Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Функции комплексного переменного и операционное исчисление

Сборник типовых заданий

для студентов физических специальностей

Екатеринбург
2013

УДК 517.5 : 517.4

Функции комплексного переменного и операционное исчисление: сборник типовых заданий / под общ. ред. Р.М. Миньковой. Екатеринбург: УрФУ, 2013. 41 с.

Приведены индивидуальные задания по функциям комплексного переменного и операционному исчислению.

Индивидуальные задания по функциям комплексного переменного составлены Абрамовой А.Б., Bареевой Г.Н., Быковой Н.В., Гарнышевой И.Р., Карасик Г.Я., Миньковой Р.М., Табуевой В.А., Трещевой В.В., Янкелевич И.Н.

Индивидуальные задания по операционному исчислению составлены Альпериным М.И., Быковой Н.В., Успенской Е.А.

Библиогр.: 3 назв. Рис.18.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики» при поддержке физико-технического факультета.

1. Индивидуальное задание по функциям комплексного переменного

Вариант 1

1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\ln n}} + i\, \frac{(-5)^n}{1+(-5)^{2n}}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch}\left(\frac{i}{n}\right) \cdot z^n$.

3. Вычислить: а) $\operatorname{Ln}\left(i^i\right)$, б) $\operatorname{Arcsin}\frac{i}{2}$.

4. Решить уравнение $\operatorname{ctg} z = \frac{3+i}{1-i}$.

5. Найти: а) образы множеств $M_1 = \{\, 0 \le x \le 1,\ \ y - \text{любое} \,\}$, $M_2 = \{\, y = c,\ \ x - \text{любое} \,\}$ при отображении $w = z^2$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases} |z| \ge 2, \\ |z-3| \ge 1 \end{cases}$ на множество $\operatorname{Im} w \ge 0$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций: а) $f(z) = \bar{z}$; б) $f(z) = \operatorname{sh} z$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$, для которой $v = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$, $f(1) = 0$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L \left(2i + 5 - 3\bar{z}\right) dz$, $L-$ прямая, соединяющая точки $(1+2i)$, $(2+4i)$;

б) $\oint\limits_L \frac{dz}{(z^2-3z+2)^2}$, $L:\ z = 3 + 4e^{i\varphi}$;

в) $\int\limits_L e^{3z} dz$, L – дуга параболы $y = x^2$, соединяющая точки $z = 0$, $z = 1+i$.

9. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{z-2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=4$.

10. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z^2 - 6z + 8}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$.

11. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{\left(z^2-2\right)^2}$ в ряд Лорана в кольце $\sqrt{2} < |z| < \infty$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

а) $\cos(z+i) \cdot \cos\frac{1}{(z+i)}$, б) $\frac{1}{z^2(1-z)}$.

13. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z dz}{(\pi i - z)^4}$; б) $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{z}{\sin^2 z\,(z^2+4)} dz$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{5 - 4\cos\varphi}$; б) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2+4}$.

Вариант 2

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n^3+4} i$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n (z-4i)^n$.

3. Вычислить: а) $(1-i)^{3-3i}$, б) $\operatorname{Arcsh} 3i$.

4. Решить уравнение $\cos^2 z = \frac{25}{9}$.

5. Найти: а) образы множеств $M_1 = \left\{\arg z = \frac{\pi}{4}\right\}$; $M_2 = \{\ 0 < x < 1,\ y - \textit{любое}\}$ при отображении $w = \frac{z-1}{z}$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases} \operatorname{Re} z \le 1, \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le h \end{cases}$ на множество $\begin{cases} |w| \ge 1, \\ \operatorname{Im} w \ge 0. \end{cases}$

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций: а) $f(z) = z^3$; б) $f(z) = \left(\bar{z}\right)^2$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$, для которой $v(x,y) = \cos x \cdot \operatorname{sh} y$, $f(0) = 0$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L \left(z^2 + z\cdot\bar{z}\right) dz$, $L:\ x^2 + 2x + y^2 = 0$; б) $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2} dz$;

в) $\int\limits_L \sin z \cdot \cos z\, dz$, L – дуга параболы $x^2 = 4y$, соединяющая точки $z = 0$, $z = 2+i$.

9. Разложить функцию $f(z) = \ln(3z-1)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 1$.

10. Разложить функцию $f(z) = \operatorname{sh}\frac{z-2}{z-3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 3$. Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2\cdot(z-6)}$ в ряд Лорана в кольце $2 < |z| < 6$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты в них: а) $z^3 \sin\frac{1}{z}$, б) $\frac{\sin z}{(z-\pi)^2\cdot(z+\frac{\pi}{2})}$.

13. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L \frac{e^z\, dz}{z^2\cdot(z^2-9)}$, $L:\ |z| + |z-2| = 3$; б) $\int\limits_{|z|=1} \left(\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}\right) dz$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\varphi}{5 - 4\cos\varphi} d\varphi$, б) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\cdot\sin x}{\left(x^2+4\right)^2} dx$.

Вариант 3

1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^3}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-2}{in} \right)^n$.

3. Вычислить: а) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{1+i}$, б) $\operatorname{Arcsin}(-3)$.

4. Решить уравнение $\sin^2 z + (5i - 10)\cdot \sin z - 50\, i = 0$.

5. Найти: а) образы множеств $M_1 = \{ y = 0,\ 0 \le x < \infty \}$, $M_2 = \{ -\infty < x \le \ln 3,\ 0 \le y < 2\pi \}$ при отображении $w = e^z$;

б) отображение, переводящее множество $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$ на множество $|w| \le R$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций: а) $f(z) = \frac{1}{z}$; б) $f(z) = \operatorname{Re} z$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + i\ v(x,y)$, для которой $f(0) = 0$, $u(x,y) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\int_L (2i + 5 - 3\bar{z})\, dz$, $L:\ z = t^2 + i t^4$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;4)$;

б) $\oint_L \frac{\cos z\, dz}{(z+1)^2 \cdot (z-4)}$, $L:\ z = 3e^{it}$; в) $\int_{-\pi i}^{\pi i} z \cdot e^z dz$.

9. Разложить функцию $f(z) = \frac{z^2}{z+1}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 2$.

10. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2 \cdot (z-4)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$.

11. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{z^2 - 4z + 3}$ в ряд Лорана в кольце $1 < |z| < 3$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

а) $\sin^2 \frac{1}{z} \cdot \cos^2 z$; б) $\frac{1}{z^2 - 2z + 5}$.

13. Вычислить интегралы:

а) $\int_{|z-1|=1} z^3 \cos \frac{1}{z-1} dz$; б) $\int_L \frac{z - \pi/2}{\sin z - 1}\, dz$, $L:\ |z - 2\pi| = 7$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3 - \sin^2 \varphi)^2}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)\cdot(x^2+4)}\, dx$.

Вариант 4

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n+n}+\frac{i}{(1+1/n)^{n^2}}\right)$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-3}{1-i}\right)^n$.

3. Вычислить: а) $\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}i+1\right)$, б) $\operatorname{Arccos}5$.

4. Решить уравнение $\operatorname{ch}z=\frac{-24-32i}{(1+3i)\cdot(3-i)}$.

5. Найти:
а) образы множеств $M_1=\{\,x=0,\ 0\le y<2\pi\,\}$, $M_2=\{\,-\infty<x\le 0,\ 0\le y\le\pi\,\}$ при отображении $w=e^z$;
б) отображение, переводящее множество $0\le x\le 1$ на множество $\begin{cases}u\ge 0,\\ v\ge 0.\end{cases}$

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций: а) $f(z)=\cos z$; б) $f(z)=e^{\bar z}$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, для которой $v(x,y)=2xy+e^x\sin y$, $f(0)=1$.

8. Вычислить интегралы:
а) $\int\limits_L\left(z^2+z\cdot\bar z\right)dz$, L – граница области $D=\left\{z:\ |z-1|<1,\ 0<\arg z<\frac{\pi}{2}\right\}$;
б) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{\cos z\,dz}{(z+1)\cdot(z-4)\cdot(z-2)}$; в) $\int\limits_{-i}^{i}z^3e^{z^2}dz$.

9. Разложить функцию $f(z)=\sin(3z+1)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=2$.

10. Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{(z-5)^2\cdot(z-2)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=5$.

11. Разложить функцию $f(z)=\frac{z}{\left(z^2+1\right)^2}$ в ряд Лорана в кольце $1<|z|<\infty$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

а) $z^3\cdot\cos\frac{1}{z-2}$; б) $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$.

13. Вычислить интегралы: а) $\oint\limits_{|z-3|=2}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}z\,dz$, б) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\cos(1/z)}{1+z}\,dz$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left(1+3\cos^2\varphi\right)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{\left(x^2+9\right)^2}$.

Вариант 5

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+i)^n}{4^n}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{i\pi}{n}} \cdot (z+3)^n$.

3. Вычислить: а) 1^i, б) $\operatorname{Ln}(-i)$.

4. Решить уравнение $\cos^2 z + 10(i-1)\cos z - 100i = 0$.

5. Найти:

а) образ множества $|z| = r \quad (r > 1)$ при отображении $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases} 0 \le \operatorname{Re} z \le 2, \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$ на множество $\operatorname{Im} w \ge 0$.

6. Проверить аналитичность функций: а) $f(z) = \ln z$; б) $f(z) = 2z - 3i\bar{z}$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, для которой $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^x \cos y$, $f(0) = 1$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L e^{\bar{z}}\, dz$, L – прямая, соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \pi i$;

б) $\oint\limits_L \dfrac{z}{\left(z^2+4\right)^2}\, dz$, $L: |z - 2 - 2i| = 3$;

в) $\int\limits_L \cos z\; dz$, L – отрезок, соединяющий точки $z = \pi$ и $z = 2\pi + 2i$.

9. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{z}{z+3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 2$.

10. Разложить функцию $f(z) = \operatorname{ch}\dfrac{z+2}{z-2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$. Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z - 10}$ в ряд Лорана в кольце $2 < |z| < 5$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек: а) $z \cdot e^{\frac{1}{z-1}}$; б) $\dfrac{z^{10}}{(1+z)^5}$.

13. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{z - \sin z}{z^3}\, dz$, б) $\int\limits_L \dfrac{z - \pi/2}{\cos z}\, dz$, $L: |z-2| + |z+2| = 6$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{4 + \sin\varphi}$; б) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

Вариант 6

1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n\,(2^n+1)}+\frac{i}{n^2}\right)$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} e^{i\,n}\,(z-5i)^n$.

3. Вычислить: а) $\operatorname{Re}\cos(5-3\,i)$, б) $\operatorname{Ln}(-1-i)$.

4. Решить уравнение $(\operatorname{sh} z-2i)\cdot(\sin z-2i)=0$.

5. Найти:

а) образы множеств $|z|=1$ и $z=-2+\sqrt{3}\cdot i$ при отображении $w=\sqrt{z+1}$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases}|z-3i|\le 3,\\ |z+3|\le 3\end{cases}$ на множество $\operatorname{Re} w\ge 0$.

6. Проверить аналитичность функций: а) $f(z)=\frac{1}{z+1}$; б) $f(z)=z\cdot|z|$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, для которой $u(x,y)=-2\cos x\cdot\operatorname{sh} y+x$, $f(0)=0.$

8. Вычислить интегралы:

а) $\int_L |z|\,dz$, L– радиус-вектор точки $z=2+i$;

б) $\oint_{|z|=2}\frac{2z-1}{z^2(z-1)(z-3)}\,dz$;

в) $\int_L (z^2-3z)\,dz$ по прямой L, соединяющей точки i, $1+i$.

9. Разложить функцию $f(z)=\cos(z+4)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=3$.

10. Разложить функцию $f(z)=\frac{z}{(z-2)^2(z+1)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2$. Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$ в ряд Лорана в кольце $1<|z|<\infty$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

а) $\frac{\cos z-1}{z^2\sin z}$; б) $z^3\cdot\sin\frac{1}{z-2i}$.

13. Вычислить интегралы:

а) $\int_L\frac{\sin z\,dz}{z^2(z-2\,i)^2}$, $L:\ |z-2i|+|z+2i|=6$; б) $\int_{|z-3|=4}\frac{z}{\cos z-1}\,dz$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(\varphi-\sin\varphi)\,d\varphi$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cdot\sin 2x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

Вариант 7

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} + \frac{i}{n\sqrt{n}}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+4i}{2-3i}\right)^n$.

3. Вычислить: а) $\mathrm{Ln}(-1)$, б) $\mathrm{Arctg}\,(1+i)$.

4. Решить уравнение $\sin^2 z - i\cdot \sin z + 6 = 0$.

5. Найти:

а) образы множеств $\arg z = 2$ и $0<|z|<1$ при отображении $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases} |z-3i|\le 3, \\ |z-i|\ge 1 \end{cases}$ на множество $0 \le \mathrm{Re}\, w \le 5$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций:

а) $w=\frac{z}{(\mathrm{Re}\, z)^2\cdot(\mathrm{Im}\, z)^2}$; б) $f(z)=i\cos z + z$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, для которой $v(x,y)=2\sin x\cdot \mathrm{ch}\, y + y$, $f(0)=0$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L |z|\,dz$, L – граница области D: $\begin{cases} |z|<1, \\ -\pi/2<\arg z<\pi/2; \end{cases}$

б) $\int\limits_L \frac{e^z-1}{z^3}\,dz$, $L: |z|=2$; в) $\int\limits_0^i z\cdot\sin z\,dz$.

9. Разложить функцию $f(z)=\frac{z^2+z+3}{z+3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=1$.

10. Разложить функцию $f(z)=\cos\frac{z-1}{z-3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=3$.

Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z)=\frac{z}{\left(z^2-36\right)^2}$ в ряд Лорана в кольце $6<|z|<\infty$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

а) $f(z)=\frac{1}{z+1}\cdot e^{\frac{1}{z+1}}$; б) $f(z)=\frac{\mathrm{tg}\, z}{z^2}-\frac{e^z}{z}$.

13. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z|=5} \frac{(z-\pi)\,dz}{\sin z}$; б) $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{z^2}-1}{z^3}\,dz$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^2\varphi}{1+\sin^2\varphi}\,d\varphi$; б) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+10x^2+9}$.

Вариант 8

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n}-i\,\frac{\sin(1/n)}{n}\right)$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-2-3i}{2i-1}\right)^n$.

3. Вычислить: а) $\operatorname{Im}\operatorname{sh}(2+i)$, б) $\operatorname{Ln}\left(i\,e^2\right)$.

4. Решить уравнение $\operatorname{ctg} z=\frac{2+3\,i}{i}$.

5. Найти: а) образы множеств $M_1=\{u=c,\ v-\text{любое}\}$, $M_2=\{v=c,\ u-\text{любое}\}$ при отображении $w=\sqrt{z}$;

б) отображение, переводящее множество $\operatorname{Im} z<1$ на множество $|w+i|<2$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций: а) $f(z)=i\cos z$; б) $f(z)=\operatorname{Im} z^2$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, для которой $u(x,y)=-\sin x\cdot\operatorname{sh} y-x^2+y^2$, $f(0)=0$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_L z\,|z|\,dz$, L – граница области $D:\begin{cases}|z|<1,\\ \frac{\pi}{2}<\arg z<\pi;\end{cases}$

б) $\oint\limits_L \frac{dz}{\left[z^2-(5+i)z+8+i\right]^2}$, $L:\ z=3+2i+e^{i\varphi}$;

в) $\int\limits_L z\,dz$, L – первый виток спирали Архимеда $r=\varphi$.

9. Разложить функцию $f(z)=\ln(z+5)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=-2$.

10. Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{\left(z^2-2z-3\right)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=-1$.

Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ в ряд Лорана в кольце $1<|z|<3$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

а) $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}\cos z$; б) $f(z)=\frac{\sin z}{\cos\frac{\pi z}{2}}$.

13. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z|=4}\frac{z-\pi i}{\operatorname{sh} z}\,dz$, б) $\int\limits_{|z+1|=1} z^3\cos\frac{1}{z+1}\,dz$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5+3\cos x}$; б) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x\cdot\sin x\,dx}{(x^4+1)}$.

Вариант 9

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2in}}{n\sqrt{n}}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z-3)^n \cdot \cos^n \frac{\pi i}{\sqrt{n}}$.

3. Вычислить: а) 2^i, б) $\operatorname{Arcsin} i$.

4. Решить уравнение $\operatorname{ch} z = \frac{12+8i}{2-3i}$.

5. Найти:

а) образы множеств $\left\{ |z| \le 2,\ 0 \le \arg z < \frac{\pi}{3} \right\}$ и $y = x$ при отображении $w = z^3$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases} -1 \le x \le 0, \\ y \le 0 \end{cases}$ на множество $\begin{cases} |w| \le 2, \\ \operatorname{Im} w \le 0. \end{cases}$

6. Проверить аналитичность функций: а) $f(z) = \sin z$; б) $f(z) = -z + 3\,i\,\bar{z}$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, для которой $v(x,y) = -\cos x \cdot \operatorname{ch} y - 2xy$, $f(0) = 0$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_L |z|\,\bar{z}\,dz$, L – граница области D: $\begin{cases} |z| < 1, \\ \pi/2 < \arg z < \pi; \end{cases}$

б) $\oint\limits_L \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$, L: $z = i + 2{,}5\,e^{it}$ $(0 \le t < 2\pi)$;

в) $\int\limits_L z\,dz$, L – ломаная $z_1 z_2 z_3 z_4$, где $z_1 = -2$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = 1+i$, $z_4 = 2$.

9. Разложить функцию $f(z) = \frac{z^2}{z-2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 4$.

10. Разложить функцию $f(z) = \sin\frac{z+2}{z-2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$.

11. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2}$ в ряд Лорана в кольце $1 < |z| < 2$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

$$\text{а) } f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z^2} - \frac{1}{\sin z}; \quad \text{б) } f(z) = z^6 \cdot e^{\frac{1}{z}}.$$

13. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_L \frac{dz}{(4i-z)^2 \sin z}$, L: $|z - 4i| = 5$;

б) $\int\limits_L \frac{(e^z - 1)dz}{z(z^2+4)}$, где L – контур, ограниченный параболой $y = x^2 - 1$ и прямой $y = 6$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

$$\text{а) } \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(3+2\cos\varphi)^2}; \qquad \text{б) } \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+4)^3}.$$

Вариант 10

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}+\frac{i}{3^{n-1}}\right)$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-2i}{5i+12}\right)^{n}$.

3. Вычислить: а) $\frac{1}{i^{i}}$, б) $\operatorname{Arccos} i$.

4. Решить уравнение $(\operatorname{sh} z-5i)\cdot(\sin z+3)=0$.

5. Найти:

а) вдоль каких линий плоскости (z) действительная и мнимая часть функции $w=z^{2}$ будут постоянными;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases}|z-3|\le 3,\\ |z-1|\ge 1\end{cases}$ на множество $\operatorname{Im} w\le 0$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций: а) $f(z)=z^{2}$, б) $f(z)=\frac{\bar{z}}{|z|}$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, для которой $u(x,y)=-\cos x\cdot\operatorname{sh} y+x^{2}-y^{2}$, $f(0)=0.$

8. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_{L}|z|\cdot\bar{z}\,dz$, L – граница области D: $\begin{cases}|z|<2,\\ -\pi<\arg z<-\pi/2;\end{cases}$

б) $\oint\limits_{L}\frac{dz}{\left[z^{2}+(2i-1)z-2i\right]^{2}}$, $L:|z+2i|=1$;

в) $\int\limits_{L}z^{2}dz$, L – ломаная $z_1z_2z_3$, где $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=2+i$.

9. Разложить функцию $f(z)=\frac{z}{z+2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=-1$.

10. Разложить функцию $f(z)=\operatorname{ch}\frac{z+1}{z-3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=3$. Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z)=\frac{z}{\left(z^{2}+4\right)^{2}}$ в ряд Лорана в кольце $2<|z|<\infty$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек: а) $\frac{1}{\cos^{2}z}$; б) $\frac{z-\sin z}{z^{2}\sin z}$.

13. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_{|z|=2}\frac{e^{z}+\operatorname{sh} z}{(\pi-2iz)^{3}}dz$, б) $\int\limits_{|z-1|=3/2}\frac{e^{z}-1}{\sin\pi z}dz$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\cos^{2}\varphi}{2-\sin^{2}\varphi}d\varphi$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\cdot\sin 2x}{x^{2}+2x+2}dx$.

Вариант 11

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{i}{2^{n-1}}\right)$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-4}{3+i}\right)^n$.

3. Вычислить: а) $\operatorname{Ln}(1+i)$, б) $\operatorname{Arcth}(1-i)$.

4. Решить уравнение $\sin^2 z=-\frac{9}{16}$.

5. Найти: а) образы множеств $y=x$ и $x^2+y^2\le 4y$ при отображении $w=\frac{1}{z}$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases} |z|\le 1, \\ |z-i|\le 1 \end{cases}$ на множество $\operatorname{Im} w\ge 0$.

6. Проверить аналитичность функций: а) $f(z)=e^{z^2}$; б) $f(z)=z\cdot\operatorname{Re} z$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, для которой $v(x,y)=\sin x\cdot\operatorname{ch} y+2xy$, $f(0)=0$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L |z|\cdot\bar{z}\,dz$, L – граница области $D:\begin{cases} |z|<3, \\ -\frac{\pi}{2}<\arg z<0; \end{cases}$

б) $\oint\limits_L \frac{dz}{(z^2-1)(z-1)(z+3)}$, $L:|z-1|=3$;

в) $\int\limits_L \frac{dz}{z-i}$, L – линия, состоящая из полуокружности $|z-i|=1$, расположенной справа от оси oy, и отрезка z_1z_2, где $z_1=2i$, $z_2=3i$.

9. Разложить функцию $f(z)=\cos(3z+4)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=2$.

10. Разложить функцию $f(z)=\frac{z}{z^2-2z-3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=3$. Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{z^2-5z+4}$ в ряд Лорана в кольце $1<|z|<4$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

$$\text{а) } f(z)=\frac{\cos z}{(z-\pi/2)^2}+\frac{z-\pi/2}{\cos 2z};\quad \text{б) } f(z)=z^3\cdot e^{1/z}.$$

13. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int\limits_L \frac{\sin^2 z}{(z-\pi/2)^3}\,dz,\ L:\ z=2\left(1+e^{it}\right),\ 0\le t<2\pi;\quad \text{б) } \int\limits_{|z|=7}\frac{z(z+2\pi i)}{e^z-1}\,dz.$$

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

$$\text{а) } \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 2\varphi}{5/4-\cos\varphi}\,d\varphi;\qquad \text{б) } \int\limits_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,dx.$$

Вариант 12

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}+i\,\frac{2^n}{n!}\right)$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z+2i-1}{5-i}\right)^n$.

3. Вычислить: а) $\mathrm{Ln}(1-i)$; б) $\mathrm{Arccos}\, i$.

4. Решить уравнение $\mathrm{th}\, z=3-4\,i$.

5. Найти: а) образ множества $M=\{-\infty<x<\infty,\ 0\le y\le\pi\}$ при отображении $w=e^z$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases}|z|\ge 1,\\ |z-i|\le 1\end{cases}$ на множество $\mathrm{Im}\, w\ge 0$.

6. Проверить аналитичность функций: а) $f(z)=z^2+1$; б) $f(z)=\left|e^z\right|$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, для которой $v(x,y)=e^x(\cos y-\sin y)$, $f(0)=0$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_L\frac{z}{\bar z}\,dz$, L – граница области $D=\{z:\ 2\le|z|\le 3,\ \mathrm{Im}\, z\ge 0\}$;

б) $\oint\limits_L\frac{e^{z^2}}{\left(z^2-3z\right)^2}\,dz$, $L:|z-1|=3$;

в) $\int\limits_L\frac{dz}{z}$, L – отрезок, соединяющий точки $z_1=i$, $z_2=3+3\,i$.

9. Разложить функцию $f(z)=\frac{z^2-z-3}{z-3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=2$.

10. Разложить функцию $f(z)=\sin\frac{z-1}{z-4}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=4$.

11. Разложить функцию $f(z)=\frac{z}{(z+1)^2}$ в ряд Лорана в кольце $1<|z|<\infty$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

$$\text{а) } f(z)=\frac{z-\pi/2}{\cos^2 z}-\frac{\sin z}{z-\pi/2};\quad \text{б) } f(z)=z\cdot e^{\frac{1}{z+i}}.$$

13. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z|=3}\frac{z\cdot(z+2i)}{e^{\pi z}-1}dz$,

б) $\int\limits_L\frac{\mathrm{tg}(\pi z)}{z-1}\,dz$, L – граница ромба с вершинами $z_1=2$, $z_2=i$, $z_3=-2$, $z_4=-i$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

$$\text{а) } \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\varphi}{2-\cos\varphi}d\varphi;\quad \text{б) } \int\limits_0^{\infty}\frac{x\cdot\sin 3x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx.$$

Вариант 13

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+i}}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} z^{2n}$.

3. Вычислить: а) $(-1)^{\sqrt{3}}$, б) $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\pi}{3} i\right)$.

4. Решить уравнение $\cos^2 z + 5i \cos z - 6 = 0$.

5. Найти:

а) образы множеств $x + y = 1$ и $1 \le x \le 2$ при отображении $w = z^2$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases} |z| \le 1, \\ |z+i| \ge 1 \end{cases}$ на множество $\operatorname{Im} w \le 0$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций: а) $f(z) = \operatorname{ch} z$; б) $f(z) = e^{|z|}$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$,
для которой $v(x,y) = e^x(\cos y + \sin y)$, $f(0) = 0$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_L \frac{z}{\bar{z}}\, dz$, L – граница области $\begin{cases} 2 < |z| < 3, \\ \operatorname{Re} z < 0, \\ \operatorname{Im} z > 0, \end{cases}$

б) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\operatorname{ch} z\, dz}{(z+1)(z-1)^3}$, в) $\int\limits_0^{2i} (z-i)e^{-z} dz$.

9. Разложить функцию $f(z) = \ln(z+3)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = -2$.

10. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)^2(z-1)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = -2$.

Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{z}{\left(z^2-4\right)^2}$ в ряд Лорана в кольце $2 < |z| < \infty$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

а) $f(z) = \dfrac{\cos \pi z}{(2z-1)^2}$; б) $f(z) = \sin z \cdot \sin^3 \dfrac{1}{z}$.

13. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z|=5} \dfrac{\cos(\pi z/4)\, dz}{(z-2)^2\left(z^2+16\right)}$, б) $\int\limits_{|z|=8} \dfrac{z\, dz}{\sin z}$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{3+\sin\varphi}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x \cdot \sin x}{x^2+4} dx$.

Вариант 14

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\left(i n^2\right)}{5^{n^2}}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}(z+3)^n$.

3. Вычислить: а) $\operatorname{Ln}\left(i e^2\right)$; б) $\operatorname{Arctg} 2i$.

4. Решить уравнение $\operatorname{th} z = 1-2i$.

5. Найти:

а) образы множеств $\arg z = a$ и $0 \le y \le 1$ при отображении $w = z^2$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases} |z+1| \ge 1, \\ |z+2| \le 2 \end{cases}$ на множество $\operatorname{Im} w \le 0$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций:

а) $f(z) = z \cdot e^z$; б) $f(z) = 5\bar{z} - 3iz$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, для которой $u(x,y) = x^2 - y^2$, $f(0) = 0$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_L \frac{z}{\bar{z}}\, dz$, L – граница области $\begin{cases} 2 < |z| < 3, \\ \operatorname{Im} z < 0; \end{cases}$

б) $\oint\limits_L \dfrac{e^{\frac{1}{z}}\, dz}{\left(z^2+9\right)^2}$, $L: |z+3i| = 2$, в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}i} z e^z\, dz$.

9. Разложить функцию $f(z) = \sin\left(2z+3\right)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 1$.

10. Разложить функцию $f(z) = \cos\dfrac{z+1}{z-2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 2$. Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-2)}$ в ряд Лорана в кольце $1 < |z| < 2$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

а) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2} - \dfrac{1}{\sin z^2}$; б) $f(z) = 2i \cos\dfrac{1}{z-i}$.

13. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z-3|=2} \dfrac{z\, dz}{(z-4)^2(z+1)}$, б) $\int\limits_{|z-2\pi i|=1} \dfrac{z^2}{e^z-1} dz$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{1-2\cos\varphi}{5-4\cos\varphi}\, d\varphi$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2}{1+x^4} dx$.

Вариант 15

1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{n^2}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n + i\,3^n\right)\left(z-1+i\right)^n$.

3. Вычислить: а) $\operatorname{Re}\sin\left(1+i\right)$; б) $\operatorname{Arcsin}\left(-3i\right)$.

4. Решить уравнение $\sin^2 z + \left(4-3i\right)\sin z - 12i = 0$.

5. Найти: а) образы множеств $M_1 = \left\{ x=0,\;\; y - \text{любое} \right\}$, $M_2 = \left\{ 0 \le y \le 1,\;\; x - \text{любое} \right\}$ при отображении $w = z^2$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases} \left| z+2 \right| \le 2, \\ \left| z+2i \right| \le 2 \end{cases}$ на множество $\operatorname{Im} w \le 0$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций:

а) $f(z) = z \cdot \sin z$; б) $f(z) = 2\overline{z} - 4iz$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, для которой $u(x,y) = x\,y$, $f(0) = 0$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_L \frac{z}{\overline{z}}\,dz$, L – граница области $\begin{cases} 2 < |z| < 3, \\ \operatorname{Re} z > 0; \end{cases}$

б) $\oint\limits_L \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z-1)(z-3)^2}\,dz$, $L: \left| z-3 \right| = 1$; в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (z-1)\cos z\,dz$.

9. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{z-2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 3$.

10. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{(z+5)^2(z-1)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = -5$. Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{z^2 - 6z + 8}$ в ряд Лорана в кольце $2 < \left| z \right| < 4$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

а) $f\left(z\right) = \frac{\cos z}{z} - \frac{z}{\sin^2 z}$; б) $f\left(z\right) = \cos\frac{1}{z+2i}$.

13. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L \frac{dz}{\left(z-1\right)^2\left(z^2+1\right)}$, $L: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$; б) $\int\limits_{|z-1|=2} z^3 e^{1/(z-1)}\,dz$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\,dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx$.

Вариант 16

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+i)^n}{2^{n/2}\cos(in)}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$.

3. Вычислить: а) $\operatorname{Re}\cos(1+i)$, б) $\operatorname{Arccos} 2$.

4. Решить уравнение $\operatorname{ctg} z = 2 - i$.

5. Найти: а) прообразы множеств $M_1 = \{ v = c,\ u - \text{любое} \}$, $M_2 = \{ 0 \le v \le 2,\ u - \text{любое} \}$ при отображении $w = z^2$;

б) отображение, переводящее множество $0 \le \arg z \le \dfrac{3}{2}\pi$ на множество $|w - 1 - i| \le \pi$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций:

а) $f(z) = z \cdot \cos z$; б) $f(z) = \arg z$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, для которой $u(x,y) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y$, $f(0) = 1$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L z \cdot \operatorname{Im}(z^2)\,dz$, L: $\{ \operatorname{Re} z = 1,\ |\operatorname{Im} z| \le 1 \}$;

б) $\oint\limits_L \dfrac{dz}{\left[z^2 - (4 - 2i)z + 7 - 4i\right]^2}$, L: $|z - 2| = 2$;

в) $\int\limits_i^1 \left(i z^2 - 2z\right) dz$.

9. Разложить функцию $f(z) = \cos(2z + 3)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 1$.

10. Разложить функцию $f(z) = \operatorname{sh}\dfrac{z-1}{z-4}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 4$. Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{z}{\left(z^2 + 25\right)^2}$ в ряд Лорана в кольце $5 < |z| < \infty$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

а) $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{z^2}$; б) $f(z) = \dfrac{1}{1-z} \cdot \sin\dfrac{1}{z}$.

13. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_{|z|=4} \dfrac{\sin z\,dz}{(z-\pi)^5}$, б) $\int\limits_L \operatorname{tg}(\pi z)\,dz$, L: $|z - i| + |z + i| = 3$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\sin\varphi + \cos\varphi}{3 + 2\sin\varphi}\,d\varphi$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2}{\left(x^2+1\right)^3}\,dx$.

Вариант 17

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2^n}{n^n}+i\,\dfrac{\sqrt{n}}{3^n}\right)$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^{n^2}$.

3. Вычислить: а) $\operatorname{Ln} i$; б) $\operatorname{Arcsh} i$.

4. Решить уравнение $\cos^2 z+(3i-2)\cdot\cos z-6i=0$.

5. Найти: а) образы множеств $M_1=\{\,y=c,\;\; x-\text{любое}\}$, $M_2=\{\,0\le y\le 1,\;\; x-\text{любое}\,\}$ при отображении $w=\dfrac{1}{z}$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases}0\le x<\infty,\\ 0\le y\le 2\end{cases}$ на множество $\begin{cases}|\,w\,|\ge 1,\\ \operatorname{Im} w\le 0.\end{cases}$

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций:

$$\text{а) } f(z)=\frac{z-1}{z+1};\quad \text{б) } f(z)=\sin\left(\operatorname{Re} z\right).$$

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, для которой $v(x,y)=\dfrac{2y}{x^2+y^2+2x+1}$, $f(1)=0$.

8. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_L z\cdot\operatorname{Im}\left(z^2\right)dz$, L – отрезок $\{\operatorname{Im} z=-1,\; |\operatorname{Re} z\,|\le 2\}$;

б) $\oint\limits_L \dfrac{\operatorname{ch}(i\,z)}{z^2+(2-i)\,z-2i}\,dz$, $L:\;|\,z-i\,|=2$; в) $\int\limits_0^{\ln 2} z e^z dz$.

9. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z^2}{z+2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=-3$.

10. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z-4)^2(z-1)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=4$.

11. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z-3}$ в ряд Лорана в кольце $1<|\,z\,|<3$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

$$\text{а) } f(z)=z^2\sin\frac{1}{z};\quad \text{б) } f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{e^z-1}.$$

13. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L \dfrac{\cos z}{(z-\pi/2)^4}\,dz$, $L:\;|\,z-1\,|+|\,z+1\,|=4$, б) $\int\limits_{|z-\pi i|=3} \dfrac{z-\pi i}{\left(e^z+1\right)^2}\,dz$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

$$\text{а) } \int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{1+2i\,\sin x};\quad \text{б) } \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}\,dx.$$

Вариант 18

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \sin(i n)}{3^n}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(3^n + n\right) \cdot \left(z + 1 - 2i\right)^n$.

3. Вычислить: а) $\operatorname{Ln}(-e)$; б) $\operatorname{Arccos} \pi$.

4. Решить уравнение $(\operatorname{sh} z - 0{,}5) \cdot (\sin z - 5) = 0$.

5. Найти:

а) образы множеств $M_1 : \{y = 0,\ 0 \le x < \infty\}$, $M_2 : \{0 \le x \le 1,\ \ y - \text{любое}\}$ при отображении $w = e^z$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases} \operatorname{Re} z \le 0, \\ \operatorname{Im} z \le 0 \end{cases}$ на множество $\begin{cases} \operatorname{Re} w \le 0, \\ 0 \le \operatorname{Im} w \le \pi. \end{cases}$

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций:

$$\text{а) } f(z) = z^4; \quad \text{б) } f(z) = \cos(\operatorname{Re} z).$$

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$, для которой $v(x, y) = e^x \cdot \sin y$, $f(0) = -i.$

8. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_L z \operatorname{Im}\left(z^2\right) dz$, L – граница области $\begin{cases} \operatorname{Im} z < 0, \\ |z| < 2; \end{cases}$

б) $\oint\limits_L \dfrac{z\,dz}{(z-2)(z+4)^3}$, $\quad L : |z+3| = 2$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}+i} \sin z\,dz$.

9. Разложить функцию $f(z) = \ln(z-2)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 4$.

10. Разложить функцию $f(z) = \sin\dfrac{z-1}{z-3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 3$.

Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)^2}$ в ряд Лорана в кольце $2 < |z| < \infty$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

$$\text{а) } f(z) = \frac{1}{\sin z}; \qquad \text{б) } f(z) = z^2 e^{\frac{1}{1-z}}.$$

13. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int\limits_{|z-3|=2} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{tg} z\,dz, \quad \text{б) } \int\limits_{|z|=2} z^2 \sin\frac{1}{z-1}\,dz.$$

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

$$\text{а) } \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x}; \qquad \text{б) } \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}.$$

Вариант 19

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3i-1}{4n+2}\right)^n+\dfrac{i}{n^5}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-4\,i)^n}{n^3\sqrt{n}}$.

3. Вычислить: а) $|\sin 2i|$; б) $\operatorname{Arcsh}10$.

4. Решить уравнение $\operatorname{tg} z=1-i$.

5. Найти:

а) образы множеств $M_1:\ |z|=R,\quad M_2=\{1\le y\le 2,\ \ x-\text{любое}\}$ при отображении $w=\frac{1}{z}$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases}|z|\ge 1,\\ \operatorname{Im} z\ge 0\end{cases}$ на множество $0\le \operatorname{Re} w\le 1$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций:

а) $f(z)=z^2-\operatorname{Re} z$, б) $f(z)=2i\sin z+z$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+i\ v(x,y)$, для которой $v(x,y)=e^y\cos x$, $f(0)=i.$

8. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_L z\cdot\operatorname{Im}\left(z^2\right)dz$, L – граница области $\begin{cases}\operatorname{Im} z>0,\\ |z|<1;\end{cases}$

б) $\oint\limits_L \dfrac{z\cdot\operatorname{sh} z}{\left(z^2-9\right)^2}dz$, $L:\ |z+2|=4$; в) $\int\limits_1^i z\,e^z\,dz$.

9. Разложить функцию $f(z)=\sin(z+2)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=3$.

10. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z}{z^2-z-6}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=-2$. Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z}{(z+3)^2}$ в ряд Лорана в кольце $3<|z|<\infty$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

а) $f(z)=e^{1/z^3}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z+0{,}5}$.

13. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L \dfrac{z-\pi/2}{\cos z}dz$, $L:\ |z-2|+|z+2|=6$. ; б) $\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{z-1}}\cdot\sin\dfrac{1}{z-1}\,dz$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\varphi}{(5+3\cos\varphi)^2}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{(x+1)\,dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$.

Вариант 20

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(i\,n)}{2^{n}}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z+1)^{2n+1}$.

3. Вычислить: а) e^{i}; б) $\operatorname{Arcth}4$.

4. Решить уравнение $\cos^{2}z+3(1+i)\cos z+9i=0$.

5. Найти: а) образы множеств $M_1:\ \{x=c,\ \ y-\text{любое}\}$, $M_2:\ \{y=c,\ \ x-\text{любое}\}$ при отображении $w=e^{z}$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases}|z-1|\ge 1,\\ |z-3|\le 3\end{cases}$ на множество $\operatorname{Im}w\le 0$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций:

а) $f(z)=z^{-1}$; б) $f(z)=i\,\sin\overline{z}$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, для которой $v(x,y)=e^{x}\left(y\cos y+x\sin y\right)$, $f(1)=e.$

8. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{L}\operatorname{Im}z\,dz$, L – отрезок, соединяющий точки $(1-i)$ и $(3+3i)$;

б) $\oint\limits_{L}\dfrac{e^{z}dz}{z\,(1-z)^{3}}$, $L:\ |z-1|=2$;

в) $\int\limits_{L}z^{3}dz$, L – ломаная $z_1z_2z_3$, соединяющая точки $z_1=-4$, $z_2=1+i$, $z_3=4$.

9. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z^{2}}{z+3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=2$.

10. Разложить функцию $f(z)=ch\dfrac{z-4}{z-1}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$. Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z}{\left(z^{2}-1\right)^{2}}$ в ряд Лорана в кольце $1<|z|<\infty$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

а) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z-1}$; б) $f(z)=\dfrac{\cos 2z}{(z-\pi)\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^{2}}$.

13. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_{|z|=4}\dfrac{z-\pi i}{\operatorname{sh}z}\,dz$; б) $\int\limits_{|z-i|=2}\dfrac{1}{z}\cdot\cos\dfrac{1}{z-2i}\,dz$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{2+\cos\varphi}{2-\sin\varphi}\,d\varphi$; б) $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{x\,\sin x}{\left(x^{2}+1\right)^{2}}\,dx$.

Вариант 21

1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(i\sqrt{n}\right)}{\sin(i\,n)}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-3i}{1+2i}\right)^{n}$.

3. Вычислить: а) $(3-4i)^{1-i}$; б) $\operatorname{Arccos} 2$.

4. Решить уравнение $(\operatorname{sh} z+5i)(\sin z+5)=0$.

5. Найти:

а) образы множеств $|z+i|=1$ и $2\le y\le 3$ при отображении $w=\frac{1}{z}$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases} |z|\le 1, \\ |z-i|\le 1 \end{cases}$ на множество $\operatorname{Im} w\ge 0$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций:

а) $(i+1)\,e^{z}$; б) $\bar{z}\cdot|z|$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+i\;v(x,y)$, для которой $u(x,y)=2\left(x^2-y^2-3x\right)$, $f(0)=0$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L z\cdot\operatorname{Re} z\,dz$, L – прямая, соединяющая точки $(1-i)$ и $(3+3i)$;

б) $\int\limits_L \frac{e^{z}\,dz}{(z+i)^4}$, $L:\ z+\frac{i}{2}=2e^{i\varphi}$; в) $\int\limits_1^i \left(3z^4-2z^3\right)dz$.

9. Разложить функцию $f(z)=\frac{z}{z+4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=-2$.

10. Разложить функцию $f(z)=\cos\frac{z+5}{z-3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=3$. Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{(z+2)^2(z-1)}$ в ряд Лорана в кольце $1<|z|<2$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

а) $\cos\frac{1}{(z-i)^2}$; б) $\frac{1}{z^3\left(z^2+4\right)^2}$.

13. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z-3|=4} \frac{z}{\cos z-1}\,dz$; б) $\int\limits_{|z+1|=2} \frac{1}{z+2}\cdot\sin\frac{1}{z+1}\,dz$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

Вариант 22

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\operatorname{tg}(i\pi n)}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{3+4i}\right)^n$.

3. Вычислить: а) $\operatorname{Ln}(-1)$; б) $\operatorname{Arcsin}(i)$.

4. Решить уравнение $\operatorname{tg} z = 10 + i$.

5. Найти:

а) прообразы множеств M_1: $\{u = c,\ v - \text{любое}\}$, M_2: $\{v = c,\ u - \text{любое}\}$ при отображении $w = \frac{1}{z}$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases} |z| \geq 1, \\ |z - i| \leq 1 \end{cases}$ на множество $\operatorname{Im} w \geq 0$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций:

а) $f(z) = e^z + 3z$; б) $f(z) = z \cdot \operatorname{Im} z$.

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$, для которой $u(x, y) = y + \frac{x}{x^2 + y^2}$, $f(1) = -i$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L |z|^2 dz$ по прямой L, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = R \cdot e^{i\pi/4}$;

б) $\oint\limits_L \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz$, L: $x^2 + y^2 + 6y = 0$; в) $\int\limits_{-1-i}^{1+i}(2z + 1)dz$.

9. Разложить функцию $f(z) = \ln(2z + 3)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 5$.

10. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 3$.

Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{(z^2 + 9)^2}$ в ряд Лорана в кольце $3 < |z| < \infty$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек: а) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$; б) $f(z) = \operatorname{tg} 2z$.

13. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_L \frac{dz}{(4i - z)^2 \sin z}$, L: $|z - 4i| = 5$; б) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos(1/z)}{1 - z} dz$.

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2 + \cos^2\varphi)^2}$; б) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x \cdot \sin 2x}{(x^2 + 4)^2} dx$.

Вариант 23

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7^n}{n^7}+(-1)^{n-1}\frac{i}{n\sqrt{n}}\right)$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\sqrt{n}}$.

3. Вычислить: а) $(-1)^{\sqrt{5}}$; б) $\operatorname{Arcsin} 5$.

4. Решить уравнение $\sin^2 z+(2i-2)\sin z-4i=0$.

5. Найти:

а) образы множеств $x=c$ и $0\le x\le 1$ при отображении $w=\frac{1}{z}$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases}|z|\le 1,\\ |z+i|\ge 1\end{cases}$ на множество $|w+i|\le 1$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций:

$$\text{а) } f(z)=z^2\cdot e^z;\quad \text{б) } f(z)=5\,\bar{z}+\frac{1}{z}.$$

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, для которой $v(x,y)=\operatorname{ch}x\cdot\sin y$, $f(0)=0$.

8. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_L |z|\,\bar{z}\,dz$, L – граница области $\begin{cases}\operatorname{Im} z>0,\\ |z|<1;\end{cases}$

б) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{\cos z}{\left(z^2-\pi^2\right)}dz$; в) $\int\limits_i^1 z\cdot\sin z\,dz$.

9. Разложить функцию $f(z)=\frac{z^2}{z-1}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=-2$.

10. Разложить функцию $f(z)=\operatorname{sh}\frac{z-3}{z-1}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$. Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z)=\frac{z}{(z-2)(z-5)}$ в ряд Лорана в кольце $2<|z|<5$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

$$\text{а) } f(z)=\sin z\cdot\sin\frac{1}{z};\quad \text{б) } f(z)=\frac{1}{z\left(1-e^{2z}\right)}.$$

13. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1}\frac{\left(e^{z^2}-1\right)dz}{z^2\left(z^2-1\right)};\quad \text{б) } \int\limits_{|z|=1}\left(i\,z\cos\frac{1}{z}-e^{\frac{i}{z}}\right)dz.$$

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

$$\text{а) } \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\varphi}{5-3\cos\varphi}d\varphi;\quad \text{б) } \int\limits_0^{\infty}\frac{\cos 2x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}dx.$$

Вариант 24

1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\operatorname{sh}(i n)}$.

2. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{3^n} (z-i)^n$.

3. Вычислить: а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+i \ln 2\right)$; б) $\operatorname{Arctg}\dfrac{i}{3}$.

4. Решить уравнение $\cos^2 z+(3+2i) \cos z+6i=0$.

5. Найти:

а) образ множества M_1: $\{ y=0,\ x-$любое$\}$, M_2: $\{0 \le y < 2\pi,\ x-$любое$\}$ при отображении $w=e^z$;

б) отображение, переводящее множество $\begin{cases} |z+1| \ge 1, \\ |z+2| \le 2 \end{cases}$ на множество $\operatorname{Im} w \le 0$.

6. Проверить аналитичность (регулярность) функций:

$$\text{а) } f(z)=-\frac{i}{z}; \quad \text{б) } f(z)=\operatorname{sh}(\operatorname{Im} z).$$

7. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+i\ v(x,y)$, для которой $u(x,y)=x^3-3xy^2+y$, $f(0)=0$.

8. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \oint\limits_{|z|=1} (2z+1)\, \bar{z}\, dz; \quad \text{б) } \oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1-\sin z}{z^4}\, dz; \quad \text{в) } \int\limits_{i}^{0} (z-i)\, e^z\, dz.$$

9. Разложить функцию $f(z)=\cos(z+2)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=-1$.

10. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z+1)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2$.

Установить область сходимости ряда.

11. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2-6z+8}$ в ряд Лорана в кольце $2<|z|<4$.

12. Для указанных функций определить все особые точки, их характер и найти вычеты относительно изолированных особых точек:

$$\text{а) } f(z)=\frac{\sin 3z}{(z-\pi/3)(z-\pi/2)^2}; \quad \text{б) } f(z)=\frac{z^4}{1+z^4}.$$

13. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int\limits_{|z|=7} \frac{z(z+2\pi i)}{e^z-1}\, dz; \quad \text{б) } \int\limits_{|z-1|=1} e^{\frac{1}{z-1}} \cdot \cos\frac{1}{z-1}\, dz.$$

14. Вычислить интегралы, используя теорию вычетов:

$$\text{а) } \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(5+3\cos x)^2}; \quad \text{б) } \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

2. Индивидуальное задание по операционному исчислению

Вариант 1

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{1}{p\cdot\left(p^2+1\right)^2}$.

2. Решить задачу Коши: $x''-2x'-3x=e^{4t}$, $x(0)=1/5$, $x'(0)=0$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=x+2y, \\ y'=2x+y+1, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{matrix} x=x(t), \;\; y=y(t), \\ x(0)=0, \;\; y(0)=5. \end{matrix}$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+4x(t)=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0; \end{cases}$

   график функции $f(t)$ изображен на рис. 1.

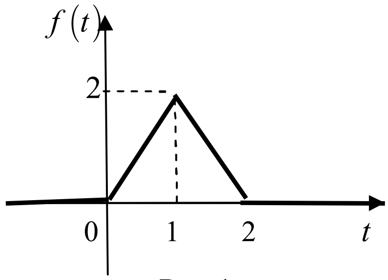

Рис.1

5. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=-x+y+z, \\ y'=x-y+z, \\ z'=x+y+z, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{matrix} x=x(t), \;\; y=y(t), \;\; z=z(t), \\ x(0)=1, \;\; y(0)=0, \;\; z(0)=0. \end{matrix}$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''-x'=\frac{1}{2+e^t}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение $x(t)=t+\int\limits_0^t (t-\tau)\cdot x(\tau)\,d\tau$.

Вариант 2

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2+9\right)\cdot\left(p^2+1\right)}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+x=4\,te^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=-x+3y, \\ y'=x+y+e^{3t}, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{matrix} x=x(t), \;\; y=y(t), \\ x(0)=0, \;\; y(0)=1. \end{matrix}$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+x(t)=f(t), \\ x(0)=1, \;\; x'(0)=0; \end{cases}$

   график функции $f(t)$ изображен на рис. 2.

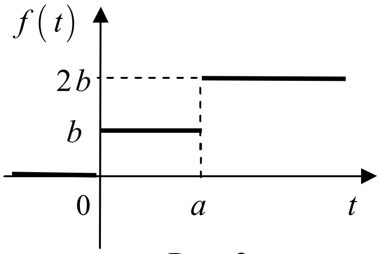

Рис. 2

5. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=-2x-2y-4z, \\ y'=-2x+y-2z, \\ z'=5x+2y+7z, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{matrix} x=x(t), \;\; y=y(t), \;\; z=z(t), \\ x(0)=1, \;\; y(0)=1, \;\; z(0)=1. \end{matrix}$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''-2x'+x=\frac{e^t}{1+t^2}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение $x(t)=1+\int\limits_0^t e^{t-\tau}\cdot x(\tau)\,d\tau$.

Вариант 3

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{p^2}{p^4+13p^2+36}$.

2. Решить задачу Коши: $x''-x=2e^t-t^2$, $x(0)=2$, $x'(0)=0$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=y-2e^t, \\ y'=x+t^2, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{matrix} x=x(t), & y=y(t), \\ x(0)=0, & y(0)=0. \end{matrix}$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+9x(t)=f(t), \\ x(0)=0,\ x'(0)=1; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 3.

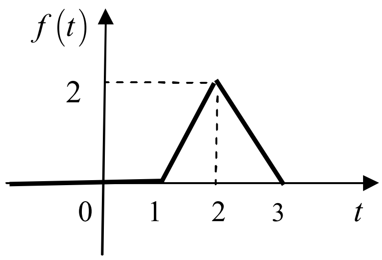

Рис. 3

5. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=y-z, \\ y'=-2x+z, \\ z'=2x-y, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{matrix} x=x(t), & y=y(t), & z=z(t), \\ x(0)=1, & y(0)=0, & z(0)=0. \end{matrix}$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''-x=\frac{1}{\operatorname{ch} t}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение $x(t)=\sin 2t-\int\limits_0^t e^{t-\tau}\cdot x(\tau)\,d\tau$.

Вариант 4

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{p^2+p-1}{(p-2)\cdot\left(p^2-p-20\right)}$.

2. Решить задачу Коши: $x''-x'-2x=3te^t$, $x(0)=1$, $x'(0)=\frac{1}{3}$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=y-5\cos t, \\ y'=2x+y, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{matrix} x=x(t), & y=y(t), \\ x(0)=0, & y(0)=0. \end{matrix}$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)-2x'(t)+x(t)=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 4.

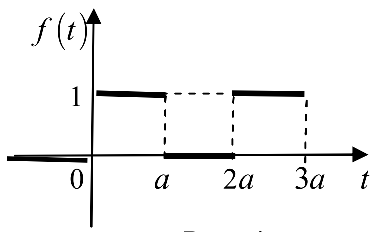

Рис. 4

5. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=-y+z, \\ y'=z, \\ z'=-x+z, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{matrix} x=x(t), & y=y(t), & z=z(t), \\ x(0)=1, & y(0)=0.5, & z(0)=0.5. \end{matrix}$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''+x'=\frac{e^t}{1+e^t}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение $x(t)=t+2-2\cos t-\int\limits_0^t (t-\tau)\cdot x(\tau)\,d\tau$.

Вариант 5

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{p^2+1}{(p-1)^2\cdot p^2}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+x=4\,e^t,\ \ x(0)=4,\ \ x'(0)=-3.$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=3x+2y+4e^{5t}, \\ y'=x+2y, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{matrix} x=x(t), \ \ y=y(t), \\ x(0)=3, \ y(0)=0. \end{matrix}$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+x'(t)=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 5.

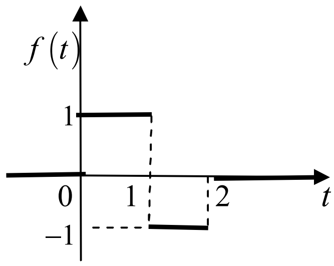

Рис. 5

5. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=y-z, \\ y'=x+y, \\ z'=x+z, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{matrix} x=x(t), \ \ y=y(t), \ \ z=z(t), \\ x(0)=1, \ \ y(0)=2, \ \ z(0)=3. \end{matrix}$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''-2x'+x=\frac{e^t}{1+t}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение

$$x(t)=\sin t+\frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2\cdot x(\tau)\,d\tau .$$

Вариант 6

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{5p+3}{(p-1)\cdot\left(p^2+2p+5\right)}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+2x'+x=2\cos t,\ \ x(0)=0,\ \ x'(0)=1.$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=3x-4y+e^{-2t}, \\ y'=x-2y-3e^{-2t}, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{matrix} x=x(t), \ \ y=y(t), \\ x(0)=0, \ y(0)=4. \end{matrix}$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+4x(t)=f(t), \\ x(0)=x'(0)=1; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 6.

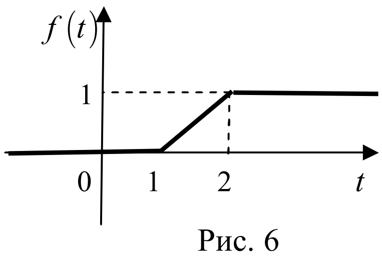

Рис. 6

5. Решить дифференциальное уравнение

$4x'''-8x''-x'-3x=-8e^t$, если $x(0)=x'(0)=x''(0)=1$.

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''-2x'=\frac{e^t}{\operatorname{ch} t}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение

$$x(t)=\cos 3t+\int_0^t e^{t-\tau}\cdot x(\tau)\,d\tau .$$

Вариант 7

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)\cdot\left(p^2+4\right)}$.

2. Решить задачу Коши: $x'''-x'=3\left(2-t^2\right),\ x(0)=x'(0)=x''(0)=1.$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=4x+y-e^{2t}, \\ y'=-2x+y, \end{cases} \text{ если } x(0)=1,\ y(0)=-1.$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+2x(t)=f(t), \\ x(0)=1,\ x'(0)=0; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 7.

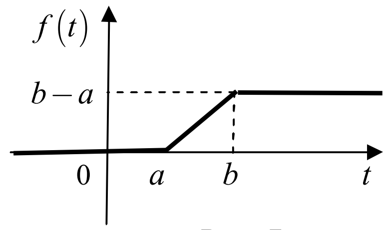

Рис. 7

5. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=y+z, \\ y'=x+z, \\ z'=x+y, \end{cases} \text{ если } \begin{array}{l} x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t), \\ x(0)=-1,\ y(0)=1,\ z(0)=0. \end{array}$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''+2x'+x=\frac{e^{-t}}{1+t^2}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение $x(t)=e^{-2t}+3\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}\cdot x(\tau)\,d\tau$.

Вариант 8

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{p^2+3p+4}{p\cdot(p-1)\cdot(p-2)}$.

2. Решить задачу Коши: $x'''+x'=e^{2t},\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=-x+2y+1, \\ y'=-2x+3y, \end{cases} \text{ если } \begin{array}{l} x=x(t),\ y=y(t), \\ x(0)=0,\ y(0)=-2. \end{array}$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+9x(t)=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0, \end{cases}$ где $f(t)=\begin{cases} \sin t, & t\in[0,\pi], \\ 0, & t\notin[0,\pi]. \end{cases}$

5. Решить дифференциальное уравнение

$$x'''+3x''+3x'+x=1, \text{ если } x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''-x=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение

$$x(t)=t-2\int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)\cdot x(\tau)\,d\tau.$$

Вариант 9

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)\cdot(p^2+4)}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+x=2-10e^{3t},\ x(0)=2,\ x'(0)=-6.$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=5x-3y+2e^{3t}, \\ y'=x+y+5e^{-t}, \end{cases} \text{ если } x(0)=-5,\ y(0)=0.$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)-4x(t)=f(t), \\ x(0)=0,\ x'(0)=1; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 8.

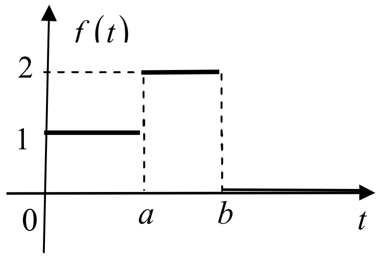

Рис. 8

5. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=x-2y-2z, \\ y'=2x+7y+5z, \\ z'=-2x-4y-2z, \end{cases} \text{ если } \begin{array}{l} x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t), \\ x(0)=0,\ y(0)=3,\ z(0)=-2. \end{array}$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''+2x'+x=\frac{e^{-t}}{(1+t)^2}, \text{ где } x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение $x(t)=\sin 2t-\frac{8}{3}\int\limits_0^t \operatorname{sh}\big(3(t-\tau)\big)\cdot x(\tau)\,d\tau$.

Вариант 10

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{p^2-p+2}{p^3-p^2-6p}$.

2. Решить задачу Коши: $x''-x'+x=2\sin t+3\cos t,\ x(0)=2,\ x'(0)=-1.$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=x+y+1+e^{t}, \\ y'=3x-y, \end{cases} \text{ если } x(0)=-\frac{11}{12},\ y(0)=-\frac{7}{4}.$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)-x(t)=f(t), \\ x(0)=1,\ x'(0)=2, \end{cases}$ где $f(t)=\begin{cases} -\sin t,\ t\in[\pi,2\pi], \\ 0,\quad t\notin[\pi,2\pi]. \end{cases}$

5. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=y+z, \\ y'=x+z, \\ z'=x+y, \end{cases} \text{ если } \begin{array}{l} x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t), \\ x(0)=0,\ y(0)=0,\ z(0)=1. \end{array}$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''+x'=\frac{e^{2t}}{3+e^{t}}, \text{ где } x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение $x(t)=\cos 5t-7/4\int\limits_0^t \operatorname{sh}\big(4(t-\tau)\big)\cdot x(\tau)\,d\tau$.

Вариант 11

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{1}{p\cdot(p+1)\cdot\left(p^2+4\right)}$.

2. Решить задачу Коши: $x''-x'+2\sin t=0,\ \ x(0)=1,\ \ x'(0)=2.$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=x+2y, \\ y'=x-5\sin t, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{matrix} x=x(t), \ \ y=y(t), \\ x(0)=0, \ \ y(0)=2. \end{matrix}$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)-2x'(t)+x(t)=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0, \end{cases}$ $\quad f(t)=\begin{cases} 1-e^{-(t-a)}, & t>a, \\ 0, & t<a. \end{cases}$

5. Решить дифференциальное уравнение

$$x'''+x''=1, \ \text{если} \ x=x(t), \ \ x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''-x'=\frac{e^{2t}}{1+e^t}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение $\quad x(t)=e^{3t}+\dfrac{9}{4}\displaystyle\int_0^t \operatorname{sh}\left(4(t-\tau)\right)\cdot x(\tau)\,d\tau$.

Вариант 12

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)\cdot(p-2)\cdot\left(p^2+4\right)}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+x=2e^t,\ \ x(0)=3,\ \ x'(0)=0.$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=2x-4y, \\ y'=x-3y+3e^t, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{matrix} x=x(t), \ \ y=y(t), \\ x(0)=1, \ \ y(0)=1. \end{matrix}$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+2x'(t)=f(t), \\ x(0)=2, \ \ x'(0)=1; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 9.

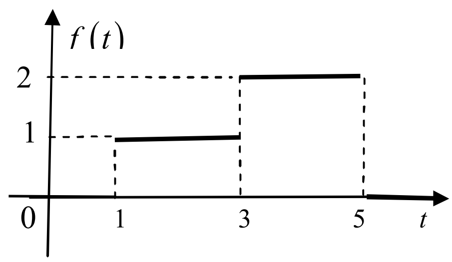

Рис. 9

5. Решить дифференциальное уравнение

$$x'''+x'=e^{2t}, \ \text{если} \ x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''+2x'+x=\frac{t\,e^{-t}}{1+t}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение

$$x(t)=t^3+\int_0^t \sin(t-\tau)\cdot x(\tau)\,d\tau.$$

Вариант 13

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2\cdot(p+2)}$.

2. Решить задачу Коши: $x''-x=t$, $x(0)=1$, $x'(0)=-1$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=2x-y, \\ y'=-2x+y+18t, \end{cases} \quad \text{если} \quad x(0)=y(0)=0.$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)-5x(t)=f(t), \\ x(0)=0, \quad x'(0)=1; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 10.

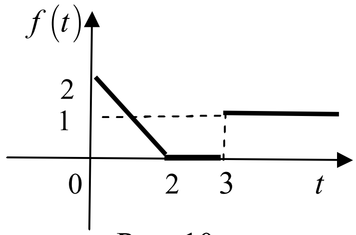

Рис. 10

5. Решить дифференциальное уравнение

$$x'''+x''=\sin t, \text{ если } x(0)=x'(0)=1, \quad x''(0)=0.$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''-x=\frac{1}{1+\operatorname{ch} t}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение

$$x(t)=t+2\int_0^t \cos(t-\tau)\cdot x(\tau)\,d\tau.$$

Вариант 14

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+4x'+4x=3e^{-2t}$, $x(0)=x'(0)=0$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=x+2y+16te^{t}, \\ y'=2x-2y, \end{cases} \quad \text{если} \quad x(0)=-13, \; y(0)=-6.$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+x(t)=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 11.

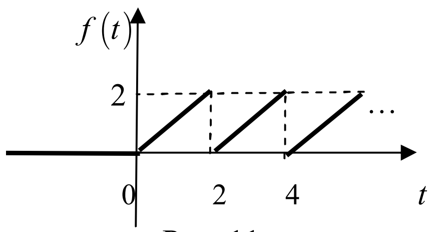

Рис. 11

5. Решить дифференциальное уравнение

$$x'''+x'=10e^{2t}, \text{ если } x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''-2x'+x=\frac{e^t}{\operatorname{ch}^2 t}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение

$$x(t)=e^{2t}+\cos 3t+\int_0^t \sin(t-\tau)\cdot x(\tau)\,d\tau.$$

Вариант 15

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{1}{p^2\cdot\left(p^2+1\right)}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+4x=\sin 2t,\ \ x(0)=x'(0)=0$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=2x+4y-8, \\ y'=3x+6y, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{matrix} x=x(t), \ \ y=y(t), \\ x(0)=-1, \ y(0)=0. \end{matrix}$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)-x'(t)=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 12.

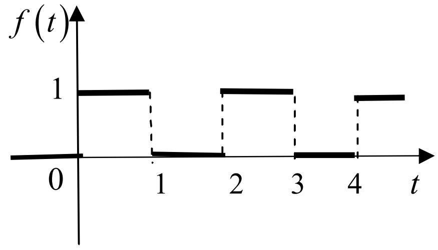

Рис. 12

5. Решить дифференциальное уравнение

$x'''+x''=t$, если $x(0)=-3,\ x'(0)=1,\ x''(0)=0$.

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''+x'=\frac{1}{\left(1+e^t\right)^2}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение

$$x(t)=\sin t+\int_0^t e^{t-\tau}\cdot x(\tau)\,d\tau .$$

Вариант 16

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{p}{p^3+1}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+2x'+2x=6t^2+14\,t+6,\ \ x(0)=1,\ \ x'(0)=2$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=2x-3y, \\ y'=x-2y+2\sin t, \end{cases} \quad \text{если} \quad x(0)=1, \ y(0)=0.$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+3x'(t)=\left|\cos t\right|, \\ x(0)=x'(0)=0. \end{cases}$

5. Решить дифференциальное уравнение

$$x'''+6x''+11x'+6x=1+t+t^2, \text{ если } x(0)=x'(0)=x''(0)=0 .$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''-x=\frac{1}{\operatorname{ch}^3 t}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение

$$x(t)=e^t+\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\cdot x(\tau)\,d\tau .$$

Вариант 17

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+9x=9t^3+6t,\ \ x(0)=2,\ \ x'(0)=1.$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=2x+3y+5t, \\ y'=3x+2y+8e^{t}, \end{cases} \quad \text{если} \quad x(0)=-\frac{31}{6},\ y(0)=\frac{17}{5}.$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+x(t)=\left|\sin wt\right|, \\ x(0)=x'(0)=0,\ w\neq 1. \end{cases}$

5. Решить дифференциальное уравнение

$$x'''-x'=3\left(2-t^2\right),\ \text{если}\ x(0)=x'(0)=x''(0)=1.$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''+4x'+4x=\frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2},\quad \text{где}\quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение

$$x(t)=3t+\int_0^t (t-\tau)\cdot e^{2(t-\tau)}\cdot x(\tau)\,d\tau .$$

Вариант 18

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{e^{-p/2}}{p(p+1)\left(p^2+4\right)}$.

2. Решить задачу Коши: $x''-x=3t^2-7t+9,\ \ x(0)=-15,\ \ x'(0)=9.$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=2x-y, \\ y'=x+2e^{t}, \end{cases} \quad \text{если} \quad x(0)=1,\ y(0)=1$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+4x(t)=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 13.

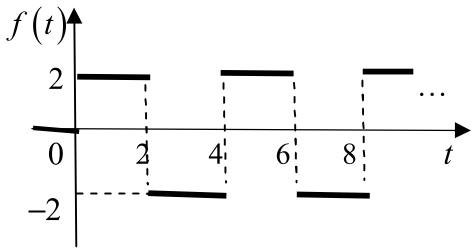

Рис. 13

5. Решить дифференциальное уравнение

$$x'''+x=\frac{t^2}{2}e^{t},\ \text{если}\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''-x=\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t},\quad \text{где}\quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение

$$x(t)=\cos 3t+\int_0^t e^{-(t-\tau)}\cdot x(\tau)\,d\tau .$$

Вариант 19

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+9x=-18\cos 3t$, $x(0)=2$, $x'(0)=6$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=4x-3y+\sin t, \\ y'=2x-y-2\cos t, \end{cases} \quad \text{если} \quad x(0)=1,\ y(0)=0.$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+4x'(t)+3x(t)=f(t), \\ x(0)=0,\ x'(0)=1; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 14.

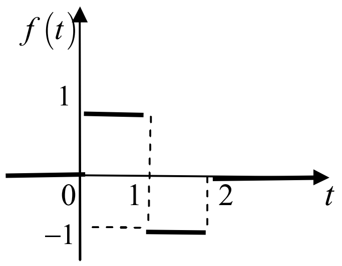

Рис. 14

5. Решить дифференциальное уравнение

$$x'''+x'=e^{2t}, \text{ если } x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''+2x'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение

$$x(t)=e^t+4\int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)\cdot x(\tau)\,d\tau.$$

Вариант 20

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+2x'+x=6e^{-t}$, $x(0)=1$, $x'(0)=2$.

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=2x+y+2e^{t}, \\ y'=x+2y-3e^{4t}, \end{cases} \quad \text{если} \quad x(0)=-1,\ y(0)=-3.$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+2x'(t)-3x(t)=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 15.

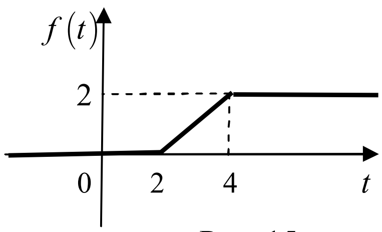

Рис. 15

5. Решить дифференциальное уравнение

$$x'''-2x''+x'=4, \text{ если } x=x(t),\ x(0)=1,\ x'(0)=2,\ x''(0)=-2.$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''-x'=\operatorname{th}^2 t, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение

$$x(t)=e^{-4t}-6\int_0^t \operatorname{ch}4(t-\tau)\cdot x(\tau)\,d\tau.$$

Вариант 21

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{3p^2}{\left(p^3-1\right)^2}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+x'-2x=8t^2-4t, \quad x(0)=5, \; x'(0)=4.$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=x-y+8t, \\ y'=5x-y, \end{cases} \text{ если } x(0)=2, \; y(0)=2 .$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)-2x'(t)-8x(t)=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 16.

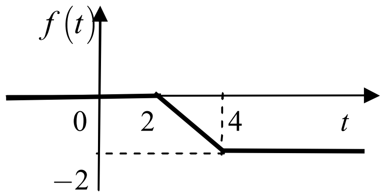

Рис. 16

5. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=-y-z, \\ y'=-x-z, \\ z'=-x-y, \end{cases} \text{ если } \begin{matrix} x=x(t), \; y=y(t), \; z=z(t), \\ x(0)=-1, \; y(0)=0, \; z(0)=1. \end{matrix}$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''-x'=\frac{e^t}{1+e^t}, \quad \text{где } x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение $x(t)=3t+\int\limits_0^t (t-\tau)e^{2(t-\tau)}\cdot x(\tau)\,d\tau$.

Вариант 22

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p\cdot\left(p^2+1\right)}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+4x=8\sin 2t, \; x(0)=1, \; x'(0)=2.$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=2x-y, \\ y'=-x+2y-5e^t\sin t, \end{cases} \text{ если } x(0)=2, \; y(0)=3.$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)-4x'(t)-5x(t)=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0; \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 17.

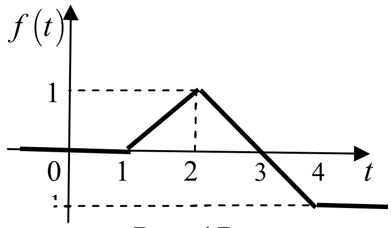

Рис. 17

5. Решить дифференциальное уравнение

$$x'''+x=e^t, \text{ если } x(0)=0, \; x'(0)=2, \; x''(0)=0.$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''+x'=\frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^2}, \quad \text{где } x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение

$$x(t)=\operatorname{sh} t+2\int\limits_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)\cdot x(\tau)\,d\tau .$$

Вариант 23

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2-1\right)^2}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+2x'+x=4t^2-3t-5,\ x(0)=26,\ x'(0)=-19.$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=y+t, \\ y'=x+e^{t}, \end{cases} \quad \text{если} \quad x(0)=1,\ y(0)=0.$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+3x'(t)+1.25x(t)=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0, \end{cases}$

график функции $f(t)$ изображен на рис. 18.

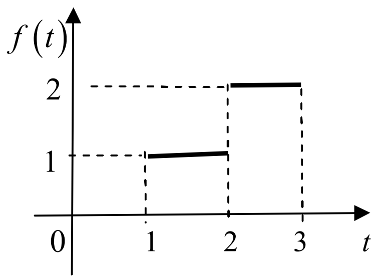

Рис. 18

5. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=y+z, \\ y'=3x+z, \\ z'=3x+y, \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{array}{l} x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t), \\ x(0)=0,\ y(0)=1,\ z(0)=1. \end{array}$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$x''-x=\frac{1}{\mathrm{ch}^3 t}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение $x(t)=e^{3t}+4\int\limits_0^t \mathrm{ch}\left(3(t-\tau)\right)\cdot x(\tau)\,d\tau$.

Вариант 24

1. Найти оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{p^2+2}{\left(p^2+4\right)p^2}$.

2. Решить задачу Коши: $x''+x=14\cos t+6\sin t,\ x(0)=1,\ x'(0)=3.$

3. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=-\ y+e^{3t}, \\ y'=-x+2e^{3t}, \end{cases} \quad \text{если} \quad x(0)=y(0)=0.$$

4. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+2x'(t)=f(t), \\ x(0)=x'(0)=0, \end{cases}$ где $f(t)=\begin{cases} \sin t,\ t\in[0,\pi]\cup[2\pi,3\pi], \\ 0,\quad t\notin[0,\pi]\cup[2\pi,3\pi]. \end{cases}$

5. Решить дифференциальное уравнение

$$x'''+x'=\cos t, \text{ если } x(0)=0,\ x'(0)=-2,\ x''(0)=0.$$

6. С помощью формулы Дюамеля решить дифференциальное уравнение

$$2x''-x'=\frac{e^t}{\left(1+e^{t/2}\right)^2}, \quad \text{где} \quad x(0)=x'(0)=0.$$

7. Решить интегральное уравнение $x(t)=\cos t+\int\limits_0^t (t-\tau)\cdot x(\tau)\,d\tau$.

3. Таблица оригиналов и изображений

№	Оригинал	Изображение	№	Оригинал	Изображение
1	$\lambda f(t)+\mu g(t)$	$\lambda F(p)+\mu G(p)$	12	1	$\frac{1}{p}$
2	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$	13	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$f''(t)$	$p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$	14	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
4	$\int\limits_0^t f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$	15	$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
5	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$	16	$\cos\alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
6	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_p^{+\infty} F(p)dp$	17	$\operatorname{sh}\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
7	$f(t-\alpha)\cdot\eta(t-\alpha)$	$F(p)\cdot e^{-\alpha p}$	18	$\operatorname{ch}\alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
8	$f(t)\cdot e^{\alpha t}$	$F(p-\alpha)$	19	$t\cdot\sin\alpha t$	$\frac{2p\alpha}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$
9	$f(t)*g(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$	$F(p)\cdot G(p)$	20	$t\cdot\cos\alpha t$	$\frac{p^2-\alpha^2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$
10	$f(t)*g'(t)+f(t)\cdot g(0)$	$p\cdot F(p)\cdot G(p)$	21	$t\cdot\operatorname{sh}\alpha t$	$\frac{2p\alpha}{\left(p^2-\alpha^2\right)^2}$
11	$f(t)$ с периодом T	$\frac{1}{1-e^{-pT}}\int\limits_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt$	22	$t\cdot\operatorname{ch}\alpha t$	$\frac{p^2+\alpha^2}{\left(p^2-\alpha^2\right)^2}$

Библиографический список

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / /Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2004. 603 с.
2. Краснов М.Л. Вся высшая математика /М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Эдиториал УРСС, 2004. Т.4. 352 с.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах /П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. М.: Высш. шк., 1997. Ч.3. 304 с.
4. Пантелеев А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. М.: Высш. шк., 2001. 445 с.

Оглавление

Функции комплексного переменного
и операционное исчисление

Сборник типовых заданий

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Компьютерная верстка *Р.М. Миньковой*

ИД № 06263 от 12.11.2001 г.

Подписано в печать 25.01.2013 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Плоская печать Усл. печ.л. 2,38
Уч.-изд. л. 1,4 Тираж Заказ Цена ″С″

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19
Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ

620002, Екатеринбург, Мира, 19