное ДУ

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\eta + \xi}{\eta - \xi} = \frac{\eta/\xi + 1}{\eta/\xi - 1},$$

далее решение обычно: обозначаем $\frac{\eta}{\xi} = u$;

$$\eta = \xi u, \qquad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = u + \xi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \frac{u+1}{u-1}, \qquad \xi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = \frac{u+1}{u-1} - u = \frac{1 + 2u - u^2}{u-1}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \frac{u-1}{1 + 2u - u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

После интегрирования:

$$\ln|\xi| + \tfrac{1}{2}\ln|1 + 2u - u^2| = \ln\tilde{C}; \qquad \xi^2\left(1 + 2u - u^2\right) = \tilde{C}^2 = C_1.$$

Возвращаемся к исходным переменным:

$$(x+1)^2\left[1 + 2\,\tfrac{y-3}{x+1} - \left(\tfrac{y-3}{x+1}\right)^2\right] = C_1 \quad \text{или} \quad x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C.$$

Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли

Линейным называется уравнение, в которое искомая функция y и её производная y' входят линейно, т.е. в первой степени, и не перемножаются между собой. Его общий вид:

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{12}$$

Если $Q(x) \not\equiv 0$, то уравнение называется линейным *неоднородным*, а если $Q(x) \equiv 0$ — линейным *однородным* [8].

[8] Здесь однородность понимается в несколько ином смысле, нежели на С. 11.

Уравнение Бернулли [9] имеет вид:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1). \tag{13}$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ это уравнение линейно.

Уравнения обоих типов решаются аналогичными методами, что и объясняет их совместное рассмотрение.

Метод Бернулли

Решение ищут с помощью подстановки $y = uv$, где u и v — две пока неизвестные функции. Рассмотрим метод применительно к линейному ДУ. Подстановка преобразует его к виду $u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$, в котором надо собрать вместе слагаемые, содержащие u или v. Вынесем за скобку u:

$$u\big[v' + P(x)v\big] + u'v = Q(x). \tag{14}$$

Пользуясь тем, что функция v пока произвольна (лишь произведение uv должно удовлетворять исходному ДУ!), выберем её так, чтобы выражение в квадратных скобках (14) обратилось в нуль; фактически надо найти частное [10] решение уравнения $v' + P(x)v = 0$ с разделяющимися переменными. Как только v найдена, возвращаемся к ДУ (14), которое благодаря исчезновению [...] уже упростилось: $u'v = Q(x)$. Для этого уравнения (тоже с разделяющимися переменными) надо найти общее решение. Наконец, собираем решение исходного уравнения: $y = uv$.

Пример. Решить методом Бернулли уравнение $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Это уравнение Бернулли. Делаем подстановку $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Уравнение принимает вид $x(u'v + uv') - 4uv = x^2\sqrt{uv}$. Вынесем за скобку v:

$$v\underbrace{(xu' - 4u)}_{\text{обратим в нуль}} + xuv' = x^2\sqrt{uv}.$$

Решим вспомогательное уравнение $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 4u = 0$: разделим переменные $\int\frac{\mathrm{d}u}{u} = 4\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$ и найдём частное решение: $u = x^4$.

---

[9] Якоб Бернулли (J. Bernoulli, 1654-1705), швейцарский математик, рассмотрел «уравнение Бернулли» в 1695 г.; метод решения предложен в 1697 г. его братом Йоханном (1667-1748).

[10] Общее решение ДУ первого порядка (12), (13) должно содержать только одну произвольную константу; она появится на этапе решения уравнения для функции u (см. ниже).

Найденное выражение для u подставим в исходное ДУ, которое с учётом исчезновения части слагаемых примет вид: $x^5v' = x^2\sqrt{x^4v}$ или $xv' = \sqrt{v}$. Разделим переменные: $\int\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v}} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}$. Общее решение данного уравнения есть $2\sqrt{v} = \ln|x| + \ln C$ или $v = \frac{1}{4}\ln^2(Cx)$.

Тогда для исходного уравнения общее решение $y = uv = \frac{x^4}{4}\ln^2(Cx)$.

Метод Лагранжа [11] (метод вариации произвольной постоянной)

Этот метод для ДУ первого порядка приводит, по существу, к тем же расчётам, что и метод Бернулли, но обладает, по сравнению с последним, гораздо большей общностью (в частности, он используется для неоднородных линейных ДУ высших порядков (С. 43), где метод Бернулли неприменим).

На первом этапе следует отбросить неоднородность $Q(x)$ в уравнении (12) (нелинейное слагаемое $Q(x)y^\alpha$ в уравнении (13)) и решить однородное уравнение $y' + P(x)y = 0$ с разделяющимися переменными. Преобразуем его к виду $\int\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int P(x)\mathrm{d}x$. Общее решение:

$$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{15}$$

Здесь C — произвольная постоянная.

В процессе разделения переменных было потеряно частное решение $y(x) \equiv 0$, но при $C = 0$ оно содержится в общем решении.

На втором этапе отыскивается общее решение исходного неоднородного уравнения (12) $\big($соответственно, (13)$\big)$. Множитель C в формуле (15), который ранее был постоянным, мы, следуя Лагранжу, проварьируем, так что он отныне станет функцией $C = C(x)$, подлежащей определению. Итак, будем искать общее решение неоднородного ДУ в виде

$$y = C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}; \tag{16}$$

тогда $y' = C'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\big(-P(x)\big)$. Дальнейшие вычисления продемонстрируем на примере линейного ДУ (12). Подставляя y и y' в (12), получим:

$$C'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + \boldsymbol{C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\big(-P(x)\big) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}} = Q(x).$$

[11] Жозеф Луи Лагранж (J.L. Lagrange, 1736-1813), франц. математик, получивший важные результаты в разных областях математики; один из создателей вариационного исчисления и аналитической механики. Ввёл обозначение $f'(x)$ для производной функции $f(x)$.

Выделенные жирным слагаемые взаимно уничтожаются, и для нахождения $C(x)$ получается уравнение

$$C'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x),$$

решение которого есть

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C,$$

где C — «истинная» произвольная постоянная. Подставляя найденную функцию $C(x)$ в (16), получаем искомое решение неоднородного линейного ДУ (12)

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

Первое слагаемое, содержащее произвольную постоянную, уже появлялось ранее на этапе нахождения общего решения однородного уравнения. Второе слагаемое не содержит произвольной постоянной, следовательно, это ч а с т н о е решение. Но для какого уравнения? Подставляя второе слагаемое в исходное неоднородное ДУ (12), легко убедиться в том, что эта функция удовлетворяет данному уравнению.

Итак, получен важный и весьма общий вывод [12]: *общее решение неоднородного линейного уравнения есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.*

П р и м е р. Решить линейное уравнение $xy' + y = e^x$ методом вариации произвольной постоянной.

I э т а п. Отбрасываем неоднородность (т.е. слагаемое, не содержащее искомую функцию y или y'): $xy' + y = 0$. Разделяем переменные: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ и находим общее решение однородного уравнения

$$y = \frac{C}{x}, \quad C = \mathrm{const}.$$

II э т а п. Варьируем постоянную: $C = C(x)$; общее решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = \frac{C(x)}{x}$. Тогда $y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$. Подставляя

[12] С его обобщениями мы ещё встретимся ниже в этом курсе (С. 42, 45), а также в курсах систем дифференциальных уравнений и уравнений математической физики.

y и y' в исходное неоднородное ДУ, имеем:

$$x\left(\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}\right)+\frac{C(x)}{x}=e^x,$$

откуда, после сокращения, получаем:

$$C'(x)=e^x.$$

Решение этого уравнения есть $C(x)=e^x+C$, где C — константа.

Общее решение исходного уравнения $y=\frac{C(x)}{x}=\frac{e^x+C}{x}=\frac{C}{x}+\frac{e^x}{x}$, причём первое слагаемое есть общее решение соответствующего однородного уравнения, а второе — частное решение неоднородного.

Уравнения в полных дифференциалах

К ним относятся ДУ, записываемые в виде

$$M(x,\,y)\,\mathrm{d}x+N(x,\,y)\,\mathrm{d}y=0, \tag{17}$$

причём левая часть является полным дифференциалом $\mathrm{d}F$ от некоторой функции $F(x,\,y)$.

Если нам эта функция известна, то уравнение (17) решается мгновенно: $\mathrm{d}F(x,\,y)=0 \quad\Rightarrow\quad F(x,\,y)=C$, где $C=\mathrm{const}$.

Но любое ли дифференциальное выражение вида $M(x,\,y)\mathrm{d}x+N(x,\,y)\mathrm{d}y$ является полным дифференциалом? Получим соответствующий признак. Полный дифференциал записывается в виде $\mathrm{d}F(x,\,y)=\frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y$. Сравнивая два выражения, мы видим, что должны выполняться условия $\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,\,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,\,y)$. Продифференцируем первое равенство по y, а второе по x:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial M(x,y)}{\partial y},\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Частные производные совпадают, поэтому

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{18}$$

Это равенство является н е о б х о д и м ы м условием, а в случае, когда $M(x,\,y)$ и $N(x,\,y)$ рассматриваются в односвязной области (т.е. в области без «дыр») — и д о с т а т о ч н ы м условием того, что левая часть (17) есть полный дифференциал.

Пусть соотношение (18) выполнено. Как найти функцию $F(x,\,y)$? В курсе математического анализа (нахождение потенциала векторного поля) аналогичная задача решается с помощью криволинейного интеграла. Применим здесь другой способ.

Поскольку $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,\,y)$, следовательно,

$$F(x,\,y) = \int M(x,\,y)\mathrm{d}x + \varphi(y). \tag{19}$$

Поясним, что при вычислении интеграла $\int M(x,\,y)\mathrm{d}x$ величина y рассматривается как постоянная, поэтому к интегралу прибавляется не константа, а произвольная функция $\varphi(y)$. Легко видеть, что функция (19) при любой функции $\varphi(y)$ удовлетворяет условию $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,\,y)$. Чтобы найти функцию $\varphi(y)$, подставим выражение (19) в уравнение $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,\,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,\,y)\mathrm{d}x\right) + \varphi'(y) = N(x,\,y).$$

Из этого уравнения определяем $\varphi'(y)$ и, интегрируя, находим $\varphi(y)$.

Как отмечено выше, если функция $F(x,\,y)$ известна, то решение ДУ в полных дифференциалах (17) имеет вид $F(x,\,y) = C,\;\; C = \mathrm{const}$.

П р и м е р. Решить уравнение $(x + y + 1)\,\mathrm{d}x + (x - y^2 + 3)\,\mathrm{d}y = 0$.

Поскольку

$$\tfrac{\partial}{\partial y}\,(x + y + 1) = \tfrac{\partial}{\partial x}\,(x - y^2 + 3),$$

левая часть ДУ есть полный дифференциал некоторой функции $F(x,\,y)$. Тогда $\frac{\partial F}{\partial x} = x + y + 1$; интегрируем по x: $\quad F(x,\,y) = \frac{x^2}{2} + xy + x + \varphi(y)$. Эту функцию дифференцируем по y:

$$\tfrac{\partial F}{\partial y} = x + \varphi'(y) \quad \text{и приравниваем к } N(x,\,y): \quad x + \varphi'(y) = x - y^2 + 3.$$

Тогда $\varphi'(y) = -y^2 + 3$, откуда $\varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + C_1$. Итак,

$$F(x,\,y) = \tfrac{x^2}{2} + xy + x - \tfrac{y^3}{3} + 3y + C_1 = C_2.$$

Окончательно, общий интеграл имеет вид

$$\tfrac{x^2}{2} + xy + x - \tfrac{y^3}{3} + 3y = C, \quad \text{где } C = C_2 - C_1.$$

Интегрирующий множитель

Начнём с задачи. Для ДУ $y\mathrm{d}x - 2x\mathrm{d}y = 0$ функции $M(x,\, y) = y$ и $N(x,\, y) = -2x$, очевидно, не удовлетворяют условию (18), поэтому данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Но если почленно умножить уравнение на функцию $\mu(y) = \frac{1}{y^3}$, то получающееся при этом уравнение $\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}y = 0$ будет уравнением в полных дифференциалах (проверьте!). Уравнение сворачивается к виду $\mathrm{d}f(x,\, y) = 0$, где $f(x,\, y) = \frac{x}{y^2}$, так что общий интеграл записывается как $\frac{x}{y^2} = C$.

Интегрирующим множителем $\mu = \mu(x,\, y)$ называется функция, почленное умножение которой на дифференциальное выражение $P(x,\, y)\,\mathrm{d}x + Q(x,\, y)\,\mathrm{d}y$ превращает последнее в полный дифференциал $\mathrm{d}f(x,\, y)$.

Поскольку условие (18) существования полного дифференциала записывается через равенство частных производных, для нахождения интегрирующего множителя в общем случае требуется решить ДУ в частных производных, что представляет собой более сложную задачу, чем решение исходного обыкновенного ДУ.

5. Методы решения уравнений вида $F(x,\ y,\ y') = 0$, не разрешённых относительно производной

а) Если удаётся разрешить ДУ относительно y', т.е. выразить y' через x и y, то получаются одно или несколько уравнений в нормальной форме $y' = f(x,\ y)$, каждое из которых надо решить.

Пример. Проинтегрировать уравнение $y'^{\,2} = 4y$.

Разрешим уравнение относительно производной: $y' = \pm 2\sqrt{y}$. Интегрируем полученные уравнения: $\pm\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} = \mathrm{d}x$; $\pm\sqrt{y} = x + C$; $y = (x + C)^2$. Кроме того, при делении на $\sqrt{y}$ потеряно решение $y = 0$.

б) Метод введения параметра. Пусть уравнение $F(x,\ y,\ y') = 0$ можно разрешить относительно y, т.е. записать в виде $y = f(x,\ y')$. Вводя параметр $p = y'$, получим:

$$y = f(x,\ p), \tag{20}$$

откуда $\mathrm{d}y = f'_x \mathrm{d}x + f'_p \mathrm{d}p$. Но, согласно нашему обозначению, $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$, и, в итоге, имеем уравнение $p\,\mathrm{d}x = f'_x \mathrm{d}x + f'_p \mathrm{d}p$, легко разрешаемое относительно $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}$. Если его решение $x = \varphi(p)$ найдено, то, с учётом (20), получим решение исходного ДУ в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y = f\big(\varphi(p),\ p\big). \end{cases} \tag{21}$$

Аналогично решаются уравнения вида

$$x = f(y,\ y'). \tag{22}$$

П р и м е р. Решить уравнение

$$y = y'^{\,2} - xy' + \tfrac{x^2}{2}\,. \tag{23}$$

Уравнение допускает параметрическое представление

$$y' = p\,; \qquad y = p^2 - xp + \tfrac{x^2}{2}\,. \tag{24}$$

Возьмём полный дифференциал от обеих частей последнего равенства, заменяя y' на p:

$$p\,\mathrm{d}x = 2p\,\mathrm{d}p - x\mathrm{d}p - p\,\mathrm{d}x + x\mathrm{d}x = (-p + x)\mathrm{d}x + (2p - x)\mathrm{d}p$$

или $(2p - x)(-\mathrm{d}x + \mathrm{d}p) = 0$. Это уравнение распадается на два:

$$-\mathrm{d}x + \mathrm{d}p = 0; \qquad 2p - x = 0. \tag{25}$$

Первое из них даёт $p = x + C$. Подставляя это значение p в (24), имеем:

$$y = (x + C)^2 - x(x + C) + \tfrac{x^2}{2} = \tfrac{x^2}{2} + Cx + C^2. \tag{26}$$

Это *общее* решение исходного ДУ. Из второго уравнения (25) находим $p = \frac{x}{2}$. Подстановка этого значения в (24) даёт $y = \frac{x^2}{4}$. Это *особое* решение (см. С. 22) исходного ДУ.

Сделаем два замечания по поводу данного примера.

Во-первых, решив ДУ (23) как квадратное относительно y', можно было бы представить его в нормальной форме $y' = \frac{1}{2}\big(x \pm \sqrt{4y - x^2}\big)$. Однако это не только не даёт никаких преимуществ при интегрировании ДУ, но даже усложняет его. Кроме того, разрешение уравнения относительно y' зачастую п р и н ц и п и а л ь н о невозможно.

Во-вторых, отметим, что получение явной зависимости $y = y(x)$ вида (26) является скорее исключением, чем правилом, и (21) — это обычно максимум того, чего удаётся достичь.

Пример. Проинтегрировать уравнение

$$e^{y'} + y' = x. \tag{27}$$

Это уравнение вида (22). По-прежнему делаем замену $y' = p$; тогда $x = e^p + p$. В итоге получаем параметрическое представление уравнения (27): $\begin{cases} x=e^p+p, \\ y'=p \end{cases}$. Отсюда

$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}x = p\,(e^p+1)\mathrm{d}p;$$

$y = \int p\,(e^p+1)\mathrm{d}p + C = e^p(p-1) + \frac{p^2}{2} + C$. Получено общее решение в параметрическом виде (21):

$$\begin{cases} x &= e^p + p\,, \\ y &= e^p(p-1) + \frac{p^2}{2} + C. \end{cases}$$

Заметим, что подстановка $y' = p$ не всегда оптимальна; надлежащим образом выбранная замена $y' = \varphi(p)$ может существенно упростить вычисление интегралов.

Пример. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^{\,2}}} = 2\,. \tag{28}$$

Введём параметр, положив $y' = \operatorname{sh} p$, тогда

$$y = 2\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 p} = 2\operatorname{ch} p. \tag{29}$$

Учитывая, что $\mathrm{d}y = \operatorname{sh} p\,\mathrm{d}x$, а с другой стороны, из (29), $\mathrm{d}y = 2\operatorname{sh} p\,\mathrm{d}p$, получаем: $\operatorname{sh} p\,\mathrm{d}x = 2\operatorname{sh} p\,\mathrm{d}p$, откуда $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}p$ при условии $\operatorname{sh} p \neq 0$. Поэтому $p = \frac{x+C}{2}$ и, согласно (29), $y = 2\operatorname{ch}\frac{x+C}{2}$. Это *общее* решение ДУ (28). Условие $\operatorname{sh} p = 0 \;\Leftrightarrow\; y' = 0$ даёт *особое* решение (см. С.22) $y = 2$.

в) Уравнение вида $F(x,\ y,\ y') = 0$ можно свести к ДУ, разрешённому относительно производной, продифференцировав по x исходное уравнение. Получаемое при этом ДУ $F'_x + F'_y\,y' + F'_{y'}\,y'' = 0$ разрешимо

относительно y''. Недостаток метода — в том, что он повышает порядок ДУ, а следовательно, р а с ш и р я е т [13] множество решений.

П р и м е р. Решить уравнение $y'^2 + y^2 = 1$.

Продифференцировав уравнение по x, получим: $y'(y'' + y) = 0$. Это ДУ распадается на два: $y' = 0$ и $y'' + y = 0$. Общее решение первого ДУ: $y = C$, второго: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Полученное множество решений ш и р е множества решений исходного уравнения. Выделим из множества те функции, которые удовлетворяют исходному уравнению. Подстановка $y = C$ в исходное уравнение даёт: $C^2 = 1$. Следовательно, решениями исходного ДУ будут прямые $y = \pm 1$. Подстановка второго решения даёт $C_1^2 + C_2^2 = 1$, т.е. $C_1 = \sin \widetilde{C}$, $C_2 = \cos \widetilde{C}$, $\widetilde{C} \in \mathbb{R}$. Поэтому решениями исходного ДУ являются функции $y = \sin(x + \widetilde{C})$. Таким образом, полное решение ДУ имеет вид: $\left\{y = \sin(x + \widetilde{C}),\ \widetilde{C} \in \mathbb{R};\ y = 1;\ y = -1\right\}$.

Решения $y = \pm 1$ являются *особыми*.

6. Особые решения уравнения первого порядка

Согласно примечаниям к теореме существования и единственности для ДУ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ (см. С.7) решение уравнения м о ж е т с т а т ь н е е д и н с т в е н н ы м [14], если функция $f(x, y)$ непрерывна, а её производная f'_y — нет.

Решение $y = \varphi(x)$ уравнения $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ называется о с о б ы м, если в каждой его точке нарушается свойство единственности, т.е. если через каждую его точку (x_0, y_0), кроме этого решения, проходит д р у г о е решение этого ДУ, не совпадающее с $\varphi(x)$ ни в какой, даже сколь угодно малой окрестности точки (x_0, y_0), причём графики двух решений касаются в само́й точке.

Особое решение не получается из общего ни при каком численном значении произвольной константы C (включая сюда и $C = \pm\infty$).

Итак, для существования особого решения необходимо, чтобы не выполнялись условия теоремы существования и единственности решения. Если правая часть ДУ $f(x, y)$ непрерывна, то особые решения могут проходить только через те точки, в окрестности которых $f'_y \to \infty$.

---

[13] Это видно хотя бы из того, что в общее решение нового уравнения входят д в е произвольные константы — вместо одной для исходного ДУ.

[14] Именно м о ж е т, но не обязано, т.к. теорема даёт лишь достаточные условия.

Правило для поиска особых решений

Чтобы найти особые решения уравнения $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$, надо:

1) найти множество точек, в которых $\frac{\partial f}{\partial y} \to \infty$;

2) если это множество точек образует одну или несколько кривых (кривых, подозрительных на особое решение), проверить, являются ли они интегральными кривыми для данного ДУ;

3) если это — интегральные кривые, проверить, нарушается ли в каждой их точке свойство единственности. Требуется найти общее решение ДУ и по нему — частное решение для подозрительных точек.

Пример. Найти область единственности решения уравнения $y' = \frac{5}{4}(y-4)^{4/5}$.

Правая часть ДУ $f(x, y) = \frac{5}{4}(y-4)^{4/5}$ определена и непрерывна всюду на плоскости xOy. Производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращается в бесконечность на прямой $y = 4$, параллельной оси Ox. Очевидно, что $y = 4$ — решение ДУ. На прямой $y = 4$ возможно нарушение единственности решения. Легко находится общее решение ДУ: $y = \frac{1}{1024}(x+C)^5 + 4$; всякая интегральная кривая пересекает прямую $y = 4$.

Итак, через каждую точку этой прямой проходят две интегральные линии, т.е. во всех её точках нарушена единственность решения. Во всех прочих точках плоскости уравнение имеет единственное решение.

Пример. Имеет ли уравнение $y' = 2\sqrt{y} + 1$ особые решения?

Производная $f'_y = 1/\sqrt{y} \to \infty$ при $y \to 0$, поэтому точки прямой $y \equiv 0$ (оси Ox) подозрительны на особое решение. Но функция $y \equiv 0$ не является решением данного ДУ, поэтому оно не имеет особых решений.

7. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Иногда ДУ n-го порядка $F\big(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0$ подходящей подстановкой удаётся свести к уравнению низшего порядка (в благоприятном случае — первого порядка, т.е. к ужé рассмотренной ранее задаче).

1. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$.

Порядок уравнения можно понизить с помощью замены $y^{(n-1)} = P(x)$. Тогда для новой искомой функции получится ДУ первого порядка с разделяющимися переменными: $P'(x) = f(x)$. Проинтегрировав это уравнение, можно снова сделать аналогичную замену — и так далее, $(n-1)$ раз.

Пример. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y''' = xe^{-x}; \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 2. \end{cases}$$

Делаем замену $y'' = P(x)$; тогда $y''' = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$, и получаем ДУ первого порядка $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = xe^{-x}$, откуда

$$\int \mathrm{d}P = \int xe^{-x}\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad P(x) = y''(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1.$$

Сразу используем третье начальное условие: $y''(0) = -0 \cdot e^0 - e^0 + C_1 = 2$, т.е. $C_1 = 3$.

Итак, $y''(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 3$. Аналогичная замена: $y' = Q(x)$; тогда $y'' = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -xe^{-x} - e^{-x} + 3$. Находим

$$Q(x) = \int \bigl(-xe^{-x} - e^{-x} + 3\bigr)\mathrm{d}x = xe^{-x} + 2e^{-x} + 3x + C_2.$$

Применяем второе начальное условие: $y'(0) = 2 + C_2 = 2 \ \Rightarrow C_2 = 0$.

Таким образом, $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Q(x) = xe^{-x} + 2e^{-x} + 3x$. Интегрируем последний раз:

$$y(x) = \int \bigl(xe^{-x} + 2e^{-x} + 3x\bigr)\mathrm{d}x = -xe^{-x} - 3e^{-x} + \tfrac{3}{2}x^2 + C_3.$$

Из первого начального условия $C_3 = 3$.

Окончательно, частное решение ДУ имеет вид: $y = -(x+3)e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 + 3$.

2. Уравнение вида $F\bigl(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\bigr) = 0$, в которое не входит искомая функция (и, возможно, также её производные до некоторого порядка).

Порядок уравнения можно понизить с помощью замены $y^{(k)} = P(x)$ (за новую функцию берём низшую из производных, входящих в ДУ). Тогда $y^{(k+1)} = P'(x), \ldots, y^{(n)} = P^{(n-k)}(x)$. Порядок уравнения понизится на k единиц.

П р и м е р. Решить задачу Коши $\begin{cases} (1+x^2)y''-2xy'=0, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=3. \end{cases}$

В уравнении отсутствует искомая функция $y(x)$. Сделаем замену $y' = P(x)$. Тогда $y'' = P'(x)$, и уравнение примет вид: $(1+x^2)\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = 2xP$. Разделим переменные: $\int \frac{\mathrm{d}P}{P} = \int \frac{2x\mathrm{d}x}{1+x^2}$, откуда $\ln|P| = \ln(1+x^2) + \ln C_1$ или $P(x) = C_1(1+x^2) = y'$. Применим второе начальное условие: $y'(0) = C_1 = 3$, т.е. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3(1+x^2)$. Интегрируем ещё раз: $y(x) = 3x + x^3 + C_2$. Из первого начального условия $C_2 = 0$.

Итого, частное решение исходного ДУ есть функция $y(x) = 3x + x^3$.

3. У р а в н е н и е в и д а $F\big(y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0$, в которое не входит явно независимая переменная. Порядок уравнения понижается на единицу, если взять за новую независимую переменную y, а за неизвестную функцию $y' = P(y)$. Тогда высшие производные вычисляются по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(y) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{=P(y)} = P\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\,,$$

$$y''' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{P(y)\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left\{P(y)\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\right\}\underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{=P(y)} =$$

$$= \left[\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\,P(y)\right\}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} + P(y)\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\right\}\right]P(y) = \left[\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\right)^2 + P(y)\,\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y^2}\right]P(y) =$$

$$= P(P')^2 + P^2P''.$$

П р и м е р. Решить ДУ второго порядка $y''y^3 = 1$.

Делаем замену $y' = P(y)$, $y'' = PP'$. Получается уравнение первого порядка

$$P\,\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\,y^3 = 1 \;\Rightarrow\; \int P\mathrm{d}P = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^3} \;\Rightarrow\; \frac{P^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + \frac{C_1}{2} \;\Rightarrow\; P(y) = \frac{\sqrt{C_1y^2-1}}{y}\,.$$

Возвращаемся к старой переменной $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{C_1y^2-1}}{y}$ и разделяем переменные:

$$\int \frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1y^2-1}} = \int \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \frac{1}{2C_1}\int \frac{\mathrm{d}(C_1y^2-1)}{\sqrt{C_1y^2-1}} = x + C_2 \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{C_1y^2-1}}{C_1} = x + C_2.$$

Окончательно, $C_1y^2-1=C_1^2(x+C_2)^2$ или $C_1y^2-C_1^2(x+C_2)^2=1$. Получен общий интеграл. Интегральные кривые — двухпараметрическое семейство гипербол.

4. Уравнение $F\big(x,\,y,\,y',\ldots,y^{(n)}\big)=0$, однородное относительно $y,\,y',\ldots,y^{(n)}$, т.е. не меняющееся, если каждую из этих величин умножить на одно и то же число $k>0$.

Уравнение допускает понижение порядка на единицу при замене $\frac{y'}{y}=P(x)$, где $P(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда $y'=yP(x)$,

$$y''=\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y'=\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(y\,P(x)\big)=\underbrace{\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}_{=yP}P(x)+y\,\tfrac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}=yP^2+yP'\,,$$

$$\text{т.е.}\quad \frac{y''}{y}=P^2+P'\quad \text{и т.д.}$$

Пример. Решить уравнение $yy''-(y')^2=12x^2y^2$.

Данное уравнение — однородное, что становится особенно хорошо видно при почленном делении на y^2:

$$\frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}\right)^2=12x^2.$$

Делаем замену $\frac{y'}{y}=P(x)$, $\frac{y''}{y}=P^2+P'$:

$$P^2+P'-P^2=12x^2\quad\Rightarrow\quad P'=12x^2\quad\Rightarrow\quad P(x)=4x^3+C_1.$$

Итак, $\frac{y'}{y}=4x^3+C_1$; разделяем переменные: $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int(4x^3+C_1)\,\mathrm{d}x$. Тогда $\ln y=x^4+C_1x+\ln C_2$; окончательно, общее решение имеет вид

$$y=C_2e^{x^4+C_1x}.$$

5. Уравнение вида $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\big(x,\,y,\,y',\ldots,y^{(n-1)}\big)=0$, левая часть которого — полная производная некоторой функции $F(\ldots)$. Тогда $F(\ldots)=C$, где C — произвольная константа. Порядок уравнения понизился от n до $n-1$, т.е. на единицу.

К этому же типу можно отнести уравнение вида $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$, обе части которого представляют собой полные производные. Иногда уравнение надо преобразовать, прежде чем оно примет данный вид. Например, уравнение

$yy'' = (y')^2$ изначально не содержит полных производных, но после деления обеих частей на yy' получаем

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y} \quad \text{или} \quad \big(\ln|y'|\big)' = \big(\ln|y|\big)' \quad \Rightarrow \quad \ln|y'| = \ln|y| + \ln C \quad \Rightarrow \quad y' = Cy.$$

Дальнейшее очевидно.

Пример. Решить уравнение $(1+x^2)y'' + 2xy' = 4x^3$.

Обе части уравнения — полные производные: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[(1+x^2)y'\big] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[x^4\big]$. Тогда $(1+x^2)y' = x^4 + C$. Порядок ДУ понизился на единицу; получилось уравнение с разделяющимися переменными. Дальнейшее опять очевидно.

8. Теория линейных дифференциальных уравнений

Изучение линейных ДУ составляет отдельное теоретическое направление потому, что они обладают рядом специфических свойств, важнейшее из которых заключается в том, что все решения линейного уравнения выражаются через конечное число основных, т.н. *фундаментальных* решений (см. С.33).

Линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) n-го порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции $y(x)$ и её производных:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x).$$

Если правая часть $F(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*, т.к. оно однородно относительно неизвестной функции и её производных.

Если коэффициент $a_0(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке некоторого отрезка $a \le x \le b$, то, разделив на $a_0(x)$, получим ЛДУ в приведённом виде

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{30}$$

где введены обозначения $p_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_0(x)}$, $f(x) = \frac{F(x)}{a_0(x)}$.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Если коэффициенты ЛДУ (30) *и неоднородность* $f(x)$ *непрерывны на интервале* $(a,\, b)$, *то в окрестности любых начальных значений*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0\,, \\ y'(x_0) = y_{1\,0}\,, \\ y''(x_0) = y_{2\,0}\,, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1\;0} \end{cases}$$

существует единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям. Здесь x_0 *— любая точка интервала* $(a,\, b)$, $y_0\,, y_{1\,0}\,, \dots, y_{n-1\;0}$ *— заданные числа.*

Запись ЛДУ и доказательство ряда теорем упрощаются при использовании *дифференциального оператора*

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + p_1(x)\,\tfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + p_n(x).$$

Тогда в операторном виде однородное линейное уравнение (ОЛДУ) записывается как $\hat{\boldsymbol{L}}y = 0$, а неоднородное (НЛДУ) — как $\hat{\boldsymbol{L}}y = f(x)$.

Дифференциальный оператор $\hat{\boldsymbol{L}}$ *линеен.*

Действительно, подействуем оператором на линейную комбинацию функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$$\begin{aligned} &\hat{\boldsymbol{L}}\big(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\big) = \\ &= \tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(C_1 y_1 + C_2 y_2\big) + p_1(x)\,\tfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\big(C_1 y_1 + C_2 y_2\big) + \ldots + p_n(x)\big(C_1 y_1 + C_2 y_2\big) = \\ &= C_1\left(\tfrac{\mathrm{d}^n y_1}{\mathrm{d}x^n} + p_1(x)\,\tfrac{\mathrm{d}^{n-1} y_1}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + p_n(x) y_1\right) + C_2\left(\tfrac{\mathrm{d}^n y_2}{\mathrm{d}x^n} + p_1(x)\,\tfrac{\mathrm{d}^{n-1} y_2}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + p_n(x) y_2\right) = \\ &\qquad\qquad = C_1 \hat{\boldsymbol{L}} y_1(x) + C_2 \hat{\boldsymbol{L}} y_2(x), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Однородное линейное дифференциальное уравнение $\hat{\boldsymbol{L}}y = 0$

Теорема о свойствах решений ОЛДУ

Если $y_1(x),\, y_2(x), \dots, y_m(x)$ *— какие-либо частные решения уравнения* $\hat{\boldsymbol{L}}y = 0$, *то их линейная комбинация* $y = \sum\limits_{i=1}^{m} C_i\, y_i(x)$ *тоже является решением этого ДУ.*

Доказательство. В силу линейности дифференциального оператора $\hat{\boldsymbol{L}}y = \hat{\boldsymbol{L}}\Big(\sum\limits_{i=1}^{m} C_i\, y_i(x)\Big) = \sum\limits_{i=1}^{m} C_i\ \underbrace{\hat{\boldsymbol{L}}\, y_i(x)}_{\substack{=0,\ \text{т.к.}\\ y_i-\text{решение}}} = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема о комплексном решении ОЛДУ

Если ОЛДУ $\hat{\boldsymbol{L}}y = 0$ с действительными коэффициентами $p_i(x)$ имеет комплексное решение $y(x) = u(x) + iv(x)$, то его действительная часть $\operatorname{Re} y(x) = u(x)$ и его мнимая часть $\operatorname{Im} y(x) = v(x)$ в отдельности являются решениями того же ОЛДУ.

Доказательство. По условию $\hat{\boldsymbol{L}}\big[u(x) + iv(x)\big] \equiv 0$. В силу линейности оператора $\hat{\boldsymbol{L}}$ можно записать $\hat{\boldsymbol{L}}\big[u + iv\big] \equiv \hat{\boldsymbol{L}}u + i\hat{\boldsymbol{L}}v \equiv 0$, откуда $\hat{\boldsymbol{L}}u \equiv 0$ и $\hat{\boldsymbol{L}}v \equiv 0$, т.к. комплексная функция тождественно обращается в нуль тогда и только тогда, когда действительная и мнимая часть тождественно равны нулю.

Из предпоследней теоремы следует исключительно важный вопрос: не будет ли линейная комбинация

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

n частных решений ОЛДУ n-го порядка общим решением данного уравнения?

Для ответа на этот вопрос надо вспомнить понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов.

Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, определённые на промежутке $(a,\, b)$, называются *линейно зависимыми* на этом промежутке, если существуют такие числа α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что линейная комбинация

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0 \tag{31}$$

(т.е. линейная комбинация обращается в нуль в каждой точке $(a,\, b)$).

Если линейная комбинация тождественно равна нулю лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *линейно независимы.*

Пример. Показать, что система функций 1, x, x^2, $x^3, \ldots, x^n$ линейно независима на $(-\infty,\, \infty)$.

Составим линейную комбинацию этих функций и потребуем, чтобы она тождественно равнялась нулю:

$$\alpha_0 x^0 + \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n \equiv 0.$$

Пусть $\alpha_0 \neq 0$; тогда получим алгебраическое уравнение n-й степени. Но, согласно основной теореме алгебры, оно может иметь не более чем n действительных корней. Таким образом, равенство нулю будет иметь место не всюду, а лишь в конечном числе точек. Чтобы разрешить противоречие, следует положить $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, а это и означает линейную независимость степенны́х функций.

Характер системы $n-1$ раз дифференцируемых функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ связан со свойствами *вронскиана* (определителя Вроньского [15]).

Вронскианом системы функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ называется функциональный определитель

$$W\left[\varphi_1(x),\, \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] = W(x) =$$
$$= \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \quad x \in (a,\, b).$$

Необходимое условие линейной зависимости функций

Если система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ линейно зависима на $(a,\, b)$, то её вронскиан тождественно равен нулю на $(a,\, b)$.

Доказательство. По определению линейная зависимость функций означает, что линейная комбинация обращается в нуль всюду на $(a,\, b)$:

[15] Юзеф Мария Хёне, известный под псевдонимом "Вроньский" (J.M.Hoene (Wroński), 1778–1853), польский математик и философ. Был офицером русской армии. В отставке занялся математическими изысканиями, отмеченными чрезвычайной широтой и общностью постановки задач. Болезненная гордость Вроньского, склонность к мистицизму, трудность понимания его сочинений привели к тому, что он был объявлен помешанным, а его идеи при жизни не привлекли к себе внимания.

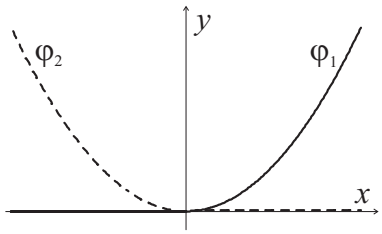


Рис. I.3. Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы, поскольку $\varphi_1(x)/\varphi_2(x) \neq C = \text{const}$. Но вронскиан для них тождественно равен нулю

$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0$, причём существуют ненулевые значения α_i. Предположим, что $\alpha_n \neq 0$ [16]. Выразим $\varphi_n(x)$ из линейной комбинации:

$$\varphi_n(x) = -\tfrac{\alpha_1}{\alpha_n}\varphi_1(x) - \tfrac{\alpha_2}{\alpha_n}\varphi_2(x) - \ldots - \tfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\varphi_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\varphi_i(x).$$

Здесь $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_n}$ — новые коэффициенты.

Составим теперь вронскиан для системы функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ и заменим в нём $\varphi_n(x)$ его найденным выражением:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots & \varphi_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n-1}\beta_i\varphi_i \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n-1}\beta_i\varphi_i' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \sum\limits_{i=1}^{n-1}\beta_i\varphi_i^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Поскольку последний столбец в этом определителе есть линейная комбинация предыдущих столбцов, определитель тождественно равен нулю, что и требовалось показать.

Необходимое условие линейной зависимости не является достаточным, т.е. из равенства вронскиана системы функций нулю не следует, вообще говоря, линейная зависимость этой системы.

Пример. Функции $\varphi_1(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x\in[-1,0), \\ x^2 \ , \ x\in[0,1] \end{cases}$ и $\varphi_2(x) = \begin{cases} x^2 \ , \ x\in[-1,0), \\ 0 \ , \ x\in[0,1], \end{cases}$ очевидно, линейно независимы (рис. I.3). Обе функции дифференцируемы всюду на отрезке $[-1,\ 1]$, в т.ч. и в точке $x = 0$ (почему?).

[16] Общность доказательства не умаляется. Всегда можно перенумеровать коэффициенты так, чтобы это условие выполнилось.

При этом вронскиан

$$W\big[\varphi_1(x),\,\varphi_2(x)\big] = \begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix}, & x \in [-1,\,0), \\ \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix}, & x \in [0,\,1], \end{cases} \qquad W\big[\varphi_1(x),\,\varphi_2(x)\big] \equiv 0.$$

Заметим, что здесь функции $\varphi_{1,2}(x)$ — это произвольные функции, не являющиеся решениями одного и того же ОЛДУ.

Теорема о вронскиане линейно независимых решений ОЛДУ

Если линейно независимые функции $y_1(x),\,y_2(x),\ldots,y_n(x)$ являются решениями ОЛДУ

$$\hat{\boldsymbol{L}}y = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0, \tag{32}$$

коэффициенты которого непрерывны при $x \in [a,\,b]$, то вронскиан $W(x) = W\big[y_1,\,y_2,\ldots,y_n\big]$ не может обратиться в нуль ни в одной точке отрезка $[a,\,b]$.

Доказательство от противного. Предположим, что в некоторой точке $x_0 \in [a,\,b]$ вронскиан $W(x_0) = 0$. Выберем константы α_i, $i = \overline{1,n}$, так, чтобы удовлетворялась система уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{33}$$

и чтобы не все α_i равнялись нулю. Такой выбор возможен, т.к., по нашему предположению, $W(x_0) = 0$, а это определитель линейной однородной системы (33) из n уравнений относительно n неизвестных α_i; следовательно, существуют нетривиальные решения этой системы. При таком выборе α_i линейная комбинация

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x)$$

будет решением ОЛДУ $\hat{\boldsymbol{L}}y = 0$, удовлетворяющим, в силу (33), нулевым начальным условиям:

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0,\ldots,y^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{34}$$

Таким начальным условиям, очевидно, удовлетворяет тривиальное решение $y \equiv 0$ ОЛДУ (32) и только оно, т.к. благодаря непрерывности коэффициентов ОЛДУ выполнены условия теоремы существования и

единственности решения ОЛДУ. Итак,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0,$$

при том, что не все коэффициенты α_i равны нулю. Значит, решения $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы, а это противоречит условию теоремы.

Теорема доказана.

Замечание. Существенно, что функции $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ суть решения одного и того же ОЛДУ. Если бы это были произвольные $n-1$ раз дифференцируемые функции, теорема оказалась бы неверной (предыдущий пример показывает это).

Любая система из n линейно независимых частных решений ОЛДУ n-го порядка называется его фундаментальной системой решений (ФСР).

Теперь мы можем вернуться к поставленному на С.29 вопросу.

Теорема о структуре общего решения ОЛДУ

Общим решением при $x \in [a,\, b]$ однородного линейного ДУ n-го порядка $\hat{\boldsymbol{L}}y = 0$ (32) с непрерывными на $[a,\, b]$ коэффициентами является линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i$ решений, входящих в ФСР данного ОЛДУ.

Доказательство. Поскольку коэффициенты ОЛДУ непрерывны на отрезке $[a,\, b]$, уравнение удовлетворяет на этом отрезке условиям теоремы существования и единственности (С.28). В силу линейности оператора $\hat{\boldsymbol{L}}$ функция $y = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i$ является решением данного ОЛДУ. Мы докажем, что это решение является общим, т.е. содержащим все частные решения, если сможем подобрать постоянные C_i так, чтобы удовлетворились произвольно заданные начальные условия

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0\,, \\ y'(x_0) = y_{1\,0}\,, \\ y''(x_0) = y_{2\,0}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1\,0}\,, \end{cases}$$

где x_0 — произвольная точка отрезка $[a,\, b]$.

Потребовав, чтобы решение $y = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i$ удовлетворяло этим условиям, получим систему n уравнений, линейных относительно C_i:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x_0) = y_0\,, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i'(x_0) = y_{1\ 0}\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1\ 0}\,. \end{cases}$$

Эта система разрешима относительно C_i при любом выборе x_0 и при любых правых частях, так как определитель системы есть вронскиан линейно независимой системы решений $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$ и, следовательно, не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $a \le x \le b$.

Следствие. Максимальное число линейно независимых решений ОЛДУ равно его порядку.

9. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейные ДУ с постоянными коэффициентами — важный класс дифференциальных уравнений. Их решения с помощью стандартных процедур выражаются через элементарные функции или через элементарные функции и неопределённые интегралы. Многие практически важные задачи физики и инженерии приводят к линейным ДУ с постоянными коэффициентами.

Будем рассматривать сначала однородные линейные уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{35}$$

причём все коэффициенты a_i — вещественные константы.

Частные решения этого уравнения можно найти с помощью *подстановки Эйлера* $y = e^{kx}$, где k — постоянная. Действительно, подставляя в (35) $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ и т.д., после сокращения на необращающийся в нуль множитель e^{kx} получим т.н. *характеристическое уравнение*

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \tag{36}$$

Это алгебраическое уравнение n-й степени определяет те значения k, при которых функция $y = e^{kx}$ является решением исходного ОЛДУ (35).

Рассмотрим возможные случаи, которые могут встретиться при решении уравнения (36).

1. Все n корней $k_1, k_2, \ldots, k_n$ характеристического уравнения — действительные и различные.

Функции $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}$ линейно независимы, поскольку вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & \ldots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & \ldots & k_n e^{k_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & \ldots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} \ldots e^{k_n x} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & \ldots & k_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

(в последнем определителе нет пропорциональных столбцов).

Поэтому данные функции образуют фундаментальную систему решений ОЛДУ (35), и его общее решение есть линейная комбинация этих функций:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x},$$

где C_i — произвольные константы.

Пример. Решить уравнение $y''' + 2y'' - 3y' = 0$.

Характеристическое уравнение $k^3 + 2k^2 - 3k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = -3$, $k_3 = 1$. Общее решение ОЛДУ:

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{1x} = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{x}.$$

2. Среди корней характеристического уравнения (36) имеются простые (невырожденные) комплексные корни.

Поскольку коэффициенты ОЛДУ (35) и характеристического уравнения (36) вещественны, комплексные корни последнего могут появляться только комплексно сопряжёнными па́рами $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Им соответствуют комплексные решения $y_{1,2} = e^{k_{1,2} x} = e^{(\alpha \pm i\beta)x}$, которые по формуле Эйлера [17] можно переписать в виде $y_{1,2} = e^{\alpha x}\big(\cos \beta x \pm i \sin \beta x\big)$. Для практических целей комплексные решения, как правило, неудобны.

Из теоремы о комплексном решении ОЛДУ (С. 29) следует, что два комплексных решения можно заменить двумя действительными решениями —

[17] $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$.

действительной и мнимой частями какого-нибудь одного из комплексных решений, например, первого:

$$y_1^{\mathrm{Re}}(x) = \mathrm{Re}\, y_1(x) = \mathrm{Re}\Big\{e^{\alpha x}\big(\cos\beta x + i\sin\beta x\big)\Big\} = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$y_1^{\mathrm{Im}}(x) = \mathrm{Im}\, y_1(x) = \mathrm{Im}\Big\{e^{\alpha x}\big(\cos\beta x + i\sin\beta x\big)\Big\} = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

так что в общее решение ОЛДУ за счёт этой пары корней войдут слагаемые $C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}\big(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\big)$.

П р а к т и ч е с к и й в ы в о д: при получении комплексных корней характеристического уравнения вида $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ можно с р а з у записать соответствующую часть решения ОЛДУ в виде $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$, включая α в аргумент экспоненты, а β — в аргументы косинуса и синуса.

П р и м е р. Решить уравнение $y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^3 + 3k^2 + 9k - 13 = 0$ имеет очевидный корень $k_1 = 1$; понижая степень уравнения, находим два других корня $k_{2,3} = -2 \pm 3i$. Корню $k_1 = 1$ соответствует частное решение $y_1 = e^x$, а паре комплексно сопряжённых корней $k_{2,3} = -2 \pm 3i$ — частные решения $y_2 = e^{-2x}\cos 3x$ и $y_3 = e^{-2x}\sin 3x$. Общее решение ОЛДУ в действительном виде записывается как

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}\cos 3x + C_3 e^{-2x}\sin 3x = C_1 e^x + e^{-2x}\big(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x\big).$$

3. Среди корней характеристического уравнения (36) имеется действительный корень k, встречающийся r раз, $r > 1$ (r-к р а т н о в ы р о ж д е н н ы й корень).

В этом случае число различных решений вида e^{kx} меньше кратности вырождения r, и, следовательно, недостающие $r-1$ линейно независимых решений надо искать в ином виде. Можно показать, что ими являются функции вида $xe^{kx}, x^2e^{kx}, \ldots, x^{r-1}e^{kx}$.

Докажем это в случае двукратно вырожденного корня $k_1 = k_2 = \tilde{k}$ характеристического уравнения $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ для ОЛДУ второго порядка $\hat{\boldsymbol{L}}y = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Одним частным решением этого ОЛДУ будет функция $y_1 = e^{\tilde{k}x}$. Убедимся непосредственной подстановкой в том,

что функция $y_2 = xe^{\tilde{k}x}$ есть второе частное решение этого ОЛДУ, линейно независимое от y_1.

Очевидно, что квадратное уравнение $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$ имеет двукратно вырожденный корень $k_1 = k_2 = \tilde{k}$, если это уравнение можно записать в виде $(k - \tilde{k})^2 = k^2 - 2k\tilde{k} + \tilde{k}^2 = 0$. Сравнивая две формы записи уравнения, получаем $\tilde{k} = -a_1/2$, $\tilde{k}^2 = a_2$.

Найдём производные функции $y_2 = xe^{\tilde{k}x} = xe^{-a_1 x/2}$:

$$y_2' = e^{-a_1 x/2} - \tfrac{a_1}{2} xe^{-a_1 x/2}, \qquad y_2'' = -a_1 e^{-a_1 x/2} + \tfrac{a_1^2}{4} xe^{-a_1 x/2}$$

и подставим их в ОЛДУ:

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{L}} y_2 = y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = \\
&\quad = -a_1 e^{-a_1 x/2} + \tfrac{a_1^2}{4} xe^{-a_1 x/2} + a_1 \left[e^{-a_1 x/2} - \tfrac{a_1}{2} xe^{-a_1 x/2} \right] + a_2 xe^{-a_1 x/2} = \\
&\qquad\qquad = \underbrace{\left(-\tfrac{a_1^2}{4} + a_2 \right)}_{=0} xe^{-a_1 x/2} \equiv 0
\end{aligned}$$

(т.к. дискриминант $\mathcal{D} = a_1^2 - 4a_2$ характеристического уравнения при совпадении его корней должен быть равен нулю).

Итак, мы доказали, что функция $y_2 = xe^{\tilde{k}x}$ тоже является решением ОЛДУ $\hat{\boldsymbol{L}} y = 0$. Разумеется, она линейно независима от $y_1 = e^{\tilde{k}x}$, т.к. их отношение $y_2/y_1 = x \neq \text{const}$.

Пример. Решить уравнение $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^3 + 2k^2 - 4k - 8 = 0$. Группируя слагаемые, получаем $(k+2)(k^2 - 4) = 0$, откуда $k_1 = 2$, $k_{2,3} = -2$. Фундаментальная система решений: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$, $y_3 = xe^{-2x}$; общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 xe^{-2x}$.

4. Среди корней характеристического уравнения (36) имеется пара комплексно сопряжённых корней $\alpha \pm i\beta$, встречающаяся r раз, $r > 1$ (r-кратно вырожденная пара корней).

Аналогично случаю **3** в фундаментальную систему решений войдут функции

$$\left.\begin{array}{llll}
e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & \ldots, & x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\
e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & \ldots, & x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x
\end{array}\right\} \text{(всего } 2r \text{ функций).}$$

Пример. Решить уравнение $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^4 + 2k^2 + 1 = (k^2+1)^2 = 0$ имеет двукратные корни $k_{1,2} = i$, $k_{3,4} = -i$. Общее решение ОЛДУ:

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x.$$

10. Понижение порядка и нахождение общего решения линейного ДУ при известном частном решении

Подобно тому, как степень алгебраического уравнения может быть уменьшена, если известен один его корень, порядок линейного ДУ можно понизить, зная его частное решение. Рассмотрим один из способов осуществления этого.

Если известно какое-либо ненулевое частное решение $y_1(x)$ линейного однородного ДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \tag{37}$$

то подстановка $y(x) = y_1(x)\,z(x)$ приводит это ДУ к линейному относительно новой функции $z(x)$ уравнению, не содержащему её явно. Поэтому, полагая $z'(x) = u(x)$, получим линейное однородное ДУ порядка $(n-1)$ относительно функции $u(x)$.

Если известно k частных линейно независимых решений уравнения (37), то его порядок можно понизить на k единиц последовательным применением указанной процедуры.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$xy'' - xy' + y = 0. \tag{38}$$

ДУ имеет очевидное частное решение $y_1 = x$. Сделаем подстановку

$$y = y_1(x)\,z(x) = x\,z(x). \tag{39}$$

Тогда $y' = z + xz'$, $y'' = 2z' + xz''$, и уравнение (38) примет вид $x^2z'' + x(2-x)z' = 0$. Замена $z' = u$ понижает его порядок на единицу; после разделения переменных: $\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{x-2}{x}\,\mathrm{d}x$. Общее решение: $u = C\,\frac{e^x}{x^2}$.

Тогда $z = \int u \mathrm{d}x = C \int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x + C_1$ и, в силу (39), общее решение ДУ (38):

$$y = x\,z(x) = x\left(C\int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x + C_1\right) = Cx\int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x + C_1 x. \tag{40}$$

Угаданное частное решение $y_1 = x$ присутствует в (40) как второе слагаемое, линейно независимое по отношению к первому, полученному в ходе вычислений. Заметим, что первое слагаемое в (40) содержит интеграл $\int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, не выражающийся в конечной форме через элементарные функции. Тем не менее задача считается решённой, т.к. интегрирование ДУ сведено к более простой проблеме вычисления интеграла.

11. Уравнения, приводящиеся к ДУ с постоянными коэффициентами

Однородные линейные ДУ с постоянными коэффициентами всегда интегрируются в элементарных функциях. Неоднородные же ЛДУ, при известном общем решении соответствующего однородного уравнения, интегрируются в квадратурах (метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) — см. С. 43), а иногда — даже с помощью элементарных действий (подбор частного решения неоднородного ДУ методом неопределённых коэффициентов (методом Эйлера) — см. С. 46).

Поэтому задача приведения линейного ДУ с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами (когда это возможно) весьма важна. Рассмотрим два подхода к этой задаче.

а) Замена независимой переменной. Всякое линейное ДУ преобразуется вновь в линейное при любой замене независимой переменной, причём однородное уравнение остаётся однородным.

Этим свойством можно воспользоваться для того, чтобы попытаться свести данное однородное линейное ДУ к уравнению с постоянными коэффициентами. Как независимо друг от друга показали Еругин и Пейович [18], *если уравнение*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{41}$$

[18] Николай Павлович Еругин (род. 1907), белорусский советский математик, опубликовал этот результат в 1946 г. Сербский математик Т. Пейович пришёл другим путём к тем же выводам в 1925 г.

приводимо к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной, то лишь подстановкой

$$t = \int \sqrt[n]{Cp_n(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{42}$$

где C — произвольная константа.

Пример. Привести уравнение $xy'' - 3y' + 16x^7y = 0$ к уравнению с постоянными коэффициентами.

Поскольку $p_2(x) = \frac{16x^7}{x} = 16x^6$, то, согласно теореме Еругина-Пейовича, новым аргументом, который может вести к решению поставленной задачи, является выражение вида $\int \sqrt{Cp_2(x)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{C}\int 4x^3\,\mathrm{d}x = \sqrt{C}x^4$. Пусть новая независимая переменная $t = x^4$ (положили константу C равной единице); тогда $x = t^{1/4}$.

Пересчитаем входящие в уравнение производные:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 4x^3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4t^{3/4}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t};$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(4t^{3/4}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)4t^{3/4} =$$

$$= \left(3t^{-1/4}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4t^{3/4}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)4t^{3/4} = 12t^{1/2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 16t^{3/2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}.$$

Подставим y', y'' в исходное уравнение:

$$t^{1/4}\left(12t^{1/2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 16t^{3/2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right) - 3\cdot 4t^{3/4}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 16t^{7/4}y(t) = 0;$$

приведём подобные: $16t^{7/4}y'' + 16t^{7/4}y(t) = 0$; окончательно: $y''(t) + y(t) = 0$. Замена аргумента по Еругину-Пейовичу оказалась эффективной! Решение полученного уравнения очевидно: $y(t) = C_1\cos t + C_2\sin t$. Возвращаемся к исходному аргументу: $y(x) = C_1\cos x^4 + C_2\sin x^4$.

б) Замена искомой функции. Для приведения однородного линейного ДУ к уравнению с постоянными коэффициентами можно также воспользоваться однородным линейным преобразованием искомой функции вида

$$y = \alpha(x)\,z, \tag{43}$$

где z — новая неизвестная функция. Всякое преобразование вида (43) не нарушает ни линейности, ни однородности уравнения (41).

Коэффициент $\alpha(x)$ всегда можно выбрать так, чтобы в полученном уравнении коэффициент при производной $(n-1)$-го порядка обратился в

нуль. Если при этом все остальные коэффициенты окажутся постоянными, то получится искомое ДУ с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим случай линейного ДУ второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{44}$$

Подстановка

$$y = e^{-\int \frac{p(x)}{2}\,\mathrm{d}x}\, z \tag{45}$$

приводит уравнение (44) к виду

$$z'' + I(x)z = 0 \tag{46}$$

(проверьте!), где коэффициент $I(x)$, называемый инвариантом уравнения (44), имеет вид

$$I(x) = -\tfrac{p'(x)}{2} - \tfrac{p^2(x)}{4} + q(x). \tag{47}$$

Если окажется, что $I(x) = \mathrm{const}$, то ДУ (46) будет уравнением с постоянными коэффициентами.

При интегрировании уравнения (44) иногда оказывается полезной комбинация подстановок (42) и (45), первая из которых приведёт ДУ к уравнению с постоянными коэффициентами, а вторая — уничтожит слагаемое, содержащее первую производную искомой функции. В итоге может снова получиться ДУ с постоянными коэффициентами.

Заметим, что преобразование (43), (45) можно делать и в неоднородном уравнении.

П р и м е р. Уравнение $y'' - 2xy' + x^2y = 0$ привести к виду, не содержащему первой производной, и найти общее решение этого уравнения.

Подстановка (45) имеет вид

$$y = e^{x^2/2}\, z. \tag{48}$$

Вычисляя по (47) инвариант $I(x)$, находим $I(x) = 1$. Поэтому подстановка (48) приводит исходное ДУ к виду $z'' + z = 0$, откуда $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Тогда $y(x) = e^{x^2/2}\big(C_1 \cos x + C_2 \sin x\big)$ есть общее решение исходного уравнения.

12. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения

Неоднородное линейное дифференциальное уравнение (НЛДУ) имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x),$$

в операторной записи — $\hat{\boldsymbol{L}}y = f(x)$.

Теорема о решении НЛДУ

Если $\tilde{y}$ — решение НЛДУ $\hat{\boldsymbol{L}}y = f(x)$, а $\overline{y}$ — решение соответствующего однородного уравнения $\hat{\boldsymbol{L}}y = 0$, то сумма $\overline{y} + \tilde{y}$ также является решением НЛДУ $\hat{\boldsymbol{L}}y = f(x)$.

Доказательство. В силу линейности дифференциального оператора $\hat{\boldsymbol{L}}(\overline{y} + \tilde{y}) = \hat{\boldsymbol{L}}\overline{y} + \hat{\boldsymbol{L}}\tilde{y} = f(x) + 0 = f(x)$, что и требовалось доказать.

Теорема об общем решении НЛДУ

Общее решение НЛДУ $\hat{\boldsymbol{L}}y = f(x)$ порядка n с коэффициентами $p_i(x)$ и правой частью $f(x)$, непрерывными на отрезке $a \le x \le b$, есть сумма общего решения $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i$ соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения $\tilde{y}$ неоднородного уравнения.

Доказательство. Согласно предыдущей теореме выражение

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i + \tilde{y}, \tag{49}$$

где y_i $(i = \overline{1,n})$ — фундаментальные решения ОЛДУ, а C_i — произвольные константы, является решением НЛДУ. Но будет ли это решение общим? Учитывая справедливость для рассматриваемого уравнения условий теоремы существования и единственности (С.28), мы должны лишь убедиться в том, что подбором произвольных констант C_i в (49) можно удовлетворить произвольно заданным начальным условиям

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0\,, \\ y'(x_0) = y_{1\,0}\,, \\ y''(x_0) = y_{2\,0}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1\,0}\,, \end{cases}$$

где $x_0 \in [a,\, b]$. Налагая на решение (49) эти условия, получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x_0) + \tilde{y}(x_0) = y_0\,, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i'(x_0) + \tilde{y}'(x_0) = y_{1\,0}\,, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i''(x_0) + \tilde{y}''(x_0) = y_{2\,0}\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i^{(n-1)}(x_0) + \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1\,0}\,. \end{cases}$$

Эта линейная относительно постоянных C_i система из n уравнений с n неизвестными при произвольных правых частях имеет, притом единственное, решение $C_1,\, C_2, \dots, C_n$, т.к. определитель системы есть взятый в точке $x_0 \in [a,\, b]$ вронскиан W линейно независимых решений $y_1,\, y_2, \dots, y_n$ соответствующего однородного ДУ, ни в одной точке отрезка $[a,\, b]$ не обращающийся в нуль.

Принцип суперпозиции

Пусть имеется НЛДУ $\hat{\boldsymbol{L}}y = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i$, *неоднородность в котором является суммой нескольких слагаемых. Тогда решение этого уравнения есть сумма* $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i$ *решений каждого из уравнений* $\hat{\boldsymbol{L}}y_i = f_i$ *в отдельности.*

Доказательство. Действительно, $\hat{\boldsymbol{L}}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} \hat{\boldsymbol{L}}y_i = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i$.

13. Метод вариации произвольных постоянных

Итак, интегрирование НЛДУ сводится к нахождению одного частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего ОЛДУ. Рассмотрим нахождение частного решения НЛДУ методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа).

Пусть имеется однородное линейное ДУ второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

и нам известна его фундаментальная система решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, так что общее решение ОЛДУ имеет вид $\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Здесь $C_i = \mathrm{const}$.

Решение НЛДУ

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \tag{50}$$

следуя идее Лагранжа, будем искать в виде

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \tag{51}$$

где $C_i(x)$ — новые, неизвестные пока, функции (мы проварьировали прежние C_i, откуда и название метода).

Производная выражения (51) имеет вид

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x). \tag{52}$$

Поскольку функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ пока неизвестны, а для нахождения двух функций требуются два условия, то одно из них мы вправе назначить сейчас, а именно, потребуем, чтобы обращалось в нуль выражение $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)$. Тогда производная (52) примет вид

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Вычислим вторую производную:

$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Подставим теперь всё в НЛДУ (50):

$$\begin{aligned}
&\big[C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x)\big] + \\
&\quad + p_1(x)\big[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\big] + p_2(x)\big[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\big] = \\
&\qquad = C_1\underbrace{\Big(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1\Big)}_{=0,\ \text{т.к. } y_1 \text{ — решение ОЛДУ}} + C_2\underbrace{\Big(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2\Big)}_{=0,\ \text{т.к. } y_2 \text{ — решение ОЛДУ}} + \\
&\qquad\qquad + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).
\end{aligned}$$

Получено второе условие, требуемое для нахождения функций $C_1(x)$, $C_2(x)$.

Итого, имеем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{53}$$

Эта система всегда имеет решение и притом единственное, т.к. её определитель (он же вронскиан) $\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W\big[y_1,\, y_2\big] \neq 0$ в силу линейной независимости функций $y_1(x)$, $y_2(x)$.

Из системы (53) находим $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, а затем, интегрируя, — сами $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \int C_1'(x)\,\mathrm{d}x + C_1, \quad C_2(x) = \int C_2'(x)\,\mathrm{d}x + C_2,$$

где C_1, C_2 — п о с т о я н н ы е интегрирования. Осталось только подставить найденные функции в (51), и решение НЛДУ получено.

Итак, если общее решение ОЛДУ известно, то общее решение соответствующего НЛДУ всегда можно найти в к в а д р а т у р а х.

П р и м е р. Решить НЛДУ $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

Для соответствующего ОЛДУ $y'' - 2y' + y = 0$ характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет двукратный корень $k_{1,2} = 1$, так что общее решение ОЛДУ есть $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Проварьируем их:

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x. \tag{54}$$

Для отыскания $C_1(x)$, $C_2(x)$ запишем систему вида (53):

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Решить систему можно, например, по правилу Крамера. Главный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}$, побочные определители:

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ e^x/x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = -e^{2x}, \qquad \Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x/x \end{vmatrix} = e^{2x}/x\,.$$

Тогда

$$\mathrm{C}_1'(x) = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -1, \text{ откуда } C_1(x) = -\int \mathrm{d}x = -x + C_1, \quad C_1 = \mathrm{const},$$

$$\mathrm{C}_2'(x) = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = \frac{1}{x}, \text{ откуда } C_2(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C_2, \quad C_2 = \mathrm{const}$$

Подставляя $C_1(x)$, $C_2(x)$ в (54), получаем общее решение исходного НЛДУ:

$$y = (-x + C_1)e^x + (\ln x + C_2)xe^x = \underbrace{C_1 e^x + C_2 x e^x}_{\text{общее решение ОЛДУ}} + \underbrace{x \ln x\, e^x - xe^x}_{\text{частное решение НЛДУ}}.$$

Мы видим, что оно представляет собой сумму общего решения соответствующего ОЛДУ и частного решения НЛДУ (ср. со С. 16).

Мы рассмотрели метод вариации произвольных постоянных на примере НЛДУ второго порядка. Можно показать, что для НЛДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$$

с известным общим решением соответствующего ОЛДУ

$$\overline{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \quad C_i = \mathrm{const}$$

после варьирования $C_i = C_i(x)$ получается следующая система для нахождения $C_i'(x)$, аналогичная (53):

$$\begin{cases} C_1' y_1(x) + C_2' y_2(x) + \ldots + C_n' y_n(x) = 0, \\ C_1' y_1'(x) + C_2' y_2'(x) + \ldots + C_n' y_n'(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-1)}(x) + C_2' y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Подчеркнём, что все вычисления относятся к случаю приведённого НЛДУ, в котором коэффициент при старшей производной $y^{(n)}$ равен единице.

14. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Итак, мы знаем, что для решения неоднородного линейного ДУ можно использовать метод вариации произвольных постоянных (метод *Лагранжа*), если общее решение соответствующего однородного уравнения известно. Этот метод обладает большой общностью и не предъявляет каких-либо специфических требований к виду неоднородности. С другой стороны, вычисление интегралов в этом методе может оказаться непростым.

Рассмотрим другой метод решения НЛДУ

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$$

— метод неопределённых коэффициентов (метод *Эйлера* [19]), применимый, когда

[19] Леонард Эйлер (L. Euler, 1707-1783), швейцарский математик, бóльшую часть жизни проведший в С.-Петербурге; внёс важный вклад во все разделы математики и физики своего времени. Полное собрание его трудов занимает 85 томов большого формата; некоторые из них выполнены после 1771 г., когда он полностью ослеп.

(1) коэффициенты p_i постоянны;

(2) неоднородность $f(x)$ имеет вид *квазиполиномов*[20] — комбинаций экспоненты, полиномов, косинусов и синусов:

$$e^{\alpha x}\Big\{P_k(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\Big\},$$

где $P_k(x)$ и $Q_n(x)$ — полиномы степени k и n, соответственно.

Частное решение НЛДУ будем конструировать, исходя из того, как выглядит квазиполином:

$$\tilde{y}(x) = e^{\alpha x}\big\{R_m(x)\,\cos\beta x + T_m(x)\,\sin\beta x\big\}x^s,$$

где $R_m(x)$ и $T_m(x)$ — полиномы степени m с неопределёнными коэффициентами; $m = \max\{k,\, n\}$;

$$s = \begin{cases} 0, & \text{если } \textit{контрольное число } \mathfrak{r} = \alpha + i\beta \text{ не встречается} \\ & \text{среди корней характеристического уравнения для ОЛДУ;} \\ 1, & \text{если } \mathfrak{r} \text{ встречается один раз} \\ & \text{среди корней характеристического уравнения для ОЛДУ;} \\ 2, & \text{если } \mathfrak{r} \text{ дважды встречается} \\ & \text{среди корней характеристического уравнения для ОЛДУ;} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Итак, число s является показателем наличия или отсутствия резонанса [21]; s есть кратность появления $\mathfrak{r}$ среди характеристических чисел k.

Пример. Решить уравнение $y''' + y'' = 12x^2$.

Для ОЛДУ $y''' + y'' = 0$ характеристическое уравнение $k^3 + k^2 = k^2(k+1) = 0$ имеет двукратно вырожденный корень $k_{1,2} = 0$ и корень $k_3 = -1$.

Общее решение однородного уравнения $\overline{y} = C_1 + C_2x + C_3e^{-x}$ ($C_{1,2,3} = \mathrm{const}$).

Для неоднородности (полинома второй степени) $12x^2$, в которой нет ни экспоненты ($\alpha = 0$), ни тригонометрических функций ($\beta = 0$), контрольное число $\mathfrak{r} = \alpha + i\beta = 0$, и это число дважды совпадает с корнями характеристического уравнения ($s = 2$). Итак, частное решение НЛДУ

[20] Это существенно сужает сферу применимости метода Эйлера: далеко не все функции являются квазиполиномами.

[21] На механическом языке — совпадение частоты внешней вынуждающей силы с собственной частотой системы.

$\tilde{y}$ будем искать в виде полинома второй степени с неопределёнными коэффициентами, с поправкой на резонанс:

$$\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)x^2 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2.$$

Константы A, B, C найдём, подставляя данную пробную функцию в исходное НЛДУ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях получающегося равенства.

Вычислим производные:

$$\tilde{y}' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, \qquad \tilde{y}'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$
$$\tilde{y}''' = 24Ax + 6B.$$

После подстановки в НЛДУ

$$(24Ax + 6B) + (12Ax^2 + 6Bx + 2C) = 12x^2$$

приравниваем коэффициенты:

$$\begin{array}{c|lcr} x^2 & 12A & = & 12, \\ x^1 & 24A + 6B & = & 0, \\ x^0 & 6B + 2C & = & 0, \end{array}$$

откуда $A = 1$, $B = -4$, $C = 12$. Итак, частное решение НЛДУ есть $\tilde{y} = x^4 - 4x^3 + 12x^2$, а его общее решение

$$y = \overline{y} + \tilde{y} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + x^4 - 4x^3 + 12x^2.$$

Пример. Определить вид частного решения НЛДУ

$$y''' - y'' + y' - y = 1 + 4xe^x.$$

Характеристическое уравнение $k^3 - k^2 + k - 1 = (k-1)(k^2+1) = 0$ имеет корни $k_1 = 1$, $k_{2,3} = \pm i$.

В исходном уравнении неоднородность не является единым квазиполиномом (в самом деле, она включает как слагаемое с экспонентой, так и слагаемое без неё, что невозможно в одном квазиполиноме).

В соответствии с принципом суперпозиции (см. С. 43) решим отдельно два НЛДУ:

$$y''' - y'' + y' - y = 1 \quad \text{и} \quad y''' - y'' + y' - y = 4xe^x.$$

Для первого НЛДУ:	Для второго НЛДУ:
контрольное число	контрольное число
$\mathfrak{r} = \alpha + i\beta = 0 \neq k_{1,2,3}$;	$\mathfrak{r} = \alpha + i\beta = 1 = k_1$;
кратность совпадения $\mathfrak{r}$ и k:	кратность совпадения $\mathfrak{r}$ и k:
$s = 0$; степень полинома $m = 0$.	$s = 1$; степень полинома $m = 1$.
Частное решение первого НЛДУ:	Частное решение второго НЛДУ:
$\tilde{y}_1 = A$.	$\tilde{y}_2 = e^x(Bx + C)x$.

Здесь A, B, C — неопределённые коэффициенты.

Окончательно, общее решение исходного НЛДУ (если бы мы нашли A, B, C) можно было бы представить в виде:

$$y(x) = \overline{y} + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x + A + e^x(Bx^2 + Cx).$$

П р и м е р. Найти частное решение уравнения $y'' + y = \cos x + 3e^x \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0} = 0$, $y'\big|_{x=0} = 1$.

Корни характеристического уравнения $k^2+1 = 0$ суть $k_{1,2} = \pm i$, поэтому общее решение ОЛДУ $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Неоднородность снова придётся представить в виде суммы двух слагаемых: $f(x) = \cos x + 3e^x \sin x = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = 3e^x \sin x$.

Первое НЛДУ:	Второе НЛДУ:
$y'' + y = \cos x$;	$y'' + y = 3e^x \sin x$;
контрольное число для $f_1(x)$	контрольное число для $f_2(x)$
$\mathfrak{r} = i = k_1$;	$\mathfrak{r} = 1 + i \neq k_{1,2}$;
кратность совпадения $\mathfrak{r}$ и k:	кратность совпадения $\mathfrak{r}$ и k:
$s = 1$; степень полинома $m = 0$.	$s = 0$; степень полинома $m = 0$.
Частное решение первого НЛДУ:	Частное решение второго НЛДУ:
$\tilde{y}_1 = (A\cos x + B\sin x)x^1$.	$\tilde{y}_2 = e^x(C\cos x + D\sin x)$.

Итак, частное решение НЛДУ надо искать в виде

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = (A\cos x + B\sin x)x + e^x(C\cos x + D\sin x).$$

Подставляя эту функцию в исходное НЛДУ и выполняя стандартные операции, получим $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{6}{5}$, $D = \frac{3}{5}$.

Общее решение НЛДУ

$$y = \overline{y} + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \tfrac{x}{2} \sin x + e^x\Big(-\tfrac{6}{5} \cos x + \tfrac{3}{5} \sin x\Big).$$

Для отыскания констант C_1, C_2 воспользуемся начальными условиями, предварительно найдя производную

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \tfrac{1}{2} \sin x + \tfrac{x}{2} \cos x + \\ + e^x\Big(-\tfrac{6}{5} \cos x + \tfrac{3}{5} \sin x\Big) + e^x\Big(\tfrac{6}{5} \sin x + \tfrac{3}{5} \cos x\Big).$$

Тогда $y\big|_{x=0} = C_1 - \frac{6}{5} = 0$, $y'\big|_{x=0} = C_2 - \frac{6}{5} + \frac{3}{5} = 1$. Отсюда $C_1 = \frac{6}{5}$, $C_2 = \frac{8}{5}$.

Окончательно, решение задачи Коши запишется в виде

$$y = \tfrac{6}{5} \cos x + \tfrac{8}{5} \sin x + \tfrac{x}{2} \sin x + e^x\Big(-\tfrac{6}{5} \cos x + \tfrac{3}{5} \sin x\Big).$$

15. Уравнения Эйлера

(Однородным) уравнением Эйлера называется ДУ вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \tag{55}$$

где все a_i — постоянные. Характерным признаком уравнения Эйлера является совпадение степени аргумента и порядка производной искомой функции в каждом слагаемом.

Попытаемся свести это уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами.

Для этого, согласно теореме Еругина-Пейовича (С. 40), заменим независимую переменную с помощью подстановки $t = \int \sqrt[n]{C \frac{a_n}{x^n}}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|$ или $x = e^t$ (выбрали константу C так, чтобы выражение приобрело наиболее простой вид).

Пересчитаем производные в (55):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = e^{-t}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-t}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \underbrace{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}}_{=1/x=e^{-t}} = \left(-e^{-t}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + e^{-t}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right) e^{-t} = e^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

. . . . . .

$$\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k} = e^{-kt}\left(\beta_1\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \beta_2\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \ldots + \beta_k\,\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^r}\right) \quad \text{и т.д.},$$

где все $\beta_i = \mathrm{const}$.

При подстановке в уравнение (55) множители e^{-kt} сокращаются с $x^k = e^{kt}$, и остаются лишь постоянные множители a_i. Итак, интегрирование однородного уравнения Эйлера свелось к ужé известной задаче — решению ОЛДУ с постоянными коэффициентами.

Есть и другой, быстрее ведущий к цели способ решения уравнений Эйлера, а именно — степенна́я подстановка $y = x^k$. Тогда $y' = kx^{k-1}$, $y'' = k(k-1)x^{k-2}, \ldots, y^{(n)} = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)x^{k-n}$. Подставляя эти функции в (55) и сокращая на x^k, получим *характеристическое уравнение*

$$k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)+a_1k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+2)+\ldots+a_{n-1}k+a_n = 0.$$

Это уравнение должно совпасть с характеристическим уравнением для ОЛДУ с постоянными коэффициентами, полученного после преобразования исходного ДУ Эйлера первым способом, заменой $x = e^t$.

П р о с т о м у корню k характеристического уравнения соответствует частное решение e^{kt} для ОЛДУ с постоянными коэффициентами и x^k — для уравнения Эйлера.

В ы р о ж д е н н о м у корню k кратности r характеристического уравнения соответствуют r линейно независимых частных решений:

$$\begin{array}{lllll} e^{kt}, & te^{kt}, & t^2e^{kt}, & \ldots, & t^{r-1}e^{kt} \quad \text{— для ОЛДУ с const коэфф.,} \\ x^k, & x^k\ln x, & x^k\ln^2 x, & \ldots, & x^k\ln^{r-1} x \quad \text{— для ДУ Эйлера.} \end{array}$$

В ы р о ж д е н н о й комплексно сопряжённой паре корней $\alpha \pm i\beta$ кратности r соответствуют $2r$ линейно независимых частных решений;

д л я О Л Д У с п о с т о я н н ы м и к о э ф ф и ц и е н т а м и:

$$\begin{array}{lllll} e^{\alpha t}\cos\beta t, & te^{\alpha t}\cos\beta t, & t^2e^{\alpha t}\cos\beta t, & \ldots, & t^{r-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, \\ e^{\alpha t}\sin\beta t, & te^{\alpha t}\sin\beta t, & t^2e^{\alpha t}\sin\beta t, & \ldots, & t^{r-1}e^{\alpha t}\sin\beta t; \end{array}$$

д л я у р а в н е н и я Э й л е р а:

$$\begin{array}{llll} x^\alpha\cos(\beta\ln x), & x^\alpha\cos(\beta\ln x)\ln x, & x^\alpha\cos(\beta\ln x)\ln^2 x, \ldots, & x^\alpha\cos(\beta\ln x)\ln^{r-1}x, \\ x^\alpha\sin(\beta\ln x), & x^\alpha\sin(\beta\ln x)\ln x, & x^\alpha\sin(\beta\ln x)\ln^2 x, \ldots, & x^\alpha\sin(\beta\ln x)\ln^{r-1}x. \end{array}$$

П р и м е р. Решить уравнение Эйлера $x^2y'' + xy' - y = 0$.

После степенно́й подстановки $y = x^k$ получаем характеристическое уравнение $k(k-1) + k - 1 = 0$, его корни $k_1 = -1$, $k_2 = 1$. Общее решение ДУ: $y = \frac{C_1}{x} + C_2\,x$.

П р и м е р. Решить уравнение Эйлера $x^2y'' - xy' + y = 0$.

Уравнение $k(k-1)-k+1 = 0$ имеет совпадающие корни $k_{1,2} = 1$. Общее решение ДУ: $y = C_1x + C_2\,x\ln x = (C_1 + C_2\ln x)x$.

П р и м е р. Решить уравнение Эйлера $x^2y'' + xy' + y = 0$.

Уравнение $k(k-1)+k+1=0$ имеет комплексно сопряжённые корни $k_{1,2}=\pm i$. Общее решение: $y=C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x$.

Уравнение вида

$$(ax+b)^n y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(ax+b)y'+a_n y=0$$

сводится к уравнению Эйлера (55) заменой аргумента $ax+b=x_1$ [22]. Поэтому такое уравнение можно преобразовать к ОЛДУ с постоянными коэффициентами с помощью подстановки $ax+b=e^t$ или, проще, сразу сделать степенну́ю подстановку $y=(ax+b)^k$.

Пример. Решить уравнение $(2x+3)^3y'''+3(2x+3)y'-6y=0$.

Первый способ. Заменой аргумента $2x+3=x_1$ сведём уравнение к обычному уравнению Эйлера. Пересчитаем производные:

$$y'\equiv y'_x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x}=2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_1}\,,\ \ldots,\ y'''\equiv y'''_{xxx}=8\,\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x_1^3}\,.$$

Подставляя всё в исходное ДУ, получим уравнение Эйлера

$$8x_1^3y'''(x_1)+6x_1y'(x_1)-6y(x_1)=0.$$

Степенна́я подстановка $y(x_1)=x_1^k$ приводит к характеристическому уравнению $8k(k-1)(k-2)+6k-6=0$ с корнями $k_1=1/2$, $k_2=1$, $k_3=3/2$. Общее решение уравнения Эйлера: $y(x_1)=C_1x_1^{1/2}+C_2x_1+C_3x_1^{3/2}$. Возвращаясь к старому аргументу, имеем окончательный ответ

$$y(x)=C_1(2x+3)^{1/2}+C_2(2x+3)+C_3(2x+3)^{3/2}.$$

Второй способ. Сразу сделаем степенну́ю подстановку $y=(2x+3)^k$. Тогда $y'=2k(2x+3)^{k-1}$, $y''=4k(k-1)(2x+3)^{k-2}$, $y'''=8k(k-1)(k-2)(2x+3)^{k-3}$. Характеристическое уравнение примет тот же вид, что и выше. Дальнейшее очевидно.

Для решения неоднородных уравнений Эйлера

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$$

можно предложить два способа.

[22] При этом надо не забыть пересчитать все производные от старого аргумента x к новому x_1.

1. Метод вариации произвольных постоянных (С. 44). Надо лишь помнить о необходимости приведения ДУ к виду, в котором коэффициент при старшей производной равен единице (см. С. 46).

2. Иногда после рекомендованной выше замены $x = e^t$ неоднородность принимает вид квазиполинома $e^{\alpha t}\big\{P_k(x)\cos\beta t + Q_n(x)\sin\beta t\big\}$, и тогда для нахождения частного решения неоднородного уравнения разумно воспользоваться методом неопределённых коэффициентов.

Пример. Решить уравнение $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$.

Сделав подстановку $y = (x-2)^k$ в однородном уравнении Эйлера, получим характеристическое уравнение $k(k-1) - 3k + 4 = k^2 - 4k + 4 = 0$, откуда $k_{1,2} = 2$. Следовательно, замена $x_1 = x - 2 = e^t$ привела бы данное ДУ к уравнению $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 2 + e^t$ с постоянными коэффициентами [23] и неоднородностью, являющейся суммой двух квазиполиномов.

Общее решение преобразованного однородного уравнения

$$\overline{y}(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t}.$$

Частное решение преобразованного неоднородного уравнения следует искать в виде $\tilde{y}(t) = A + Be^t$ (проверить!). Подставляя эту функцию в исходное уравнение Эйлера, получим $A = \frac{1}{2}$, $B = 1$.

Общее решение преобразованного неоднородного уравнения $y(t) = \overline{y}(t) + \tilde{y}(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + \frac{1}{2} + e^t$. Вернёмся к старому аргументу $x = 2 + e^t \Leftrightarrow t = \ln(x-2)$; окончательный ответ для исходного уравнения Эйлера:

$$y(x) = C_1(x-2)^2 + C_2(x-2)^2\ln(x-2) + x - \tfrac{3}{2}.$$

16. Краевые задачи

Задача Коши (ДУ плюс начальные условия, налагаемые на искомую функцию) является лишь одной их задач, в которых отыскивается решение, подчинённое некоторым условиям. Другой важный тип таких задач представляют краевые (граничные) задачи, в которых условия, налагаемые на искомое решение, задаются не в одной (начальной) точке, как это имеет место в задаче Коши, а на концах некоторого интервала $(a,\ b)$, и требуется найти решение, определённое *внутри* этого интервала. Эти условия

[23] Левая часть уравнения написана в соответствии с видом характеристического уравнения.

называются краевыми (граничными) условиями. Краевые задачи могут ставиться, очевидно, лишь для ДУ порядка выше первого, т.к. в случае ДУ первого порядка задание значения искомой функции в одной точке уже определяет интегральную кривую единственным образом, и она может удовлетворить краевому условию в другой точке лишь случайно.

Общий вид краевых условий для интервала $(a,\ b)$ в случае ДУ второго порядка таков:

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = C; \qquad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = D, \tag{56}$$

где $\alpha_{1,2}$ и $\beta_{1,2}$ — одновременно не равные нулю заданные константы.

Для решения краевой задачи следует найти общее решение соответствующего ДУ; при подстановке решения в краевые условия возникает система уравнений для определения значений постоянных, при которых из общего решения получается решение данной краевой задачи.

Краевая задача не всегда имеет решение, а если имеет, то, возможно, не единственное.

Пример. Для уравнения

$$y'' + y = 0, \tag{57}$$

общее решение которого имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \tag{58}$$

рассмотреть три краевых задачи со следующими вариантами граничных условий:

$$y'(0) = 0, \qquad y'(1) = 1; \tag{59}$$

$$y'(0) = 0, \qquad y'(\pi) = 1; \tag{60}$$

$$y'(0) = 0, \qquad y'(\pi) = 0. \tag{61}$$

Краевая задача (57), (59) имеет единственное решение, т.к. из (58), в силу условий (59), получаем $C_1 = -\frac{1}{\sin 1}$, $C_2 = 0$; $y = -\frac{\cos x}{\sin 1}$.

Краевая задача (57), (60) не имеет решения, т.к. из (58), в силу (60), следует, что $1 = -C_1 \sin \pi = 0$, что невозможно.

Краевая задача (57), (61) имеет бесконечное множество решений вида $y = C_1 \cos x$, где C_1 — произвольная константа.

17. Собственные функции и собственные значения дифференциального оператора

Левую часть линейного ДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{62}$$

как мы знаем, можно рассматривать как результат применения линейного дифференциального оператора n-го порядка

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + p_n(x), \tag{63}$$

ставящего функции $y(x)$ в соответствие функцию $f(x)$:

$$\hat{\boldsymbol{L}}y = f. \tag{64}$$

Вообще говоря, функция-образ $f(x)$ имеет мало общего с функцией-оригиналом $y(x)$.

Исключительно важную роль в различных областях науки играет специальный случай равенства (64), при котором результат действия на функцию y оператором $\hat{\boldsymbol{L}}$ — функция f — отличается от оригинала $y(x)$ лишь постоянным множителем:

$$\hat{\boldsymbol{L}}y = \lambda y, \qquad \lambda = \mathrm{const}. \tag{65}$$

Нетривиальные $\big($т.е. не тождественно равные нулю: $y(x) \not\equiv 0\big)$ решения уравнения (65), удовлетворяющие краевым условиям (56), называются собственными функциями дифференциального оператора $\hat{\boldsymbol{L}}$, а соответствующие значения λ, при которых существуют эти нетривиальные решения, — собственными значениями $\hat{\boldsymbol{L}}$.

Заметим, что, как явствует из общего вида $\hat{\boldsymbol{L}}$ (63), собственные функции могут быть найдены лишь с точностью до произвольного постоянного множителя.

Пример. Найти собственные значения и собственные функции оператора

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,, \tag{66}$$

если краевые условия имеют вид

$$y(0) = y(\pi) = 0. \tag{67}$$

В соответствии с (65), (67) получаем краевую задачу

$$y'' = \lambda y; \quad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{68}$$

Поскольку знак константы λ, обеспечивающий нетривиальность решения краевой задачи (68), заранее неизвестен; рассмотрим все возможные случаи:

а) $\lambda > 0$. Уравнение $y'' - \lambda y = 0$ имеет общее решение $y(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Требуя, чтобы функция $y(x)$ удовлетворяла краевым условиям (67), получаем систему для определения констант C_1, C_2: $\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ y(\pi) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0. \end{cases}$ Она имеет лишь *тривиальное* (нулевое) решение $C_1 = C_2 = 0$. Поэтому $y \equiv 0$, и собственные функции при $\lambda > 0$ отсутствуют.

б) $\lambda = 0$. Решение уравнения $y'' = 0$ есть линейная функция $y(x) = C_1 x + C_2$, которая может удовлетворить краевым условиям (67), лишь будучи тождественно равной нулю: $\left.\begin{matrix} y(0) = C_2 = 0, \\ y(\pi) = C_1\pi + 0 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow y \equiv 0$. Собственных функций и в этом случае нет.

в) $\lambda < 0$. Общее решение уравнения $y'' - \lambda y = 0$ есть функция

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}x. \tag{69}$$

Подставляя (69) в краевые условия (67), получим:

$$\begin{gathered} y(0) = C_1 = 0, \\ y(\pi) = C_2 \sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0. \end{gathered} \tag{70}$$

Из (70) следует, что отличное от тождественного нуля решение задачи (68) возможно лишь в случае $\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$, т.е. $\sqrt{-\lambda}\pi = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (иначе снова $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow y \equiv 0$). Отсюда получаем совокупность (спектр) собственных значений оператора (66):

$$\lambda_k = -k^2, \quad k \in \mathbb{N} \tag{71}$$

(индекс k нумерует эти значения — их спектр оказывается д и с к р е т н ы м); подставляя (71) в (69), находим соответствующие собственным значениям собственные функции оператора $\hat{\boldsymbol{L}}$ (66): $y_k(x) = \sin kx$ (константа C_2 отброшена в силу замечания, сделанного перед данным примером).

Глава II

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Эти математические объекты обнаруживают близкое родство с функциональными рядами, что оправдывает их рассмотрение в едином учебном предмете.

О п р е д е л ё н н ы й интеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ как предел интегральных сумм может существовать (иметь определённое к о н е ч н о е значение), если
i) промежуток интегрирования $[a,\, b]$ к о н е ч е н,
ii) подынтегральная функция $f(x)$ о г р а н и ч е н а на нём.

При нарушении хотя бы одного из этих двух условий получается *несобственный* интеграл. Для определения такого интеграла требуется е щ ё о д и н предельный переход.

Точка x_0 называется *обыкновенной* для функции $f(x)$, если:
i) эта точка к о н е ч н а;
ii) предельные значения функции $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ слева и справа от x_0 к о н е ч н ы.

При нарушении хотя бы одного из этих условий x_0 называется *особой* точкой.

Если $x_0=\infty$, говорят об особой точке *первого* рода.

Если $f(x_0-0)=\infty$ или $f(x_0+0)=\infty$, то x_0 — особая точка *второго* рода.

1. Виды несобственных интегралов

Рассмотрим возможные варианты расположения особой точки в промежутке интегрирования для несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

1) **Особая точка** — в е р х н и й предел интегрирования: $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x$ [1]. Тогда несобственный интеграл понимается в смысле предела, к которому стремится определённый интеграл $\int_a^z f(x)\mathrm{d}x$, когда его верхний предел

[1] Заметим, что специальное обозначение для особой точки введено нами исключительно из методических соображений. Обычно никакой специфический символ для неё не вводится.

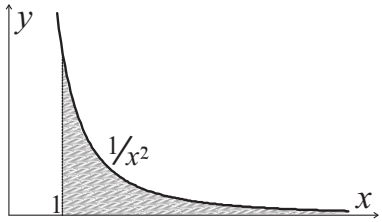


Рис. II.1. Бесконечно протяжённая фигура под кривой $y = 1/x^2$ имеет площадь, равную единице

стремится к особой точке b:

$$\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{z\to b-0} \int\limits_a^z f(x)\mathrm{d}x.$$

Если b — особая точка первого рода ($b = \infty$), то получается несобственный интеграл *первого рода* [2] $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

Соответственно, если b — особая точка второго рода, то и несобственный интеграл будет *второго рода* [3].

Если предел $\lim\limits_{z\to b-0} \int_a^z f(x)\mathrm{d}x$ существует и равен конечному числу, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x$ называется *сходящимся*; если же этот предел не существует или бесконечен, то интеграл *расходится*.

Геометрически, при неотрицательной подынтегральной функции $f(x)$, несобственный интеграл есть площадь неограниченно протяжённой в горизонтальном или вертикальном направлении криволинейной трапеции (рис. II.1).

Пример. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{\textcircled{\infty}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

$\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{z\to\infty} \int\limits_1^z \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{z\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^z \right) = \lim\limits_{z\to\infty} \left(-\frac{1}{z} + 1 \right) = 1$. Интеграл сходится. Бесконечно длинная криволинейная трапеция имеет конечную площадь! (рис. II.1).

2) **Особая точка** — нижний предел интегрирования:

$$\int\limits_{\textcircled{a}}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{z\to a+0} \int\limits_z^b f(x)\mathrm{d}x.$$

[2] Его называют также *несобственным интегралом по бесконечному промежутку.*

[3] Его называют также *несобственным интегралом от неограниченной функции.*

П р и м е р. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

$\int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{z\to+0} \int\limits_{z}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{z\to 0} \left(-\frac{1}{x}\Big|_{z}^{1} \right) = \lim\limits_{z\to 0} \left(-1+\frac{1}{z}\right) = \infty$. Интеграл р а с х о д и т с я.

3) **Особые точки** — о б а предела интегрирования: $\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

Этот случай сводится к уже́ рассмотренным введением промежуточной обыкновенной точки c, разбивающей промежуток интегрирования:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{z_1\to a+0} \int\limits_{z_1}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{z_2\to b-0} \int\limits_{c}^{z_2} f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\substack{z_1\to a+0\\ z_2\to b-0}} \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}} \int\limits_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)\mathrm{d}x. \quad (72)$$

Если о б а интеграла $\int\limits_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ и $\int\limits_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ сходятся, то сходится и исходный интеграл. Если хотя бы один из них расходится, то это означает расходимость интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

П р и м е р. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$.

Представим интеграл в виде $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$. Уже первый из этих интегралов расходится, поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{z\to-\infty} \int\limits_{z}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{z\to-\infty} (-1+\cos z)$$

— предел не существует. Поэтому расходится и весь интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$.

4) **Особая точка** c — внутри области интегрирования $[a, b]$; тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^{\textcircled{c}} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{\textcircled{c}}^b f(x)\mathrm{d}x = \\ = \lim_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{73}$$

Если сходятся оба интеграла $\int\limits_a^{\textcircled{c}} f(x)\mathrm{d}x$ и $\int\limits_{\textcircled{c}}^b f(x)\mathrm{d}x$, то сходится и исходный интеграл. Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то это означает расходимость исходного интеграла.

2. Главное значение несобственного интеграла

Иногда даже расходящемуся несобственному интегралу можно приписать определённое числовое значение.

В формулах (72), (73) переменные z_1, z_2 (ε_1, ε_2) стремятся к своим предельным значениям независимо одна от другой. Если вместо двух переменных ввести единую z (или ε), то получается согласованное стремление к предельным значениям, и два предела можно заменить одним. Тогда говорят, что несобственный интеграл понимается в смысле *главного значения*. На письме это обозначается как V.p. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ [4].

Итак, для интеграла (72) главное значение

$$\text{V.p.}\int\limits_{\textcircled{a}}^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x,$$

а для (73) —

$$\text{V.p.}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \text{V.p.}\left(\int\limits_a^{\textcircled{c}} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{\textcircled{c}}^b f(x)\mathrm{d}x\right) = \\ = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

[4] V.p. — сокращение слов *'valeur principale'*, как раз и означающих по-французски «*главное значение*».

П р и м е р. Вычислить в смысле главного значения интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$.

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, \mathrm{d}x = \lim_{z \to +\infty} \int_{-z}^{z} \underbrace{\sin x}_{\substack{\text{нечёт.} \\ \text{функция}}} \, \mathrm{d}x = 0.$$

Итак, в смысле главного значения интеграл сходится, будучи расходящимся в обычном понимании (см. выше).

П р и м е р. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$.

Интеграл — несобственный, поскольку $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} + \int\limits_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$.

Уже первый из интегралов расходится:

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \lim_{z \to -0} \int_{-1}^{z} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \lim_{z \to -0} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{-1}^{z} = \infty,$$

а потому расходится и весь интеграл.

Но в смысле главного значения интеграл сходится:

$$\text{V.p.} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{\varepsilon}^{1} \right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2}\right) = \lim_{\varepsilon \to +0} (0) = 0.$$

Не следует думать, что главное значение обязательно обеспечивает сходимость несобственного интеграла. Возможны ситуации, когда в обоих пониманиях интеграл расходится.

Р е з ю м е

1) Если несобственный интеграл сходится в обычном понимании, то он сходится и в смысле главного значения, причём результаты совпадают;

2) В смысле главного значения интеграл может сходиться и тогда, когда в обычном понимании он расходится.

Сходимость многих несобственных интегралов в теоретической физике обеспечивается именно пониманием их в смысле главного значения, хотя это явно и не оговаривается.

3. Обобщённая формула Ньютона-Лейбница

Пусть интеграл $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x$ сходится; $F(x)$ — некоторая первообразная для $f(x)$ на $[a,\, b]$. Тогда, записывая по определению $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{z\to b-0} \int\limits_a^z f(x)\mathrm{d}x$, можно для последнего интеграла воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница, выражающей о п р е д е л ё н н ы й интеграл через приращение первообразной:

$$\int_a^z f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^z = F(z) - F(a);$$

в итоге

$$\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{z\to b-0}\big(F(z) - F(a)\big) = \lim_{z\to b-0} F(z) - F(a) = F(b-0) - F(a),$$

где мы у с л о в н о обозначили предельное значение первообразной в окрестности особой точки b, как если бы точка была обыкновенной.

Получена обобщённая формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b-0) - F(a).$$

Аналогично, если особой является точка a:

$$\int\limits_{\textcircled{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a+0),$$

где введено обозначение $F(a+0) = \lim\limits_{z\to a+0} F(z)$.

П р и м е р. Рассмотрим сходимость *эталонного* интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ в зависимости от значения параметра p.

При $p \neq 1$, согласно обобщённой формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^\infty = \begin{cases} \infty & , \text{ если } -p+1>0; \\ \frac{1}{p-1} & , \text{ если } -p+1<0. \end{cases}$$

Отдельно исследуем случай $p = 1$: $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|\Big|_1^\infty = \infty$, т.е. интеграл расходится.

Окончательно,

$$\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \qquad \begin{array}{ll} -\ \text{сходится}, & \text{если } p > 1; \\ -\ \text{расходится}, & \text{если } p \le 1. \end{array} \tag{74}$$

П р и м е р. Аналогично проверяется сходимость следующих эталонных интегралов:

$$\int\limits_{\textcircled{0}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} \qquad \begin{array}{ll} -\ \text{сходится}, & \text{если } p < 1, \\ -\ \text{расходится}, & \text{если } p \ge 1; \end{array} \tag{75}$$

$$\int\limits_{\textcircled{a}}^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p} \qquad \begin{array}{ll} -\ \text{сходится}, & \text{если } p < 1, \\ -\ \text{расходится}, & \text{если } p \ge 1. \end{array} \tag{76}$$

4. Признаки сходимости несобственных интегралов

Признак сравнения

Пусть $0 \le f(x) \le g(x)$ *на* $[a,\, b)$. *Если интеграл* $\int\limits_a^{\textcircled{b}} g(x)\,\mathrm{d}x$ *сходится, то* $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$ *тоже сходится, причём* $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int\limits_a^{\textcircled{b}} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Если $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$ *расходится, то* $\int\limits_a^{\textcircled{b}} g(x)\,\mathrm{d}x$ *тем более расходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о первого утверждения. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом $\int\limits_a^z f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \Phi(z)$. Покажем, что функция $\Phi(z)$ м о н о т о н н о в о з р а с т а е т. Пусть $z_2 > z_1$. Тогда

$$\Phi(z_2) = \int\limits_a^{z_2} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_a^{z_1} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=\Phi(z_1)} + \underbrace{\int_{z_1}^{z_2} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\ge 0} \ge \Phi(z_1).$$

Покажем теперь, что $\Phi(z)$ — о г р а н и ч е н н а я функция:

$$\Phi(z) = \int_a^z f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^z g(x)\mathrm{d}x \le \underbrace{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}_{\text{сходится по усл.}} = M \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(z) \le M \quad \forall z \in [a,\, b).$$

Поскольку функция $\Phi(z)$ монотонна и ограничена, согласно теореме Вейерштрасса существует $\lim\limits_{z\to b-0} \Phi(z) = \lim\limits_{z\to b-0} \int_a^z f(x)\mathrm{d}x$, т.е. интеграл

$\overset{(b)}{\int\limits_a} f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится. Интегрируя обе части неравенства $f(x) \le g(x)$ на $[a,\, b)$, получаем указанное неравенство для интегралов.

Доказательство второго утверждения. От противного: предположим, что $\overset{(b)}{\int\limits_a} g(x)\,\mathrm{d}x$ сходится. Тогда, по первой части теоремы, интеграл $\overset{(b)}{\int\limits_a} f(x)\,\mathrm{d}x$ от меньшей функции тоже сходится, но это противоречит условию теоремы.

Пример. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ в зависимости от значения параметра p.

Вспомним, что при достаточно больших значениях аргумента $(x > M)$ логарифм уступает в росте любой степенной функции: $\ln x < x^\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Тогда $\frac{\ln x}{x^p} < \frac{x^\varepsilon}{x^p} = \frac{1}{x^{p-\varepsilon}}$, $\forall x > M$.

Исходный интеграл представим в виде суммы

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^p}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int\limits_1^M \frac{\ln x}{x^p}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\text{определённый}\\ \text{интеграл}}} + \underbrace{\int\limits_M^\infty \frac{\ln x}{x^p}\,\mathrm{d}x}_{\substack{\text{сходится}\\ \text{при } p-\varepsilon>1}}, \tag{77}$$

первое из которых есть просто число (бессмысленно говорить об его сходимости), а второе при $p > 1 + \varepsilon$ сходится по первой части доказанного признака $\big($ср. с эталонным интегралом (74)$\big)$. Поскольку число ε сколь угодно мало́, интеграл $\int_M^\infty \frac{\ln x}{x^p}\,\mathrm{d}x$, а вместе с ним и $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^p}\,\mathrm{d}x$, сходится при $p > 1$.

Было бы преждевременно делать отсюда вывод о расходимости интеграла $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ при $p \le 1$, поскольку она не следует из расходимости интеграла от большей функции.

Оценим второе слагаемое в (77) по-другому. Поскольку при $x \in (M,\, \infty)$ для подынтегральной функции справедлива оценка $\frac{\ln x}{x^p} > \frac{\ln M}{x^p}$, и интеграл $\int_M^\infty \frac{\ln M}{x^p}\,\mathrm{d}x = \ln M \int_M^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ расходится при $p \le 1$, то по второй части признака сравнения интеграл $\int_M^\infty \frac{\ln x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ тоже расходится при $p \le 1$.

Итак, интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^p}\,\mathrm{d}x \qquad \begin{array}{ll} -\ \text{сходится} & \text{при } p > 1; \\ -\ \text{расходится} & \text{при } p \le 1. \end{array}$$

Предельный признак сравнения

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — положительные функции на $(a,\,b)$; точка b является особой для интегралов $\int\limits_a^{(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int\limits_a^{(b)} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Пусть существует $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=K,\ \ 0\le K\le\infty$. Тогда:

а) если $0\le K<\infty$ и интеграл $\int\limits_a^{(b)} g(x)\,\mathrm{d}x$ сходится, то $\int\limits_a^{(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$ тоже сходится;

б) если $0<K\le\infty$ и интеграл $\int\limits_a^{(b)} g(x)\,\mathrm{d}x$ расходится, то $\int\limits_a^{(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$ тоже расходится;

в) если $0<K<\infty$, то интегралы ведут себя одинаково — оба сходятся или оба расходятся.

Доказательство. а) Запись $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=K<\infty$ означает, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\,(c,\,b)\subset(a,\,b)$ — такой, что $\forall x\in(c,\,b)$: $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|<\varepsilon$. Отсюда $f(x)<(K+\varepsilon)g(x)$ на $(c,\,b)$. По условию интеграл $\int\limits_a^{(b)} g(x)\,\mathrm{d}x$ сходится; умножение на $(K+\varepsilon)$ не влияет на сходимость. Тогда интеграл $\int\limits_c^{(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится по первой части признака сравнения. Поскольку $\int\limits_a^{(b)} f(x)\,\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_a^{c} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{число}}+\int\limits_c^{(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$, исходный интеграл $\int\limits_a^{(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$ тоже сходится.

б) Поскольку $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=K>0$, то $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{K}<\infty$.

От противного: предположим, что интеграл $\int\limits_c^{(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$ сходится; тогда, по 1-й части настоящей теоремы, интеграл $\int\limits_a^{(b)} g(x)\,\mathrm{d}x$ тоже должен сходиться, что противоречит условию второй части теоремы.

в) Это утверждение следует из (а) и (б).

Пример. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{(1)}\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)+3\sqrt[3]{1-x^2}+5\sqrt[5]{1-x^2}}$.

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$f(x) = \frac{1}{\underbrace{(1-x^2)^{1/5}}_{\substack{(1-x)^{1/5} \to 0 \\ \text{при } x \to 1}} \underbrace{\left[5 + 3(1-x^2)^{2/15} + (1-x^2)^{4/5}\right]}_{\substack{(1+x)^{1/5} \to \sqrt[5]{2} \\ \text{при } x \to 1}}} = \frac{1}{(1-x)^{1/5}}\,\varphi(x),$$

$\to 5$ при $x \to 1$

причём функция $\varphi(x)$ стремится к отличной от нуля константе при $x \to 1$.

Итак, особенность $f(x)$ в окрестности $x = 1$ обязана своим происхождением множителю $(1-x)^{1/5}$, стремящемуся к нулю при $x \to 1$. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = \frac{1}{(1-x)^{1/5}}$, берущую на себя эту особенность. Поскольку

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{5\sqrt[5]{2}} = \text{const} \ \left(\begin{smallmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{smallmatrix}\right),$$

интегралы $\int\limits_0^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int\limits_0^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$ ведут себя одинаково. Но интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^{1/5}}$ сходится (см. (76)), поэтому сходится и исходный интеграл.

Признак абсолютной сходимости

Пусть интеграл $\int\limits_a^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ *сходится. Тогда интеграл* $\int\limits_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ *тоже сходится и называется абсолютно сходящимся.*

Замечание. Обратная теорема неверна. Интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ называется *условно сходящимся*, если сам он сходится, но интеграл $\int\limits_a^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ расходится.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательные функции (рис. II.2).

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$0 \leq f_1(x) \leq |f(x)|; \qquad 0 \leq f_2(x) \leq |f(x)|; \qquad f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

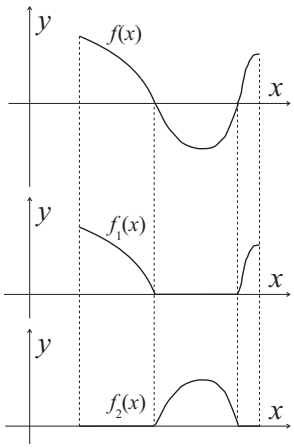


Рис. II.2. К доказательству признака абсолютной сходимости

По условию интеграл $\int\limits_a^{\textcircled{b}} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ сходится. Тогда, по признаку сравнения, сходится каждый из интегралов $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f_1(x)\,\mathrm{d}x$ и $\int\limits_a^{\textcircled{b}} f_2(x)\,\mathrm{d}x$.

Поэтому интеграл $\displaystyle\int\limits_a^{\textcircled{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{\textcircled{b}} f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^{\textcircled{b}} f_2(x)\,\mathrm{d}x$ тоже сходится.

П р и м е р. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Оценим подынтегральную функцию: $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$. Поскольку интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ сходится, по признаку сравнения сходится и $\int\limits_1^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x$. Тогда исходный интеграл с х о д и т с я а б с о л ю т н о.

П р и м е р. Показать, что интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ с х о д и т с я у с л о в н о.

Итак, надо показать, что сам интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ сходится, а интеграл $\int\limits_1^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x$ расходится.

Преобразуем интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ по формуле интегрирования по частям:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l|l} \frac{1}{x} = u & \mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ \sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v & v = -\cos x \end{array}\right] = \underbrace{-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{\infty}}_{=\cos 1} - \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x}_{\text{сходится}}.$$

Итак, исходный интеграл с х о д и т с я.

Продемонстрируем расходимость интеграла от модуля. Поскольку $|\sin x| \le 1$, справедлива оценка:

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \ge \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}}_{\text{расх.}} - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x}_{\text{сход.}}\right)$$

(сходимость последнего интеграла доказывается так же, как сходимость $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$).

Итак, интеграл $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$ б о л ь ш е расходящегося, следовательно, по признаку сравнения он и сам расходится.

5. Гамма-функция Эйлера

Рассмотрим одну из важнейших специальных функций, часто встречающуюся в различных приложениях.

Гамма-функцией $\Gamma(p)$ называется функция, определяемая посредством несобственного интеграла

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \mathrm{d}x. \tag{78}$$

Особыми точками для него являются $x = \infty$ и $x = 0$ (последняя — при $p < 1$).

Найдём область определения $\Gamma(p)$, т.е. те значения p, при которых интеграл (78) сходится. Для этого представим интеграл как сумму двух слагаемых:

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} \mathrm{d}x}_{=\mathcal{I}_1} + \underbrace{\int_1^\infty x^{p-1} e^{-x} \mathrm{d}x}_{=\mathcal{I}_2}.$$

При $p < 1$ интеграл $\mathcal{I}_1$ — несобственный: $\mathcal{I}_1 = \int\limits_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{x^{1-p}}\,\mathrm{d}x$. Исследуем его сходимость по предельному признаку, сравнивая подынтегральную функцию $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^{1-p}}$ с функцией $g(x) = \frac{1}{x^{1-p}}$. В пределе в окрестности особой точки: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Поскольку $\int\limits_{0}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$ сходится при $1 - p < 1 \Leftrightarrow p > 0$ (см. (75)), то при тех же значениях p сходится и $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Сходимость интеграла $\mathcal{I}_2 = \int\limits_1^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x}\,\mathrm{d}x$ тоже исследуем с помощью признака сравнения: пусть $\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{e^x}$, $\psi(x) = \frac{1}{x^2}$; тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(p+1)x^p}{e^x} \overset{\text{Лопиталь}}{=} \ldots = 0.$$

Поэтому при достаточно больших значениях аргумента $(x > M)$ $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} < 1$, т.е. $\varphi(x) < \psi(x)$ $\forall p$. Интеграл $\int\limits_M^\infty \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_M^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ сходится, следовательно, по признаку сравнения, $\int\limits_M^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ тоже сходится, а вместе с ним сходится и исходный интеграл $\int\limits_1^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^M \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_M^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, причём сходимость имеет место при л ю б о м значении p.

Итак, $\mathcal{I}_1$ сходится при $p > 0$, а $\mathcal{I}_2$ — всюду. Окончательно, область определения гамма-функции: $p > 0$.

Интеграл (78) неберущийся, т.е. не выражается через элементарные функции, но это не служит препятствием к изучению свойств гамма-функции.

Свойства гамма-функции

1) Ф о р м у л а п р и в е д е н и я

Вычислим с помощью интегрирования по частям значение Г-функции

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^\infty \underbrace{x^p}_{=u}\,\underbrace{e^{-x}\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}v} =$$

$$= \underbrace{-x^p e^{-x}\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty e^{-x} p\, x^{p-1}\mathrm{d}x = p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\mathrm{d}x = p\,\Gamma(p).$$

Итак, получили рекуррентную формулу:

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p). \tag{79}$$

Любое н е ц е л о е число p можно представить в виде $p = n + \alpha$, где $n = [p]$ — ц е л а я часть, а $\alpha = \{p\}$ — д р о б н а я часть $(0 < \alpha < 1)$

числа p. Тогда на основании (79):

$$\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1) = (p-1)(p-2)\,\Gamma(p-2) = \ldots = \\ = (p-1)(p-2)\ldots(p-n)\,\underbrace{\Gamma(p-n)}_{=\Gamma(\alpha)},$$

причём значения $\Gamma(\alpha)$ табулированы.

Если $p = n \in \mathbb{N}$, последовательное применение формулы (79) даёт

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\ \Gamma(1),$$

а поскольку $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = 1$, получаем: $\Gamma(n) = (n-1)!$ или

$$n! = \Gamma(n+1). \tag{80}$$

Таким образом, гамма-функцию Эйлера можно рассматривать как о б о б щ е н и е понятия факториала. Если последний определён лишь для натуральных значений аргумента, то гамма-функция существует и при дробных и отрицательных p (см. ниже).

2) В е р т и к а л ь н ы е а с и м п т о т ы $\Gamma(p)$

Из (79) получаем

$$\Gamma(p) = \tfrac{\Gamma(p+1)}{p}\,; \tag{81}$$

при $p \to +0$: $\Gamma(p) \to +\infty$, т.е. $\Gamma(0) = \lim\limits_{p\to+0}\Gamma(p) = +\infty$.

При $p = -n$, где $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(-n) = \tfrac{\Gamma(-n+1)}{-n} = \tfrac{\Gamma(-n+2)}{-n(-n+1)} = \tfrac{\Gamma(-n+3)}{-n(-n+1)(-n+2)} = \ldots = (-1)^n\,\tfrac{\Gamma(0)}{n!} = \infty.$$

Итак, при $p = 0, -1, -2, \ldots$ гамма-функция обращается в бесконечность (рис. II.3).

3) Ф о р м у л а д о п о л н е н и я

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin\pi p} \qquad (0 < p < 1). \tag{82}$$

П р и м е р. Если в формуле (82) положить $p = \frac{1}{2}$, то получим

$$\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2 = \tfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi \quad \text{или} \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

П р и м е р. Вычислить интеграл Пуассона $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

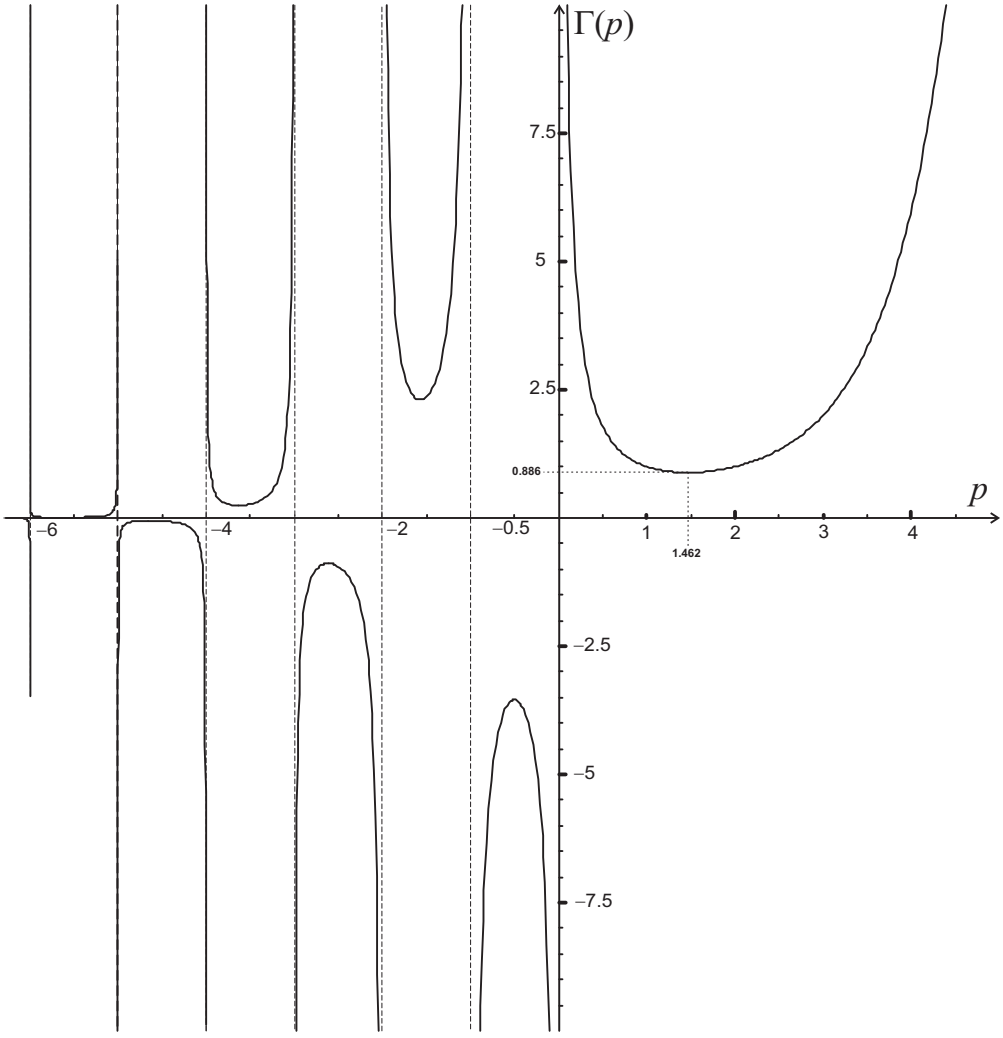


Рис. II.3. Гамма-функция Эйлера

Сделаем замену $x^2 = t$, тогда $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$, и получаем

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty t^{1/2-1}\,e^{-t}\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(по результату предыдущего примера).

П р и м е р. Вычислить $\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right)$.

По формуле (81) вычисляем:

$$\Gamma\left(-\tfrac{9}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{9}{2}+1\right)}{-\frac{9}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)}{-\frac{9}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{2}+1\right)}{-\frac{9}{2}\left(-\frac{7}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{9}{2}\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{9}{2}\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{9}{2}\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{2^5\sqrt{\pi}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} = -\frac{32\sqrt{\pi}}{945}.$$

Глава III

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

1. Определённые интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция двух переменных $f(x,\,y)$ определена в прямоугольнике $\Pi\,:\,\left\{\begin{smallmatrix} a\le x\le b,\\ c\le y\le d\end{smallmatrix}\right.$ (рис. III.1). Если взять определённый интеграл по одной из переменных, то интеграл будет функцией от оставшейся переменной: $\int\limits_a^b f(x,\,y)\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}(y),\;\; y\in[c,\,d]$.

Он называется (определённым) интегралом, зависящим от параметра y.

Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра

Пусть функция $f(x,\,y)$ непрерывна в прямоугольнике Π. Тогда интеграл $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^b f(x,\,y)\,\mathrm{d}x$ есть функция, непрерывная на $[c,\,d]$.

Б е з д о к а з а т е л ь с т в а [1].

С л е д с т в и е. Пусть функция $f(x,\,y)$ непрерывна в прямоугольнике Π. Тогда $\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^b f(x,\,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim\limits_{y\to y_0} f(x,\,y)\mathrm{d}x$.

Действительно,

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,\,y)\mathrm{d}x = \lim_{y\to y_0}\mathcal{I}(y) \overset{\substack{\mathcal{I}(y)\\ \text{непр.}}}{=} \mathcal{I}(y_0) = \int_a^b f(x,\,y_0)\,\mathrm{d}x \overset{\substack{f(x,y)\\ \text{непр.}}}{=} \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,\,y)\mathrm{d}x.$$

(Первая) теорема о дифференцировании интеграла по параметру

[1] Доказательство потребовало бы использования понятия *равномерной непрерывности*, знание которого не предполагается.

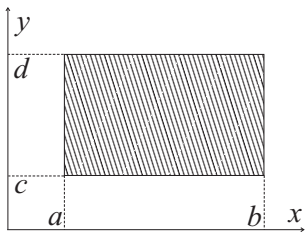


Рис. III.1. Область определения функции $f(x,\,y)$

Пусть функция $f(x,\,y)$ *и её производная* $f'_y(x,\,y)$ *непрерывны в прямоугольнике* Π. *Тогда функция* $\mathcal{I}(y) = \int\limits_a^b f(x,\,y)\,\mathrm{d}x$ *дифференцируема, и* $\frac{\mathrm{d}\mathcal{I}}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\int\limits_a^b f(x,\,y)\,\mathrm{d}x\right) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x$.

Доказательство. Приращение функции

$$\Delta\mathcal{I}(y) = \int_a^b \Big[f(x,\,y+\Delta y) - f(x,\,y)\Big]\mathrm{d}x = \int_a^b \Big[f'_y(x,\,\bar{y})\Delta y\Big]\mathrm{d}x,$$

где $\bar{y}$ лежит между y и $y+\Delta y$ (воспользовались теоремой Лагранжа). Тогда

$$\frac{\Delta\mathcal{I}(y)}{\Delta y} = \int\limits_a^b f'_y(x,\,\bar{y})\mathrm{d}x,$$

а для производной получаем

$$\mathcal{I}'_y(y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta\mathcal{I}(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\int_a^b f'_y(x,\,\bar{y})\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{\Delta y\to 0} f'_y(x,\,\bar{y})\mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b \lim_{\bar{y}\to y} f'_y(x,\,\bar{y})\mathrm{d}x = \int_a^b f'_y(x,\,y)\mathrm{d}x.$$

Пример. Вычислить интеграл $\mathcal{I} = \int\limits_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\,\mathrm{d}x \quad (a>0,\,b>0)$.

Будем считать a параметром (переменной величиной), а b — просто числом (неизменяемым), т.е. подынтегральная функция $f = f(x,\,a) = \frac{x^a - x^b}{\ln x}$, а интеграл $\mathcal{I} = \mathcal{I}(a)$.

Интеграл неберущийся, но подынтегральная функция кардинально упрощается, если продифференцировать её по параметру a: $\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} = x^a$. Итак, возникает идея воспользоваться теоремой о дифференцировании по параметру. Нужно обеспечить выполнение условий теоремы, а именно — непрерывность $f(x,\,a)$ и $f'_a(x,\,a)$. При $0<x<1$ функция $f(x,\,a)$ непрерывна; доопределим функцию на концах области интегрирования:

$$f(x,\,a) = \begin{cases} \frac{x^a - x^b}{\ln x} & ;\ 0<x<1; \\ 0 & ;\ x=0; \\ a-b & ;\ x=1. \end{cases}$$

Функция стала непрерывной [2] в з а м к н у т о й области $[0,\,1]$. Очевидно, что при $a>0$ функция $f'_a = x^a$ непрерывна всюду.

По указанной теореме

$$\mathcal{I}'_a(a) = \int\limits_0^1 f'_a \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x^a \mathrm{d}x = \tfrac{x^{a+1}}{a+1}\Big|_0^1 = \tfrac{1}{a+1}\,.$$

Поскольку $\mathcal{I}'_a = \frac{1}{a+1}$, сам интеграл $\mathcal{I}(a) = \int \mathcal{I}'_a\,\mathrm{d}a = \ln(a+1)+C$. Как найти константу интегрирования? Очевидно, что $\mathcal{I}\Big|_{a=b} = \int\limits_0^1 \frac{x^b-x^b}{\ln x}\,\mathrm{d}x = 0$. Отсюда $\mathcal{I}(b) = \ln(b+1)+C = 0 \;\Rightarrow\; C = -\ln(b+1)$.

Окончательно, $\mathcal{I} = \ln(a+1) - \ln(b+1) = \ln\frac{a+1}{b+1}\,.$

До сих пор пределы интегрирования в интеграле с параметром полагались п о с т о я н н ы м и. Рассмотрим теперь более общий случай, когда эти пределы сами являются ф у н к ц и я м и от параметра: $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,\,y)\mathrm{d}x$.

(Вторая) теорема о дифференцировании интеграла по параметру

Пусть функции $f(x,\,y)$ и $f'_y(x,\,y)$ непрерывны в прямоугольнике $\Pi:\ \begin{cases} a\le x\le b, \\ c\le y\le d \end{cases}$, *а функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ — дифференцируемы на $[c,\,d]$. Тогда интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,\,y)\mathrm{d}x = \mathcal{I}(y)$ является функцией, дифференцируемой на $[c,\,d]$, причём*

$$\mathcal{I}'_y = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,\,y)\mathrm{d}x + f\big(\psi(y),\,y\big)\,\psi'(y) - f\big(\varphi(y),\,y\big)\,\varphi'(y). \qquad (83)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\int\limits_u^v f(x,\,y)\mathrm{d}x = F(y,\,u,\,v)$, где $u=\varphi(y)$, $v=\psi(y)$.

Полная производная $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$. Но, по предыдущей теореме, $\frac{\partial F}{\partial y} = \int\limits_u^v f'_y(x,\,y)\mathrm{d}x$; $\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u,\,y)$, $\frac{\partial F}{\partial v} = f(v,\,y)$ [3], что и доказывает теорему.

П р и м е р. Для интеграла $\mathcal{I}(y) = \int\limits_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ найти производную по параметру $\mathcal{I}'_y$.

---

[2] Покажите, что теперь $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

[3] Производная от интеграла с переменным пределом интегрирования по этому пределу.

Согласно формуле (83)

$$\mathcal{I}'_y = \int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2}\, e^{y\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + e^{y\sqrt{1-\cos^2 y}}(-\sin y) - e^{y\sqrt{1-\sin^2 y}}\cos y =$$

$$= \int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2}\, e^{y\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x - e^{y|\sin y|}\sin y - e^{y|\cos y|}\cos y.$$

Теорема об интегрировании интеграла по параметру

Пусть функция $f(x,\,y)$ *непрерывна в прямоугольнике* $\Pi : \left\{ \begin{smallmatrix} a \le x \le b, \\ c \le y \le d \end{smallmatrix} \right.$, *интеграл* $\mathcal{I}(y) = \int_a^b f(x,\,y)\mathrm{d}x$. *Тогда*

$$\int_c^d \mathcal{I}(y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,\,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,\,y)\mathrm{d}y. \tag{84}$$

Доказательство. Заменим постоянный предел интегрирования d переменным z и покажем сначала справедливость равенства

$$\underbrace{\int_c^z \mathrm{d}y \overbrace{\int_a^b f(x,\,y)\mathrm{d}x}^{=\mathcal{I}(y)}}_{\text{обозначим как } F(z)} = \underbrace{\int_a^b \mathrm{d}x \overbrace{\int_c^z f(x,\,y)\mathrm{d}y}^{\text{обозначим как } \varphi(x,\,z)}}_{\text{обозначим как } \Phi(z)}.$$

Итак, надо показать, что

$$F(z) = \Phi(z). \tag{85}$$

Найдём производные от обеих функций:

$$F'(z) = \left(\int_c^z \mathcal{I}(y)\mathrm{d}y\right)'_z = \mathcal{I}(z),$$

$$\Phi'(z) = \left(\int_a^b \varphi(x,\,z)\mathrm{d}x\right)'_z = \int_a^b \varphi'_z(x,\,z)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x,\,z)\mathrm{d}x = \mathcal{I}(z).$$

Итак, производные совпали, поэтому сами функции $F(z)$ и $\Phi(z)$ могут отличаться лишь постоянным слагаемым: $F(z) = \Phi(z) + C$. Полагая $z = c$, имеем: $\underbrace{F(c)}_{=0} = \underbrace{\Phi(c)}_{=0} + C \;\Rightarrow\; C = 0$. Мы доказали, что $F(z) = \Phi(z)$. Подстановка $z = d$ в (85) доказывает формулу (84).

Пример. Вычислить интеграл $\mathcal{I} = \int\limits_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0,\, b > 0)$.

Интеграл уже был вычислен ранее (С. 74) на основе теоремы о дифференцировании по параметру. Применим здесь теорему об интегрировании по параметру.

Можно трактовать подынтегральную функцию $\frac{x^a-x^b}{\ln x}$ как приращение некоторой другой функции: $\frac{x^a-x^b}{\ln x} = \left.\frac{x^y}{\ln x}\right|_{y=b}^{y=a}$, производная по y от которой есть x^y. Обозначим последнюю функцию как $f(x,\,y)$. Очевидно, что она непрерывна в замкнутом прямоугольнике $\Pi : \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \le x \le 1, \\ a \le y \le b. \end{smallmatrix} \right.$ Тогда

$$\int_0^1 \frac{x^a-x^b}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left.\frac{x^y}{\ln x}\right|_{y=b}^{y=a}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_b^a x^y\mathrm{d}y = \int_b^a \mathrm{d}y \int_0^1 x^y\mathrm{d}x =$$

$$= \int_b^a \left(\left.\frac{x^{y+1}}{y+1}\right|_{x=0}^{x=1} \right) \mathrm{d}y = \int_b^a \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y = \ln(y+1)\Big|_b^a = \ln\frac{a+1}{b+1}\,.$$

Ответ, естественно, совпадает с полученным ранее.

2. Равномерная сходимость несобственных интегралов с параметром

Рассмотрим теперь интеграл вида $\int\limits_a^\infty f(x,\,y)\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}(y)$, $y \in [c,\,d]$, являющийся и несобственным, и зависящим от параметра y. Бесконечность в пределе интегрирования понимается обычным образом:

$$\mathcal{I}(y) = \int_a^\infty f(x,\,y)\,\mathrm{d}x = \lim_{z\to\infty} \underbrace{\int_a^z f(x,\,y)\mathrm{d}x}_{=F(y,\,z)} = \lim_{z\to\infty} F(y,\,z).$$

Для дальнейшего нам потребуется особый тип сходимости функции двух переменных $F(y,\,z)$ к $\mathcal{I}(y)$, а именно *равномерная* сходимость. Сопоставим определения «просто» сходимости и равномерной сходимости.

Функция $f(x,\,y)$ сходится [4] к $g(x)$ при $y \to y_0$ и фиксированном x, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon,\,x) > 0$ — такая, что для всех y, попадающих в выколотую δ-окрестность предельной точки y_0: $\forall y \in \overset{\circ}{S}_\delta\,(y_0)$, выполняется: $\big|f(x,\,y) - g(x)\big| < \varepsilon$ для данного (фиксированного) x.

Функция $f(x,\,y)$ *равномерно* сходится [5] к $g(x)$ при $y \to y_0$ и сразу для всех x из некоторого множества X, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ — такая, что для всех y, попадающих в δ-окрестность предельной точки y_0: $\forall y \in S_\delta(y_0)$, выполняется: $\big|f(x,\,y) - g(x)\big| < \varepsilon$ сразу для всех $x \in X$.

Итак, в случае «просто» сходимости каждому значению x соответствует индивидуальная, только к нему относящаяся оценка для $\delta = \delta(\varepsilon,\,x)$,

[4] Обозначение сходимости традиционно: $f(x,\,y) \to g(x)$.

[5] Будем обозначать равномерную сходимость символом: $f(x,\,y) \rightrightarrows g(x)$.

тогда как при равномерной сходимости р а з н ы е значения x приводят к о д н о й и т о й ж е оценке для δ, так что удаётся обойтись о д н и м значением $\delta = \delta(\varepsilon)$ для в с е г о м н о ж е с т в а X.

П р и м е р. Очевидно, что функция $f(x,\, y) = \frac{x}{1+x^2y^2}$ при $y \to \infty$ сходится к функции $g(x) \equiv 0$. Выяснить характер сходимости.

Для оценки величины $\big|f(x,\, y) - g(x)\big|$ воспользуемся неравенством

$$1 + x^2y^2 \geq 2xy,$$

которое следует из неравенства $0 \leq (1 - xy)^2 = 1 - 2xy + x^2y^2$:

$$\big|f(x,\, y) - g(x)\big| = \left|\tfrac{x}{1+x^2y^2} - 0\right| \leq \left|\tfrac{x}{2xy}\right| = \left|\tfrac{1}{2y}\right| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство выполняется при $|y| > \frac{1}{2\varepsilon}$, так что в качестве оценки для δ можно взять $\delta = \frac{1}{2\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$ — как видим, оценка е д и н а для всех $x \in (-\infty,\, \infty)$. Итак, имеет место р а в н о м е р н а я сходимость.

П р и м е р. Рассмотрим функцию $f(x,\, y) = \frac{xy}{1+x^2y^2}$. Очевидно, что $f(0,\, y) = 0$, а для $x \neq 0$ имеем $f(x,\, y) \xrightarrow{y\to\infty} g(x) \equiv 0$. Итак, $\forall x \in [0,\, b]$ получаем $f(x,\, y) \to g(x)$, причём $b > 0$ — любое конечное число. Выяснить характер сходимости.

а) Отступим от левого конца отрезка вглубь; пусть $x \in [a,\, b]$, где a — сколь угодно малая положительная константа. Тогда

$$\big|f(x,\, y) - g(x)\big| = \left|\tfrac{xy}{1+x^2y^2} - 0\right| \leq \left|\tfrac{xy}{x^2y^2}\right| = \tfrac{1}{|xy|} \leq \tfrac{1}{a|y|} < \varepsilon. \tag{86}$$

Последнее неравенство выполняется при $|y| > \frac{1}{a\varepsilon}$, и в качестве оценки для δ можно взять $\delta = \frac{1}{a\varepsilon} = \delta(\varepsilon)$. Опять, как и в предыдущем примере, д л я в с е х $x \in [a,\, b]$ и $\forall y \in S_\delta(y_0) = S_\delta(\infty)$, т.е. $|y| > \delta$ получилась е д и н а я оценка $\delta \neq \delta(x)$. Имеет место р а в н о м е р н а я сходимость $f(x,\, y)$ к $g(x)$ $\forall x \in [a,\, b]$.

б) Пусть теперь $a \to 0$; покажем, что на в с ё м отрезке $[0,\, b]$ сходимость $f(x,\, y)$ к $g(x)$ н е р а в н о м е р н а.

Во-первых, если воспользоваться оценкой (86), то при $a \to 0$ $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{a\varepsilon} \to \infty$, и к о н е ч н ы х значений y, которые попадали бы в δ-окрестность точки $y_0 = \infty$, н е с у щ е с т в у е т. Не выполнено даже

определение «просто» сходимости [6], не говоря уже о равномерной сходимости. Разумеется, вывод об отсутствии «просто» сходимости в окрестности нуля слишком скоропалителен, т.к. при $a \approx 0$ оценка (86) непригодна. Но уже эти рассуждения показывают, что при значениях x, близких к нулю, со сходимостью $f(x,\, y)$ к $g(x)$ «происходит что-то неладное».

Другой вариант рассуждений: значения $x \approx 0$ автоматически получаются при $y \to \infty$ и добавочном условии $xy = 1$. Но тогда $\big|f(x,\, y) - g(x)\big| = \left|\frac{xy}{1+x^2y^2}\right| = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, а это не есть сколь угодно малое число. Таким образом, интересующий нас модуль разности отнюдь не меньше наперёд заданного бесконечно малого ε.

Окончательный вывод: функция $f(x,\, y)$ сходится равномерно к $g(x) \equiv 0$ на $[a,\, b]$, где a — сколь угодно малое положительное число, но на всём отрезке $[0,\, b]$ сходимость становится неравномерной.

Вернёмся к несобственным интегралам, зависящим от параметра.

Итак, несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,\, y)\mathrm{d}x = \mathcal{I}(y)$ понимается в смысле $\lim\limits_{z\to\infty} \underbrace{\int\limits_a^z f(x,\, y)\mathrm{d}x}_{F(y,\,z)} = \lim\limits_{z\to\infty} F(y,\, z)$.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,\, y)\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно для $y \in [c,\, d]$, если функция $F(y,\, z)$ равномерно сходится к $\mathcal{I}(y)$ при $z \to \infty$, $y \in [c,\, d]$, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$ — такая, что $\forall z > \delta(\varepsilon)$, $\forall y \in [c,\, d]$ выполняется:

$$\big|\mathcal{I}(y) - F(y,\, z)\big| = \left|\int_a^\infty f(x,\, y)\mathrm{d}x - \int_a^z f(x,\, y)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_z^\infty f(x,\, y)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon. \quad (87)$$

Пример. Исследовать характер сходимости несобственного интеграла $\mathcal{I}(y) = \int\limits_0^\infty y\, e^{-xy}\mathrm{d}x$ при $y \in [0,\, \infty)$.

Отступим сначала от левой границы интервала вглубь: пусть $y \in [a,\, \infty)$, $a > 0$. В соответствии с определением оценим следующий интеграл:

$$\left|\int_z^\infty y\, e^{-xy}\mathrm{d}x\right| = \left|-e^{-xy}\Big|_z^\infty\right| = e^{-zy} \le e^{-za} < \varepsilon$$

[6] Конкретно — условие "$\forall y \in S_\delta(y_0)$".

при $z > \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{a}$ и сразу для всех $y \geq a > 0$. Итак, интеграл $\int\limits_0^\infty y\, e^{-xy}\mathrm{d}x$ сходится равномерно при $y \in [a,\, \infty)$.

Если теперь устремить a к нулю, то полученная оценка для z становится бессмысленной ($z > \infty$), поэтому данный способ исследования характера сходимости в области $y \approx 0$ непригоден.

С другой стороны, из (87) следует, что равномерная сходимость предполагает наперёд заданную малость интеграла $\int\limits_z^\infty f(x,\, y)\mathrm{d}x$ для достаточно больших z при любых y из рассматриваемой области (в нашем случае это $[0,\, \infty)$). Но $\max\limits_{y\in[0,\,\infty)} \left|\int\limits_z^\infty f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\right| = \max\limits_{y\in[0,\,\infty)} e^{-zy} = e^0 = 1$, т.е. этот интеграл оказался не сколь угодно малым! Итак, на всей неотрицательной полуоси $y \geq 0$ исходный интеграл сходится неравномерно.

3. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов с параметром

Как видно из предыдущих примеров, проверка равномерности сходимости на основе определения трудоёмка. Приведём два достаточных признака равномерной сходимости, иногда облегчающие исследование.

Признак Вейерштрасса

Пусть $|f(x,\, y)| \leq \varphi(x)$ при $x \geq a$, $\forall y \in [c,\, d]$, и несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x$ от мажоранты $\varphi(x)$ сходится.

Тогда интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,\, y)\mathrm{d}x$ сходится равномерно для $y \in [c,\, d]$.

Доказательство. По условию сходится интеграл

$$\int\limits_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{z\to\infty}\int\limits_a^z \varphi(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \left|\int\limits_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x - \int\limits_a^z \varphi(x)\mathrm{d}x\right| = \int\limits_z^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x < \varepsilon\ ^7.$$

Полученное неравенство применим для нижеследующей оценки:

$$\left|\int_z^\infty f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_z^\infty \left|f(x,\, y)\right|\mathrm{d}x \leq \int_z^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon,$$

причём оценка действует $\forall y \in [c,\, d]$. По определению доказана равномерная сходимость интеграла $\int\limits_a^\infty f(x,\, y)\,\mathrm{d}x$.

---

[7] Известное из математического анализа свойство бесконечной малости разности между переменной величиной и её пределом.

Пример. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+y^2}$ сходится равномерно $\forall y \in (-\infty, \infty)$, поскольку $\frac{1}{1+x^2+y^2} \le \frac{1}{1+x^2}$, и интеграл от мажоранты сходится: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$.

Признак Абеля

Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ *сходится, а функция* $f(x, y)$ *монотонна по* x *и равномерно ограниченна, т.е.* $|f(x, y)| \le M$ *для* $x \ge a$ *и сразу* $\forall y \in [c, d]$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)\, f(x, y)\,\mathrm{d}x$ *сходится равномерно для* $y \in [c, d]$.

Без доказательства.

Пример. Показать, что интеграл $\int_0^{\infty} e^{-xy}\,\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно при $y \ge 0$.

Пусть $f(x, y) = e^{-xy}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Очевидно, что функция $f(x, y)$ при фиксированном y монотонно убывает по x. Кроме того, она равномерно ограниченна, т.к. $\left|e^{-xy}\right| \le 1$ при $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Интеграл $\int\limits_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ сходится (см. С. 68).

По признаку Абеля исходный интеграл сходится равномерно при неотрицательных y.

4. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

Введение нетривиального, трудно проверяемого свойства равномерной сходимости окупается замечательными возможностями, открывающимися, если несобственный интеграл, зависящий от параметра, равномерно сходится. Приведём без доказательства соответствующие теоремы [8].

Теорема о непрерывности интеграла

Пусть функция $f(x, y)$ *непрерывна при* $x \ge a$, $y \in [c, d]$, *а интеграл* $\int_a^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ *сходится равномерно при* $y \in [c, d]$.

Тогда функция $\mathcal{I}(y) = \int_a^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ *непрерывна на* $[c, d]$.

Теорема о дифференцировании интеграла по параметру

Пусть: 1) функция $f(x, y)$ *и её производная* $f'_y(x, y)$ *непрерывны при* $x \ge a$, $y \in [c, d]$;

[8] Сравните их с аналогичными теоремами для определённых интегралов с параметром.

2) интеграл $\int_a^\infty f(x,\,y)\,\mathrm{d}x$ *сходится;*

3) интеграл $\int_a^\infty f'_y(x,\,y)\mathrm{d}x$ *сходится равномерно при* $y \in [c,\,d]$.

Тогда функция $\mathcal{I}(y) = \int_a^\infty f(x,\,y)\,\mathrm{d}x$ *дифференцируема на* $[c,\,d]$, *причём* $\mathcal{I}'_y = \int_a^\infty f'_y(x,\,y)\,\mathrm{d}x$ *или*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\int_a^\infty f(x,\,y)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial y} f(x,\,y)\mathrm{d}x.$$

Теорема об интегрировании интеграла по параметру

Пусть: 1) функция $f(x,\,y)$ *непрерывна при* $x \geq a$, $y \in [c,\,d]$;

2) интеграл $\int_a^\infty f(x,\,y)\,\mathrm{d}x$ *сходится равномерно при* $y \in [c,\,d]$.

Тогда

$$\int_c^d \mathcal{I}(y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^\infty f(x,\,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty \mathrm{d}x \int_c^d f(x,\,y)\,\mathrm{d}y.$$

Пример. Вычислить интегралы $\mathcal{I}_1 = \int\limits_0^\infty e^{-kx}\,\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ $(k > 0)$ и $\mathcal{I}_2 = \int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Заметим, что интегралы «неберущиеся», поэтому воспользоваться обобщённой формулой Ньютона-Лейбница (С. 63) не удастся.

Подынтегральная функция [9] $f(x,\,\alpha) = e^{-kx}\,\frac{\sin\alpha x}{x}$ в интеграле $\mathcal{I}_1$ существенно упростится, если её продифференцировать по параметру α: $f'_\alpha(x,\,\alpha) = e^{-kx}\,\frac{\cos\alpha x}{\cancel{x}}\,\cancel{x} = e^{-kx}\cos\alpha x$; интеграл от последней функции берётся двукратным интегрированием по частям ("возвратное интегрирование").

Проверим выполнение условий теоремы о дифференцировании интеграла по параметру.

1) Функция $f(x,\,\alpha) = e^{-kx}\,\frac{\sin\alpha x}{x}$ непрерывна всюду, где она определена, т.е. при $x \neq 0$. Доопределим функцию в нуле так, чтобы и там она стала непрерывной: $f(0,\,\alpha) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,\,\alpha)$. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} f(x,\,\alpha) = \alpha$, получим: $f(x,\,\alpha) = \begin{cases} e^{-kx}\,\frac{\sin\alpha x}{x}; & x\neq 0, \\ \alpha; & x=0. \end{cases}$ Подынтегральная функция стала непрерывной всюду, в том числе и на промежутке интегрирования $x \geq 0$.

1′) Производная $f'_\alpha(x,\,\alpha) = e^{-kx}\cos\alpha x$ непрерывна всюду.

[9] Мы считаем параметром только α, поскольку именно относительно неё далее выполняются манипуляции; k для нас — «просто» число.

2) Докажем, что интеграл $\int_0^\infty f(x,\,\alpha)\,\mathrm{d}x$ сходится. Оценим подынтегральную функцию: при $x \geq 0$

$$\left|f(x,\,\alpha)\right| = \left|e^{-kx}\,\frac{\sin\alpha x}{x}\right| \leq e^{-kx}\,\frac{|\alpha x|}{x} = |\alpha|e^{-kx}.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\mathrm{d}x = \frac{e^{-kx}}{-k}\Big|_0^\infty = \frac{1}{k}$ сходится [10], интересующий нас интеграл сходится даже абсолютно.

3) Докажем, что интеграл от производной по параметру $\int_0^\infty f'_\alpha(x,\,\alpha)\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно $\forall\alpha \in \mathbb{R}$. Поскольку

$$\left|f'_\alpha(x,\,\alpha)\right| = \left|e^{-kx}\cos\alpha x\right| \leq e^{-kx},$$

функция e^{-kx} выступает в качестве мажоранты (причём независящей от параметра α) для f'_α. Интеграл от мажоранты $\int\limits_0^\infty e^{-kx}\mathrm{d}x$ сходится, поэтому по признаку Вейерштрасса интеграл $\int_0^\infty f'_\alpha(x,\,\alpha)\mathrm{d}x$ сходится равномерно.

Итак, мы имеем право дифференцировать $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1(\alpha)$ по параметру α! Производная $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\mathcal{I}_1 = \int\limits_0^\infty e^{-kx}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x = \frac{k}{k^2+\alpha^2}$; тогда

$$\mathcal{I}_1(\alpha) = \int \frac{k}{k^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{k} + C.$$

Постоянную интегрирования C найдём из условия $\mathcal{I}_1\big|_{\alpha=0} = 0 \Rightarrow C = 0$. Окончательно, $\mathcal{I}_1(\alpha) = \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{k}$, $k > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Интеграл $\mathcal{I}_2(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ можно было бы получить из только что выведенной формулы, полагая в ней $k = 0$, но, к сожалению, она сама получена в предположении $k > 0$. Если бы функция $\mathcal{I}_1$ была непрерывной по k $(k \geq 0)$, можно было бы определить $\mathcal{I}_2$ как $\lim\limits_{k\to+0}\mathcal{I}_1$ (заметим, что теперь k становится для нас не просто числом, а параметром).

Согласно первой теореме (о непрерывности интеграла от параметра) функция $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1(k)$ будет непрерывной по k, если:

1) $f(x,\,k)$ непрерывна (это уже обеспечено ранее) и

2) интеграл $\mathcal{I}_1(k) = \int\limits_0^\infty f(x,\,k)\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно по k $(k \geq 0)$.

---

[10] Напомним, что $k > 0$; это будет важно и при вычислении интеграла $\mathcal{I}_2$.

По признаку Абеля интеграл $\mathcal{I}_1(k) = \int\limits_0^\infty e^{-kx}\,\frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ сходится равномерно по k, т.к. интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ сходится, а функция e^{-kx} при фиксированном $k \geq 0$ монотонно убывает по x и, кроме того, функция равномерно ограниченна: $\left|e^{-kx}\right| \leq 1,\ \forall x > 0,\ \forall k \geq 0$ (см. С. 81).

Итак, полностью обосновано действие:

$$\mathcal{I}_2 = \lim_{k\to+0} \mathcal{I}_1 = \lim_{k\to+0} \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{k} = \left\{\begin{array}{ccl} \frac{\pi}{2} & , & \text{если } \alpha > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & , & \text{если } \alpha < 0, \\ 0 & , & \text{если } \alpha = 0 \end{array}\right\} = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha.$$

5. Задачи для самостоятельной работы по несобственным интегралам и интегралам с параметром

1. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x$; в) $\int\limits_{-1}^1 e^{1/x}\,\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$; г) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$;

д) $\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{(x^2-2)}}$; е) $\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$; ж) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,\mathrm{d}x$; з) $\int\limits_0^{\pi} x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$;

и) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+3x-10}\,\mathrm{d}x$; к) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x^2-5x+7}$; л) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$; м) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{x^3-1}$; н) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;

п) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^2}$; р) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1-x)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\,\mathrm{d}x$; с) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(4x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

2. Вычислить интегралы в смысле главного значения:

а) V.p. $\int\limits_{-1}^7 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3}$; б) V.p. $\int\limits_{1/2}^4 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$; в) V.p. $\int\limits_0^{\pi} x\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x$; г) V.p. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3-5\sin x}$;

д) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x$; е) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\operatorname{arcctg}x + \frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x$; ж) V.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{13+x}{17+x^2}\,\mathrm{d}x$;

з) V.p. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$.

3. Исследовать сходимость интегралов:

а) $\int\limits_0^8 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt[3]{x}}$; б) $\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{e^{\sin x}-1}$; в) $\int\limits_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$; г) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$;

д) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\arcsin 1/x}{1+x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; е) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^5)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$; ж) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x}$; з) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{x^3}{1+x^2}\right)^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{\sin(1/x)\,\mathrm{d}x}{x^2+x\sqrt{x}+x^2\cos(1/x)}$; б) $\int\limits_0^1 \cos\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$; в) $\int\limits_0^{1/2} \frac{\cos^3\ln x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$;

д) $\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$; е) $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \sin\left(\frac{\cos x^3}{x+1}\right)\mathrm{d}x$; ж) $\int\limits_0^1 \frac{\cos(1/x)\,\mathrm{d}x}{x^2\left(\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)^\alpha}$ (рассмотреть все значения параметра α); з) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^\alpha \sin x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ (рассмотреть все значения параметра α).

5. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{x^2+\alpha^2}\,\mathrm{d}x$; б) $\lim\limits_{\alpha\to 1} \int\limits_2^4 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^5}$; в) $\lim\limits_{\alpha\to 1} \int\limits_0^1 x^2 e^{\alpha x^3}\mathrm{d}x$;

г) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_0^\pi x\cos(1+\alpha)x\mathrm{d}x$.

6. Найти $\mathfrak{I}'(\alpha)$, если:

а) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x$; б) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha^4 x^2}\mathrm{d}x$; в) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_{\operatorname{ch}\alpha}^{\operatorname{sh}\alpha} \ln(1+x^2+\alpha^2)\mathrm{d}x$.

7. С помощью дифференцирования по параметру α вычислить интеграл $\mathfrak{I}(\alpha)$, если:

а) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x$, $|\alpha|<1$; б) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^\pi \ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$, $|\alpha|<1$; в) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,\mathrm{d}x$.

8. Исследовать на равномерную сходимость на множестве E интеграл $\mathfrak{I}(\alpha)$:

а) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\alpha^2 x}{\sqrt[3]{x^2}}\operatorname{arctg}\alpha x\,\mathrm{d}x$, $E=\{\alpha:\ |\alpha|\ge 1\}$;

б) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{4+\alpha^2x^2}$, $E=\mathbb{R}$;

в) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$, $E=\{\alpha:\ -\infty<\alpha<-1/2\}$;

г) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\cdot\operatorname{arctg}\alpha x\,\mathrm{d}x$, $E=\mathbb{R}$.

9. Доказать, что функция $\mathfrak{I}(\alpha)$ непрерывна на множестве E, если:

а) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x$, $E=\mathbb{R}$; б) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, $E=\mathbb{R}$;

в) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\sin(\alpha/x)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, $E=(0,\,1)$; г) $\mathfrak{I}(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, $E=[0,\,1)$.

10. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, $|\alpha|\le 1$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2\mathrm{d}x$, $\alpha>0$, $\beta>0$;

в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x\ \operatorname{arctg}\beta x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $\alpha>0$, $\beta>0$;

д) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$; е) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{\beta^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

ж) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin^2 \beta x\, \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, $\alpha > 0$.

11. Выразить через значения гамма-функции интегралы:

а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$; б) $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x^\beta}\mathrm{d}x$, $\alpha > -1$, $\beta > 0$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x} e^{px}\mathrm{d}x$, $p > 0$.

6. Ответы к задачам

1. а) Расходится; б) $-3/2$; в) расходится; г) $\sqrt{2\pi}$; д) $\pi/2$; е) $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}$; ж) $-(\pi \ln 2)/2$; з) $-(\pi^2 \ln 2)/2$; и) расходится; к) $2\pi/\sqrt{31}$; л) $\pi/2$; м) $\frac{\ln 7}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$; н) 0; п) $4\pi/(3\sqrt{3})$; р) $\frac{3\ln 2}{2} - \frac{\pi(3+2\sqrt{3})}{4}$; с) $\pi\sqrt{3}/9$.

2. а) $1/9$; б) $\ln 2$; в) $-\pi \ln 2$; г) $-\frac{\ln 3}{4}$; д) 0; е) π; ж) $13\pi/\sqrt{17}$; з) $-\ln 2$.

3. а) — д), з) Сходится; е), ж) — расходится.

4. а) — е) Сходится условно; ж) сходится абсолютно при $\alpha > 1$, условно при $0 < \alpha \le 1$; з) сходится абсолютно при $\alpha < 2$, условно при $2 \le \alpha < 3$.

5. а) 1; б) $\frac{1}{2}\ln 3$; в) $\frac{e-1}{3}$; г) -2.

6. а) $\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$; б) $4\alpha^3 \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} x^2 e^{\alpha^4 x^2}\mathrm{d}x + e^{\alpha^4 \sin^2\alpha}\cos\alpha + e^{\alpha^4\cos^2\alpha}\sin\alpha$;

в) $\frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) + \operatorname{ch}\alpha\cdot\ln(\operatorname{ch}^2\alpha + \alpha^2) - \operatorname{sh}\alpha\cdot\ln(\operatorname{ch}^2\alpha + \alpha^2 + 1)$.

7. а) 0; б) $2\pi\arcsin\alpha$; в) $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha\cdot\ln\bigl(1+|\alpha|\bigr)$.

8. а), б), г) — Сходится равномерно; в) сходится неравномерно.

10. а) $-\arcsin^2\alpha$; б) $\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2(\alpha+\beta)}}$; в) $\frac{\pi}{2}\left(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}\right)$; г) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\beta^\beta}$; д) $\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$; е) $\frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha\beta+1)$; ж) $\beta\operatorname{arctg}\frac{2\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{4}\ln\left(1+\frac{4\beta^2}{\alpha^2}\right)$.

11. а) $\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$; б) $\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$; в) $\Gamma(p)$.

Библиографический список

[1] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.

[2] Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. М.: Высш. шк., 1967. 564 с.

[3] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. М.: Наука, 1969. 424 с.

[4] Карташёв А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташёв, Б.Л. Рождественский. М.: Наука, 1976. 256 с.

[5] Бибиков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 232 с.

[6] Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.В. Федорюк. М.: Наука, 1985. 448 с.

[7] Бугров Я.С. Высшая математика: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. М.: Наука, 1985. 464 с.

[8] Богданов Ю.С. Курс дифференциальных уравнений / Ю.С. Богданов, С.А. Мазаник, Ю.Б. Сыроид. Минск: Універсітэцкае, 1996. 288 с.

[9] Матвеев Н.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Н.М. Матвеев. СПб.: Специальная литература, 1996. 372 с.

[10] Тихонов А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. М.: Наука. ФИЗМАТЛИТ, 1998. 232 с.

[11] Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М.Л. Краснов. М.: Высш. шк., 1983. 128 с.

[12] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф. Филиппов. М.: Эдиториал УРСС, 2004, 240 с.

[13] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. М.: Наука, 1976, 576 с.

[14] Боярчук А.К. Справочное пособие по высшей математике. Т.5: Дифференциальные уравнения в примерах и задачах / А.К. Боярчук, Г.П. Головач. М.: Едиториал УРСС, 2001, 384 с.

[15] Краснов М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренко. М.: Высш. шк., 1978, 288 с.

[16] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. М.: Наука, 1973, 128 с.

[17] Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н.М. Матвеев. Минск: Вышэйшая школа, 1977, 416 с.

[18] Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. М.: Высш. шк., 1989, 384 с.

[19] Альсевич Л.А. Практикум по дифференциальным уравнениям / Л.А. Альсевич, Л.П. Черенкова. Минск: Вышэйшая школа, 1990, 320 с.

[20] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2 / В.И. Смирнов. М.: Наука, 1965, 656 с.

[21] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.II / Г.М. Фихтенгольц. М.: Наука, 1969, 800 с.

[22] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, Т.1 / Л.Д. Кудрявцев. М.: Высш. шк., 1988, 712 с.

[23] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, Т.2 / Л.Д. Кудрявцев. М.: Высш. шк., 1988, 576 с.

[24] Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, В.И. Шабунин. М.: Наука, 1986, 528 с.

[25] Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, В.И. Шабунин. СПб.: ИЧП «Кристалл», 1994, 496 с.

[26] Сборник задач по математике для втузов, Т.1: Линейная алгебра и основы математического анализа / А.В. Ефимов, Б.П. Демидович (ред.). М.: Наука, 1981, 464 с.

[27] Сборник задач по математике для втузов, Т.2: Специальные разделы математического анализа / А.В. Ефимов, Б.П. Демидович (ред.). М.: Наука, 1981, 368 с.

[28] Ляшко И.И. Справочное пособие по высшей математике. Т.1: Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. М.: Едиториал УРСС, 2001, 360 с.

[29] Ляшко И.И. Справочное пособие по высшей математике. Т.3: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. М.: Едиториал УРСС, 2001, 224 с.

Оглавление

Учебник

ЗЕНКОВ Андрей Вячеславович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ,
НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ,
и
ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Редактор *Н.В. Рощина*

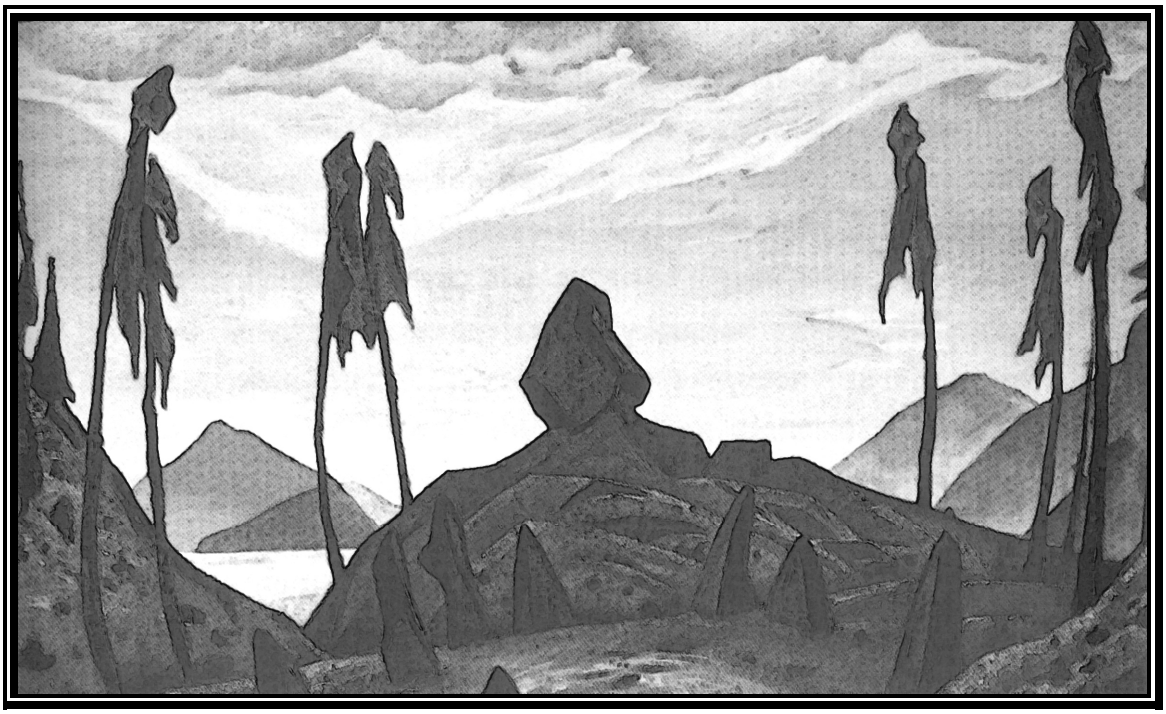
Оригинал-макет: *А.В. Зенков*

ИД № 06263 от 12.11.2001 г.

Подписано в печать	Формат 60×84 1/16		
Бумага типографская	Цифровая печать		Усл. печ. л. 6,06
Уч.-изд. л. 5,1	Тираж	Заказ	Цена "С"

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ–УПИ
620002 Екатеринбург, ул. Мира, 19
Ризография НИЧ ГОУ УГТУ–УПИ
620002 Екатеринбург, ул. Мира, 19

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА