Куликова Л.Б.
Поторочина К.С.

Комплексные числа
Сборник типовых заданий

Научный редактор – доц. канд. физ.-мат. наук Р.М. Минькова

Известно, что действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое квадратное уравнение или извлечь корень из отрицательного числа.

Например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных решений. Поэтому возникла задача рассмотреть систему действительных чисел таким образом, чтобы уравнения такого типа имели решения.

Определение: Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x, y – действительные числа, $i^2 = \sqrt{-1}$ – мнимая единица $\left(i^2 = -1\right)$.

Геометрическая интерпретация комплексного числа z

В прямоугольной системе координат на плоскости OXY числа z изображается точкой $M\left(x, y\right)$ или её радиус-вектором $\vec{z} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (рис. 1).

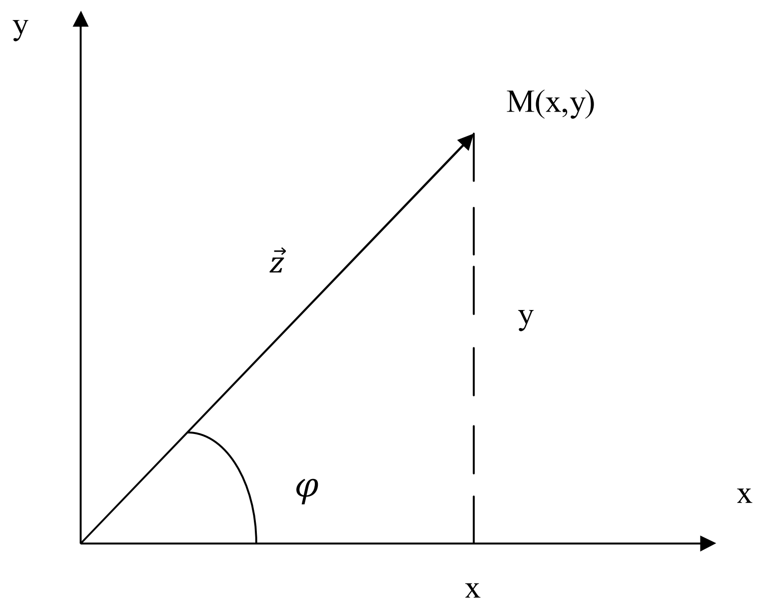

Рис. 1

Алгебраическая форма комплексного числа

$z = x + iy$, где $x = \operatorname{Re} z$ – вещественная часть числа, $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая единица $i^2 = -1$ (рис. 2).

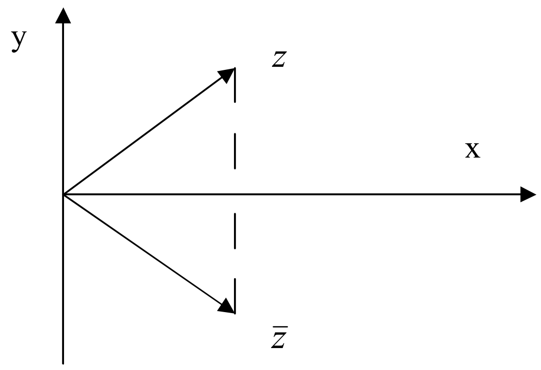

Рис. 2.

Комплексные числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются комплексно-сопряженными и они отожествляются с точками (x, y) и $(x, -y)$, симметричными относительно оси OX.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Длина вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 1) называется модулем комплексного числа и обозначается $|z| = z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Угол φ между вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью OX называется аргументом комплексного числа z. Угол φ определяется неоднозначно, с точностью до слагаемого $2\pi k$.

Договоримся брать то значение φ, которое заключено между $-\pi$ и π , обозначать его $\arg Z$ и называть главным значением аргумента комплексного числа. Так как $r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (рис. 1), то $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, которое называют тригонометрической формой записи комплексного числа.

Показательная форма комплексного числа

Пользуясь формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, можно представить комплексное число в показательной форме

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

$$z = re^{i\varphi}$$

Действия над комплексными числами

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

1) Два комплексных числа равны, если их действительные и мнимые части равны: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

2) При сложении (вычитании) комплексных чисел складываются (вычитаются) их действительные и мнимые части.

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

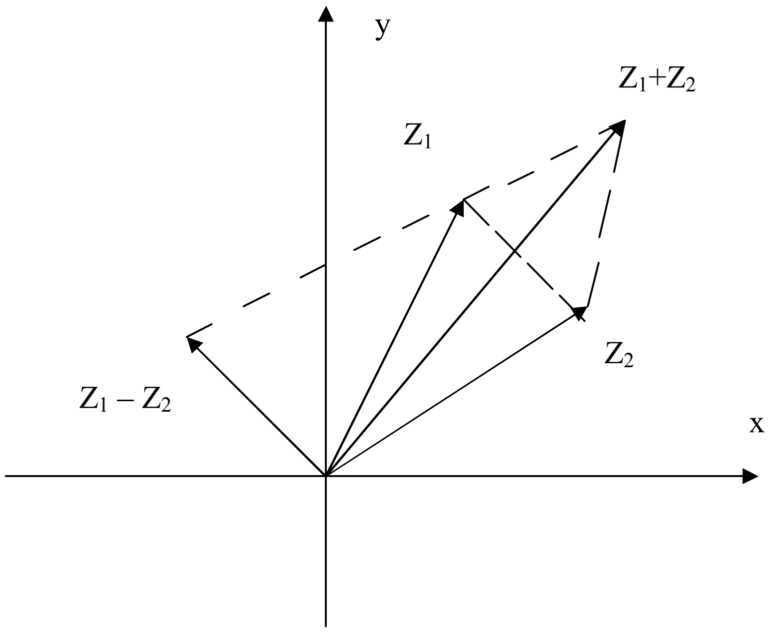

Рис. 3

С геометрической точки зрения сложение (вычитание) комплексных чисел равносильно сложению (вычитанию) геометрических векторов. Причем, расстояние между числами Z_1 и Z_2 равно $|z_1 - z_2|$. Поэтому окружности с центром в точке Z_0 радиуса R имеет уравнение $|z - z_0| = R$.

3) Умножение комплексного числа определяется по правилу умножения двучленов с учетом $i^2 = -1$.

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Например: $\left(1 + \sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2} - i\right) = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + \left(-1 + \sqrt{6}\right)i$.

При умножении двух комплексных чисел в тригонометрической или показательной форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 \cdot \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

Например:

$$\left(1 + \sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2} - i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

4) Деление комплексных чисел. При делении числа Z_1 на число Z_2, которые заданы в алгебраической форме, числитель и знаменатель умножают на $\overline{Z_2}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Например:

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{2} - i} = \frac{\left(1 + \sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{2} + i\right)}{\left(\sqrt{2} - i\right)\left(\sqrt{2} + i\right)} = \frac{\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(1 + \sqrt{6}\right)}{2 + 1} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{3} + i\frac{1 + \sqrt{6}}{3}$$

При делении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической или показательных формах, их модули делятся, а аргументы вычитаются.

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$, следовательно, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ и

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 .$$

Например:

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{2} - i} = \frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{4}i}} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)i}$$

5) Возведение в степень комплексного числа в алгебраической форме осуществляется по правилу возведения в степени двучлена с учетом того, что

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ \ldots .$$

При возведении комплексного числа в большую степень используют тригонометрическую или показательную форму:

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi\right) = r^n\cdot e^{i\cdot n\varphi}.$$

Эта формула носит название «формула Муавра».

Например:

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 = 1+3\cdot 1^2\cdot i\sqrt{3}+3\cdot 1\cdot\left(i\sqrt{3}\right)^2+\left(i\sqrt{3}\right)^3 =$$
$$=(1-9)+i\left(3\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)=-8$$

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{12} = 2^{12}\cdot e^{12\cdot\frac{\pi}{3}i} = 2^{12}e^{4\pi\cdot i} = 2^{12}\left(\cos 4\pi + i\sin 4\pi\right) = 2^{12}$$

6) Извлечение корня из комплексного числа.

При извлечении корня из комплексного числа используют тригонометрическую или показательную форму.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}},$$

где $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$.

При извлечении корня квадратного можно не использовать данную формулу, а выделять полный квадрат под корнем.

Геометрическая интерпретация $\sqrt[n]{z}$

Различные значения корня $\sqrt[n]{z}$ - вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в начале координат и радиусом $r = \sqrt[n]{|z|}$.

Например:

$$\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi/3+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi/3+2\pi k}{4}\right),\ \ k=0,1,2,3.$$

На рис. 4 изобразим окружность радиуса $\sqrt[4]{2}$. Тогда корни $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$ отметим в соответствии со значением их аргументов.

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

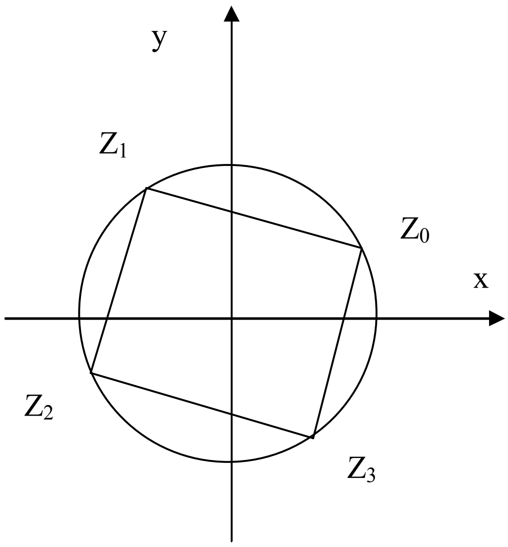

Рис. 4.

Варианты индивидуальных домашних заданий

Вариант № 1

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $2-2i$; 2) -1; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $-1-i\sqrt{3}$; 5) $-2+5i$.

2. Решить систему: $\begin{cases}(2-i)x+(3+2i)y=3-6i\\ (1-i)x-(2+i)y=-1\end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $\left(\frac{1+i}{4}\right)^7$; 2) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^6$;

3) $f(z)=(z-1)^5+\frac{1}{z-3}$. Найти $f(1+2i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[12]{1+i}$; 2) $\sqrt[4]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{8}$; 4) $\sqrt{8-6i}$; 5) $\sqrt{\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2+(1-2i)z-2i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z-3i|\ge 3$; 2) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=1$;

3) $|z-2i|+|z+2i|=8$; 4) $|z-2i|=|z+2i|$.

Вариант № 2

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $-1-i$; 2) $\sqrt{3}+i$; 3) 2; 4) $-1+i$; 5) $3-4i$.

2. Решить систему: $\begin{cases}(3-i)x+(4+2i)y=2+6i\\ (4+2i)x-(2+3i)y=5+4i\end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^3$; 2) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{15}$; 3) $f(z)=z^4+3z^2+1$. Найти $f(1-i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[3]{i}$; 2) $\sqrt[6]{-64}$; 3) $\sqrt[5]{1-i}$; 4) $\sqrt{-7+24i}$; 5) $\sqrt{\dfrac{1+2i}{1-3i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-(4-3i)z+7-i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z+i|=3$; 2) $|z-i|+|z+2i|=5$;

3) $\operatorname{Re}(z+3i-1)=4$; 4) $|z|\ge 1-\operatorname{Im}z$.

Вариант № 3

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $4-4i$; 2) $\sqrt{3}-i$; 3) 6; 4) $-1+i$; 5) $-3-4i$.

2. Решить систему: $\begin{cases}(2-i)x+(3+i)y=4-2i\\(5+2i)x+(2-3i)y=5i\end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^3$; 2) $(1+i)^{22}$; 3) $f(z)=(z-1)^5+z^5$. Найти $f(1-i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[4]{-1}$; 2) $\sqrt[7]{1-i}$; 3) $\sqrt[5]{32}$; 4) $\sqrt{3+4i}$; 5) $\sqrt[3]{\dfrac{2i}{1+i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2+(1-2i)z-2i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z+1+2i|=1$; 2) $\arg z=\dfrac{\pi}{3}$;

3) $|z|<1-\operatorname{Re}z$; 4) $|z-1|+|z-3|=4$.

Вариант № 4

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $5+5i$; 2) $-1+i\sqrt{3}$; 3) π; 4) $1-i$; 5) $-3-4i$.

2. Решить систему: $\begin{cases} (3+i)x+(4-2i)y=2-6i \\ (4-2i)x-(2-3i)y=5-4i \end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$; 2) $(-1+i)^{15}$; 3) $f(z)=z^8+2z^4$. Найти $f(1+i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[5]{i}$; 2) $\sqrt[4]{-16}$; 3) $\sqrt[3]{8}$; 4) $\sqrt{-15+8i}$; 5) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z+2+i|\le 2$; 2) $z=3+2e^{i\varphi}\,(0\le\varphi\le\pi)$;

3) $\operatorname{Re} z^2=5$; 4) $|z-2|-|z+2|\ge 3$.

Вариант № 5

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $-1-i$; 2) $1+i\sqrt{3}$; 3) $-\pi$; 4) 5; 5) $-7+24i$.

2. Решить систему: $\begin{cases} (3i-1)x+(3i+2)y=-6+3i \\ (1-i)x+(1+2i)y=i \end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $\left(-1-\sqrt{3}i\right)^6$; 2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$;

3) $f(z)=\dfrac{z+1}{2}+z^3+1$. Найти $f(-1+2i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[7]{1+i}$; 2) $\sqrt[3]{8}$; 3) $\sqrt[4]{-64}$; 4) $\sqrt{3+4i}$; 5) $\sqrt{\dfrac{1-3i}{1+2i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $(1+i)z^2+(3-i)z+2(1-i)=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z+2i+1|\le\sqrt{5}$; 2) $0<\operatorname{Re} iz<1$;

3) $|z|+|z+1|=1$; 4) $z=3+4e^{i\varphi}\,(0\le\varphi\le 2\pi)$.

Вариант № 6

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{3}-i$; 3) -5; 4) $-\sqrt{3}-i$; 5) $3+4i$.

2. Решить систему: $\begin{cases}(2-i)x+(3+2i)y=1-i\\ ix+(1-5i)y=6+3i\end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $(1+\sqrt{3}i)^9$; 2) $(-1+i)^{17}$;

3) $f(z)=z^3-3z^2$. Найти $f(1+2i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[3]{i}$; 2) $\sqrt{-16}$; 3) $\sqrt{24+10i}$; 4) $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$; 5) $\sqrt{\dfrac{3+i}{-2+i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-(7+i)z+12-i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z-1+i|\ge\sqrt{2}$; 2) $0<\operatorname{Re} iz<1$;

3) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=2$; 4) $|2z|=|1+z|$.

Вариант № 7

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{3}-i$; 3) $-\dfrac{\pi}{2}$; 4) $-1-i\sqrt{3}$; 5) $-1+2i$.

2. Решить систему: $\begin{cases}(1-i)x+(5-3i)y=39+i\\ (2-3i)x+iy=10+5i\end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^6$; 2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{26}$;

3) $f(z)=z^3+z^2+z+1$. Найти $f(1-2i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[3]{-1+i}$; 2) $\sqrt[4]{-81}$; 3) $\sqrt[5]{i}$; 4) $\sqrt{3-4i}$; 5) $\sqrt{\dfrac{1-2i}{1+3i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $iz^2+(2+i)z+2=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z+2+i|\le 3$; 2) $|z|>1-\operatorname{Im} z$;

3) $|z+2|+|z-3|=9$; 4) $z=2i+3e^{i\varphi}\left(0\le\varphi<2\pi\right)$.

Вариант № 8

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $1-i$; 2) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}$; 3) 1; 4) $-1-i$; 5) $-3+4i$.

2. Решить систему: $\begin{cases}(2+i)x+(3-i)y=4+2i\\ (5-2i)x+(2+3i)y=-5i\end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^3$; 2) $\left(\dfrac{1-i}{2}\right)^{22}$;

3) $f(z) = z^8 + z^4 + 1$. Найти $f\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt{i}$ 2) $\sqrt[6]{-8}$; 3) $\sqrt[5]{-1-i}$; 4) $\sqrt{3+4i}$; 5) $\sqrt{\frac{2+i}{-3+i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $(2+i)z^2 - (5-i)z + 2 - 2i = 0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z - 3 + 2i| = 5$; 2) $|z-1| + |z+2| = 4$;

3) $|z| \le 1 - \operatorname{Re} z$; 4) $|z - i| = |z + 2i|$.

Вариант № 9

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $\frac{-1-i}{2}$; 2) $\sqrt{3} + i$; 3) $-\pi$; 4) $2 + 3i$; 5) 4.

2. Решить систему: $\begin{cases} (2+i)x + (3-2i)y = 1+i \\ -ix + (1+5i)y = 6-3i \end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $(\sqrt{3}+i)^6$; 2) $\left(\frac{1-i}{2}\right)^{23}$; 3) $f(z) = z^4 + 2z^2$. Найти $f(1-i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[3]{-1}$ 2) $\sqrt{-16i}$ 3) $\sqrt{-7+24i}$ 4) $\sqrt[6]{1-i\sqrt{3}}$ 5) $\sqrt{\frac{1-3i}{2i+1}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2 + (7+i)z + 12 - i = 0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z + 2i| \le 2$; 2) $0 < \operatorname{Re} z < 4$;

3) $\operatorname{Im}(z^2 - 1) = 1$; 4) $z = 3i + 4e^{i\varphi}\left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Вариант № 10

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $\dfrac{1}{1+i}$; 2) 1; 3) $-\dfrac{\pi}{4}$; 4) $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{4}$; 5) $-3-4i$.

2. Решить систему: $\begin{cases}(2+i)x+(3-2i)y=3+6i\\ (1+i)x-(2-i)y=-1\end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $\left(\dfrac{1+i}{4}\right)^{10}$; 2) $\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3}$;

3) $f(z)=z^6+3z^2$. Найти $f(1-i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[5]{1}$; 2) $\sqrt{-4}$; 3) $\sqrt{-24-10i}$; 4) $\sqrt[7]{1-i}$; 5) $\sqrt{\dfrac{7-i}{-3+4i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-(1+i)z+2(1+i)=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z-1+i|\le 2$; 2) $0\le \operatorname{Im}(z^2-1)\le 1$;

3) $|z+i|+|z-2i|=5$; 4) $z=\pi+4e^{i\varphi}\ (0\le\varphi<2\pi)$.

Вариант № 11

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $3i$; 2) -2; 3) $\dfrac{-\sqrt{3}-i}{3}$; 4) $\dfrac{\pi}{8}$; 5) $2-5i$.

2. Решить систему: $\begin{cases}(1+i)x+(2+i)y=5+6i\\ (2+i)x-(1+3i)y=14+2i\end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{12}$; 2) $\left(\dfrac{1-i}{4}\right)^{15}$;

3) $f(z)=z^{15}+z^{6}+1$. Найти $f\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[4]{-16}$; 3) $\sqrt{1-i}$; 4) $\sqrt{24-10i}$; 5) $\sqrt[4]{\frac{1+i}{1-i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-(8+i)z+17+7i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z-1+3i|\geq 10$; 2) $\operatorname{Im} z^2=5$;

3) $|z|=\operatorname{Re} z+1$; 4) $|z|\leq {}^{1}\!/_{2}+|z-1|$.

Вариант № 12

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $1-i$; 2) $\frac{\sqrt{3}+i}{8}$; 3) -1; 4) $-1-i$; 5) $-3+4i$.

2. Решить систему: $\begin{cases}(1+2i)x-(2-3i)y=6+3i \\ (1+i)x+(1-2i)y=-i\end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $\left(\frac{1-i}{4}\right)^7$; 2) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{15}$; 3) $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$. Найти $f(2+3i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 2) $\sqrt[4]{256}$; 3) $\sqrt[5]{-1}$; 4) $\sqrt{7+24i}$; 5) $\sqrt[7]{\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $jz^2+(1-8j)z-7+17j=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $1\leq|z+i|\leq 2$; 2) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}=1$;

3) $|z-2i|+|z+2i|=4$; 4) $z=1+2e^{i\varphi}\left(0\le\varphi\le \pi/2\right)$.

Вариант № 13

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) 4; 2) $\dfrac{-1+i}{2}$; 3) $-i$; 4) $-2-2i$; 5) $5-3i$.

2. Решить систему: $\begin{cases}(1-3i)x+(2i+1)y=5\\(9-4i)x-(2+i)y=3+11i\end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}\right)^3$; 2) $\dfrac{(1-i)^{15}}{32}$; 3) $f(z)=\dfrac{z+3}{z-3}$. Найти $f(3i)+f(-3i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[3]{-8+8i}$; 2) $\sqrt[4]{-1}$; 3) $\sqrt[5]{32}$; 4) $\sqrt{3+4i}$; 5) $\sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{3}-i}{128}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-(11+4i)z+33+13i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z-1|+|z+2|=5$; 2) $1\le|z+1+3i|\le 2$;

3) $\operatorname{Re}z-\operatorname{Im}z<1$; 4) $z=-2+e^{i\varphi}(0\le\varphi<2\pi)$.

Вариант № 14

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) e; 2) -1; 3) $1+i$; 4) $-1-i$; 5) $-2+3i$.

2. Решить систему: $\begin{cases}(1+5i)x-(1-3i)y=-9+11i\\(2-3i)x+(4+7i)y=6+17i\end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{15}$; 2) $\dfrac{(1+i)^5+(1-i)^5}{16}$;

3) $f(z)=\dfrac{(z+1)^2}{z^2+1}$. Найти $f(1-i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[4]{-1}$; 2) $\sqrt[3]{27}$; 3) $\sqrt[5]{2(1-i)}$; 4) $\sqrt{3-4i}$; 5) $\sqrt{\dfrac{-1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-(3-i)z+4=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $1\le|z-1+i|\le 3$; 2) $|z-i|-|z-2i|=1/4$;

3) $\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z=1$; 4) $|z|=|z+5|$

Вариант № 15

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $\dfrac{-2+2i}{\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; 3) $1-i$; 4) -5; 5) $-2-3i$.

2. Решить систему: $\begin{cases}(2+i)x+(3-i)y=5-i\\ (1-i)x-iy=1-i\end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $(\sqrt{2}+i)^6$; 2) $\left(\dfrac{1+i}{2\sqrt{2}}\right)^{15}$; 3) $f(z)=z^2+\bar{z}$. Найти $f(1-i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt{-4}$; 3) $\sqrt{5+12i}$; 4) $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$; 5) $\sqrt{\dfrac{-1+3i}{1+2i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-5z+5+3i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z+3i|\le 5$; 2) $z=1+2e^{i\varphi}\ (0\le\varphi<2\pi)$;

3) $\operatorname{Im}z^2=2$; 4) $|z+1+i|=|z|$.

Вариант № 16

1. Представить в тригонометрической форме числа:

$$1)\ -\frac{7+3i}{\sqrt{3}};\quad 2)\ \sqrt{3}+3i;\quad 3)\ \sqrt{3}-3i;\quad 4)\ -4;\quad 5)\ -5+5i.$$

2. Решить систему: $\begin{cases}(3+2i)x+(1-i)y=2+2i\\(1+2i)x+(1+i)y=2+4i\end{cases}.$

3. Выполнить указанные действия:

$$1)\ \left(\sqrt{2}+2i\right)^7;\ 2)\ \left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)^5;$$

$$3)\ f(z)=5z^2+2z.\ \text{Найти}\ f(2+3i).$$

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

$$1)\ \sqrt[7]{1};\quad 2)\ \sqrt[8]{-2};\quad 3)\ \sqrt[3]{-1-i};\quad 4)\ \sqrt{4+2\sqrt{5}i};\quad 5)\ \sqrt{\frac{8+6i}{7-i}}.$$

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-3z+3+i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

$1)\ |z-3i|\le 1;$ $\qquad 2)\ z=-2+3e^{i\varphi}\left(0\le\varphi<2\pi\right);$

$3)\ \operatorname{Im} z^2=8;$ $\qquad 4)\ |z+1-2i|=|z|.$

Вариант № 17

1. Представить в тригонометрической форме числа:

$$1)\ -\frac{-2+3i}{\sqrt{3}};\quad 2)\ 1-i\sqrt{3};\quad 3)\ 1+\sqrt{3}i;\quad 4)\ 3;\quad 5)\ -2+5i.$$

2. Решить систему: $\begin{cases}(3-2i)x+(1+i)y=6+4i\\(2-3i)x+(2+i)y=8+3i\end{cases}.$

3. Выполнить указанные действия:

$$1)\ (1+2i)^4;\qquad 2)\ \left(\frac{2+2i}{\sqrt{2}}\right)^6;\quad 3)\ f(z)=z^4+z.\ \text{Найти}\ f(1+i).$$

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[4]{1}$; 2) $\sqrt[4]{-2}$; 3) $\sqrt{12+16i}$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$; 5) $\sqrt{\dfrac{-2i}{1-i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-(3+2i)z+1+3i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z+2i|\le 3$; 2) $z=1+e^{i\varphi}(0\le\varphi<2\pi)$;

3) $\operatorname{Im} z^2 = 1/2$; 4) $|z+2-3i|=|z|$.

Вариант № 18

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $-\dfrac{1+i}{\sqrt{5}}$; 2) $3+i\sqrt{3}$; 3) $3-i\sqrt{3}$; 4) -2; 5) $-8+4i$.

2. Решить систему: $\begin{cases} ix+(2+3i)y=8+5i \\ (1+i)x-(1-i)y=3-3i \end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $(1+i)^5$; 2) $\left(\dfrac{1+5i}{\sqrt{5}}\right)^4$; 3) $f(z)=3z^3+z$. Найти $f(3-i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[5]{-1}$; 2) $\sqrt[3]{2}$; 3) $\sqrt{4-3i}$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$; 5) $\sqrt{\dfrac{2+4i}{3+i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-4z+4+2i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z-2i|\le 2$; 2) $z=-2+3e^{i\varphi}(0\le\varphi<2\pi)$;

3) $\operatorname{Im} z^2=1$; 4) $|z+3-i|=|z|$.

Вариант № 19

1. Представить в тригонометрической форме числа:

$$1)\ -\frac{2+2i}{\sqrt{3}};\quad 2)\ 2+5i;\quad 3)\ 2-5i;\quad 4)\ 6;\quad 5)\ -1+i.$$

2. Решить систему: $\begin{cases}(1+i)x+(2-i)y=1+3i\\(1-i)x+(3+2i)y=3+7i\end{cases}.$

3. Выполнить указанные действия:

$$1)\ \left(\sqrt{2}+i\right)^5;\quad 2)\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)^{10};\quad 3)\ f(z)=2z^2+3z.\ \text{Найти}\ f(2+i).$$

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

$$1)\ \sqrt[3]{1};\quad 2)\ \sqrt[5]{-32};\quad 3)\ \sqrt{5+12i};\quad 4)\ \sqrt[3]{1+i\sqrt{3}};\quad 5)\ \sqrt{\frac{1+5i}{2+2i}}.$$

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-3z+3+i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|3z-2i|\le 1$; 2) $z=1+2e^{i\varphi}\ (0\le\varphi<2\pi)$;

3) $\operatorname{Re} z^2=3$; 4) $|z+3i|=|z|$.

Вариант № 20

1. Представить в тригонометрической форме числа:

$$1)\ -\frac{3+4i}{\sqrt{3}};\quad 2)\ 1+i\sqrt{3};\quad 3)\ 1-i\sqrt{3};\quad 4)\ -3;\quad 5)\ -5+3i.$$

2. Решить систему: $\begin{cases}(3+i)x+(1+2i)y=-2+6i\\(1-i)x-iy=4\end{cases}.$

3. Выполнить указанные действия:

$$1)\ (5+i)^3;\quad 2)\ \left(\frac{3-3i}{\sqrt{2}}\right)^5;\quad 3)\ f(z)=3z^2-z.\ \ \text{Найти}\ f(2-3i).$$

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

$$1)\ \sqrt[4]{-2};\quad 2)\ \sqrt[5]{8};\quad 3)\ \sqrt{4+3i};\quad 4)\ \sqrt[3]{1+i};\quad 5)\ \sqrt{\frac{4-2i}{3+i}}.$$

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-(6+i)z+10+6i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z+2i|\le 4$; 2) $\operatorname{Re} z^2=5$;

3) $z=-3+e^{i\varphi}(0\le\varphi<2\pi)$; 4) $|z+3-2i|=|z|$.

Вариант № 21

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $\frac{-2-7i}{\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{2}-2i$; 4) -5; 5) $-3+4i$.

2. Решить систему: $\begin{cases}(2+3i)x+(1+i)y=-1+2i\\ (1+3i)x+(3+2i)y=2\end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $(4+3i)^3$; 2) $\left(\frac{5+5i}{\sqrt{5}}\right)^6$;

3) $f(z)=3z^2+2z$. Найти $f(1-5i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[5]{-1}$; 2) $\sqrt[5]{3}$; 3) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+3i}$; 4) $\sqrt{2+i\sqrt{5}}$; 5) $\sqrt{\frac{4+6i}{5+i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-(3-i)z+4-3i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|2z+5i|\le 4$; 2) $z=1+5e^{i\varphi}(0\le\varphi<2\pi)$;

3) $\operatorname{Re} z^2=9$; 4) $|z+5-2i|=|z|$.

Вариант № 22

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $\frac{-1-6i}{\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{3}+i$; 3) $\sqrt{3}-i$; 4) -5; 5) $-2+7i$.

2. Решить систему: $\begin{cases} (1+2i)x+(3+2i)y=4+2i \\ (1-2i)x+(1+2i)y=6 \end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $(5+5i)^8$; 2) $\left(\dfrac{1+3i}{\sqrt{6}}\right)^3$; 3) $f(z)=5z^2+z$. Найти $f(4+i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[4]{-1}$; 2) $\sqrt[5]{16}$; 3) $\sqrt{-1+i}$; 4) $\sqrt{5+12i}$; 5) $\sqrt{\dfrac{7+5i}{6-i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-(4-i)z+5+i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z+4|\le 6$; 2) $z=-2-3e^{i\varphi}\ (0\le\varphi<2\pi)$;

3) $\operatorname{Re} z^2=1$; 4) $|z-3+2i|=|z|$.

Вариант № 23

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $\dfrac{-2-5i}{\sqrt{3}}$; 2) $3+i\sqrt{3}$; 3) $3-i\sqrt{3}$; 4) 2; 5) $-6+7i$.

2. Решить систему: $\begin{cases} (2+i)x+(1+3i)y=5+5i \\ (1-i)x+y=3-i \end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $(2+5i)^3$; 2) $\left(\dfrac{4+4i}{\sqrt{2}}\right)^6$; 3) $f(z)=z^2+5z$. Найти $f(3+i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[7]{-1}$; 2) $\sqrt[6]{8}$; 3) $\sqrt{8+6i}$; 4) $\sqrt[5]{\sqrt{3}+i}$; 5) $\sqrt{\dfrac{6-4i}{5+i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-(3-2i)z+5-i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z+5i| \le 6$; 2) $z = -4 + e^{i\varphi}(0 \le \varphi < 2\pi)$;

3) $\operatorname{Im} z^2 = 9$; 4) $|z+3-2i| = |z|$.

Вариант № 24

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $\dfrac{-1-4i}{\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{5}+5i$; 3) $\sqrt{5}-5i$; 4) -7; 5) $-7+5i$.

2. Решить систему: $\begin{cases} (1-2i)x + 2iy = 5+3i \\ (2+3i)x + (1+i)y = 2+6i \end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $(3+3i)^8$; 2) $\left(\dfrac{1+5i}{\sqrt{6}}\right)^4$; 3) $f(z) = 2z^2 + 5z$. Найти $f(5+i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[5]{-1}$; 2) $\sqrt[4]{6}$; 3) $\sqrt[3]{1-i}$; 4) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$; 5) $\sqrt{\dfrac{6+4i}{5-i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2 - (3-4i)z - 1 - 5i = 0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z+2i| \le 3$; 2) $z = 5 + 2e^{i\varphi}(0 \le \varphi < 2\pi)$;

3) $\operatorname{Re} z^2 = 4$; 4) $|z+3i+2| = |z|$.

Вариант № 25

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $\dfrac{-3-4i}{\sqrt{2}}$; 2) $1+i\sqrt{3}$; 3) $1-i\sqrt{3}$; 4) -8; 5) $-5+4i$.

2. Решить систему: $\begin{cases} (2+i)x + (3+i)y = 7+2i \\ (2-i)x - iy = 4-i \end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $(2+3i)^4$; 2) $\left(\frac{3+3i}{\sqrt{3}}\right)^6$; 3) $f(z)=z^3+2z$. Найти $f(2-i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[4]{-1}$; 2) $\sqrt[3]{8}$; 3) $\sqrt{3-4i}$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$; 5) $\sqrt{\frac{5+3i}{3-2i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-(4-3i)z+1-5i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z+3i|\le 5$; 2) $z=-3+2e^{i\varphi}\,(0\le\varphi<2\pi)$;

3) $\operatorname{Re} z^2=5$; 4) $|z-2+i|=|z|$.

Вариант № 26

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $\frac{-1-6i}{\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{3}+i$; 3) $\sqrt{3}-i$; 4) -5; 5) $-2+7i$.

2. Решить систему: $\begin{cases}(1+2i)x+(3+2i)y=-3+6i\\ (1-2i)x+(1+2i)y=1\end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $(3+5i)^4$; 2) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{6}}\right)^6$; 3) $f(z)=5z^2+z$. Найти $f(4+i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[4]{-1}$; 2) $\sqrt[5]{16}$; 3) $\sqrt[3]{3+i\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt{8+6i}$; 5) $\sqrt{\frac{5-7i}{6-i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2-(4+2i)z+2+4i=0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z+4|\le 6$; 2) $z=-2+3e^{i\varphi}\,(0\le\varphi<2\pi)$;

3) $\operatorname{Re} z^2 = 1$; 4) $|z - 3 + 2i| = |z|$.

Вариант № 27

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $-\dfrac{2+6i}{\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2} - 3i$; 3) $\sqrt{2} + 3i$; 4) 5; 5) $-7 + 3i$.

2. Решить систему: $\begin{cases} (3+2i)x + (1+i)y = 5+i \\ (2+3i)x + y = 6+2i \end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $(3+4i)^3$; 2) $\left(\dfrac{2-2i}{\sqrt{6}}\right)^6$; 3) $f(z) = 3z^2 + 2z$. Найти $f(1-i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[6]{1}$; 2) $\sqrt[3]{-4}$; 3) $\sqrt{3+4i}$; 4) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$; 5) $\sqrt{\dfrac{3+i}{2-i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2 - (4-2i)z + 2 - 4i = 0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z+3| \le 1$; 2) $z = -4 + 3e^{i\varphi}\ (0 \le \varphi < 2\pi)$;

3) $\operatorname{Im} z^2 = 8$; 4) $|z - 5 + 2i| = |z|$.

Вариант № 28

1. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $\dfrac{-7-3i}{\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{3} + 3i$; 3) $\sqrt{3} - 3i$; 4) -4; 5) $-6 + 5i$.

2. Решить систему: $\begin{cases} (1+i)x + (1-i)y = 5-i \\ (1-i)x + iy = -1 \end{cases}$.

3. Выполнить указанные действия:

1) $(-3+3i)^7$; 2) $\left(\dfrac{5+i}{\sqrt{5}}\right)^3$; 3) $f(z) = 5z^2 + 2z$. Найти $f(2-3i)$.

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[7]{1}$; 2) $\sqrt[6]{-2}$; 3) $\sqrt[3]{1+i}$; 4) $\sqrt{4+2\sqrt{5}i}$; 5) $\sqrt{\dfrac{6-8i}{7-i}}$.

5. Решить квадратное уравнение: $z^2 - 4z + 4 - 2i = 0$.

Корни уравнения записать во всех известных формах и изобразить геометрически.

6. Построить множества точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z-3i| \le 1$; 2) $z = -2 + 3e^{i\varphi}\left(0 \le \varphi < 2\pi\right)$;

3) $\operatorname{Im} z^2 = 8$; 4) $|z+1-2i| = |z|$.

Решение одного из предложенных вариантов

1. Представить в тригонометрической и показательной форме числа:

а) $\dfrac{-7-3i}{\sqrt{3}} = \left[\begin{array}{l} |-7-3i| = \sqrt{58} \\ \arg(-7-3i) = -\pi + arctg\,\dfrac{3}{7} \end{array}\right] =$

$$= \sqrt{\frac{58}{3}}\left(\cos\left(-\pi + arctg\,\frac{3}{7}\right) + i\sin\left(-\pi + arctg\,\frac{3}{7}\right)\right) = \sqrt{\frac{58}{3}} \cdot e^{\left(-\pi + arctg\frac{3}{7}\right)i}.$$

б) $\sqrt{3} - i = \left[\begin{array}{l} \left|\sqrt{3} - i\right| = 2 \\ \arg\left(\sqrt{3} - i\right) = -\dfrac{\pi}{6} \end{array}\right] = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

2. Решить систему

$$\begin{cases} (1+i)x + (1-i)y = 5 - i \\ (1-i)x + iy = -1 \end{cases}$$

Решение:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & i \end{vmatrix} = 3i - 1 \neq 0,$ значит, можно решить систему методом Крамера.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5-i & 1-i \\ -1 & i \end{vmatrix} = 2(1+2i),$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2(1+2i)}{(-1+3i)} = \frac{2(1+2i)}{(-1+3i)} \cdot \frac{-1-3i}{-1-3i} = 1 - i.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1+i & 5-i \\ 1-i & -1 \end{vmatrix} = -5(1-i),$$

$$x = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-5(1-i)}{(-1+3i)} = \frac{-5(1-i)}{(-1+3i)} \cdot \frac{-1-3i}{-1-3i} = 2 + i.$$

Ответ: $x = 1 - i,\ y = 2 + i$.

3. Выполнить указанные действия:

$$(-3+3i)^7 = 3^7(-1+i)^7 = 3^7\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)^7 =$$

$$= \left(3\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\frac{21\pi}{4} + i\sin\frac{21\pi}{4}\right) = -8 \cdot 3^7 \cdot (1+i).$$

4. Найти и изобразить на комплексной плоскости все значения следующих корней:

1) $\sqrt[6]{1}=\sqrt[6]{1+0i}=\sqrt[6]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\left(\dfrac{0+2\pi k}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{0+2\pi k}{6}\right),\ k=0,1,2,3,4,5.$

Значения корней, соответствующих разным значениям k, изобразим на окружности единичного радиуса (рис. 5).

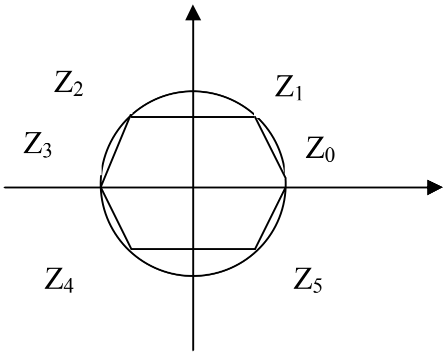

Рис. 5

2) $\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi/4+2\pi k}{3}+i\sin\dfrac{\pi/4+2\pi k}{3}\right),k=0,1,2.$

Значения корней, соответствующих разным значениям k, изобразим на окружности радиуса $\sqrt[6]{2}$ (рис. 6).

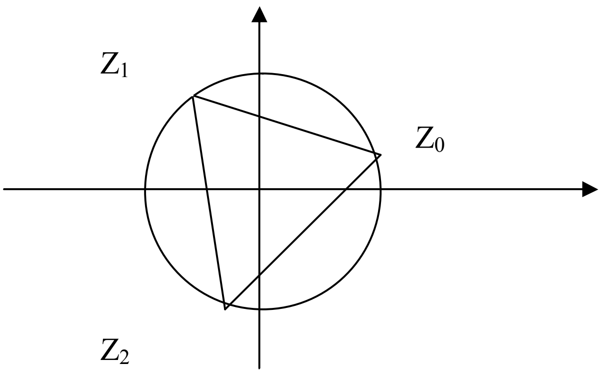

Рис. 6

3) $\sqrt{4+2\sqrt{5}i}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}i+i^2}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+i\right)^2}=\pm\left(\sqrt{5}+i\right)$

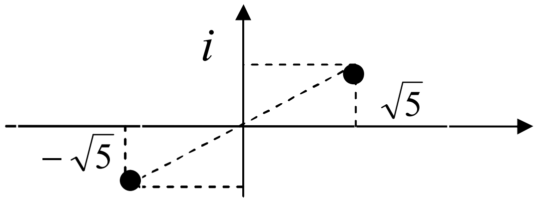

Рис. 7

4) $\sqrt{\frac{6-8i}{7-i}}=\sqrt{\frac{(6-8i)(7+i)}{(7-i)(7+i)}}=\sqrt{1-i}=\sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=$

$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi/4+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi/4+2\pi k}{2}\right)\right),\ k=0,1.$$

$$z_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$$

Значения корней z_0, z_1, изобразим на окружности радиуса $\sqrt[4]{2}$ (рис. 8).

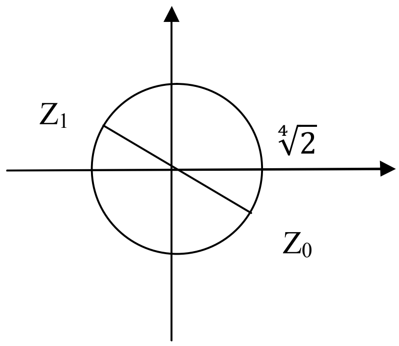

Рис. 8

5. Решите уравнение $z^2-4z+4-2i=0$.

Используем формулу для отыскания корней квадратного уравнения

$$z=\frac{4\pm\sqrt{16-4(4-2i)}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{2i}}{2}=2\pm\sqrt{(1+i)^2}=2\pm(1+i)$$

$$z_1=2+(1+i)=3+i,\quad z_2=2-(1+i)=1-i.$$

6. Построить множество точек, удовлетворяющих указанным соотношениям:

1) $|z-3i|\le 1$ - круг с центром в точке $3i$ и радиусом $R=1$ (рис. 9).

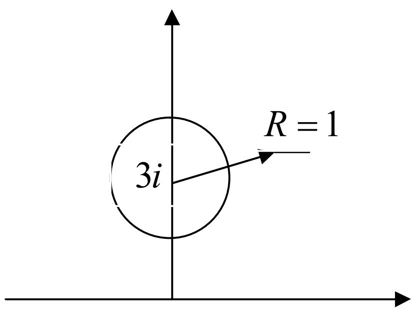

Рис. 9

2) $z=-2+3e^{i\varphi},\ \left(0\le\varphi\le 2\pi\right)$ - окружность с центром в точке -2 и радиусом $R=3$ (рис. 10).

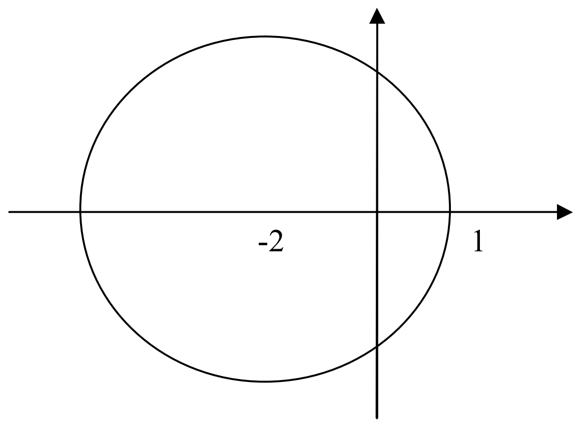

Рис. 10

Действительно, $z=x+iy=-2+3(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

$$\begin{cases} x=-2+3\cos\varphi \\ y=3\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow (x+2)^2+y^2=3^2.$$

3) $\operatorname{Im} z^2=8$.

Так как $z=x+iy$, то $z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$.

$\operatorname{Im} z^2=2xy \Rightarrow 2xy=8$.

$y=\dfrac{4}{x}$ - уравнение гиперболы (рис. 11).

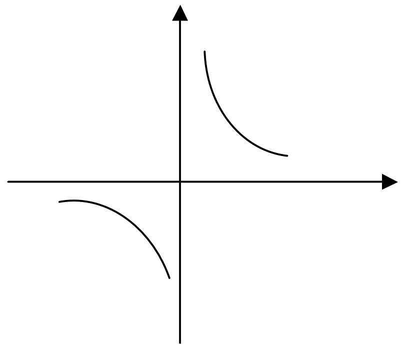

Рис. 11

4) $|z+1-2i|=|z|$.

Модуль $|z+1-2i|=|z-(-1+2i)|$ равен расстоянию от точки z до точки $z_1=-1+2i$.

Модуль $|z| = |z - 0|$ равен расстоянию от точки z до точки $z_2 = 0$.

Тогда уравнение $|z + 1 - 2i| = |z|$ определяет множество точек z, равноудаленных от точек $z_1 = -1 + 2i$ и $z_2 = 0$, т.е. серединный перпендикуляр отрезка, соединяющий эти две точки (рис. 12).

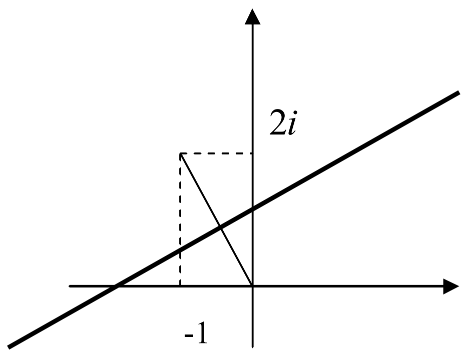

Рис. 12