Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Р. М. Минькова

Функции комплексного переменного и операционное исчисление

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по программе бакалавриата и специалитета
по направлениям подготовки
140800.62 – Ядерные физика и технологии;
141401.65 – Ядерные реакторы и материалы;
141405.65 – Технологии разделения изотопов и ядерное топливо;
140801.65 – Электроника и автоматика физических установок;
010900.62 – Прикладные математика и физика;
210100.62 – Электроника и наноэлектроника;
201000.62 –Биотехнические системы и технологии;
200100.62 –Приборостроение;
221700.62 – Стандартизация и метрология;
230100.62 – Информатика и вычислительная техника;
230400.62 –Информационные системы и технологии

Екатеринбург
УрФУ
2013

УДК 517.2: 517.3
ББК 22.161.1
М 62

Рецензенты:
кафедра прикладной математики Уральского государственного экономического университета
(зав. кафедрой, доц., канд. физ.-мат. наук Ю.Б. Мельников);
старший научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН, проф., д-р физ.-мат. наук Е.Ф. Леликова;

Научный редактор − доц., канд. физ.-мат. наук Н.В. Чуксина

Минькова Р.М.

М 62 Функции комплексного переменного и операционное исчисление: учебное пособие / Р.М. Минькова. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2013. 72 с.

ISBN 978-5-321-01701-2

Рассмотрены функции комплексного переменного и операционное исчисление в объеме, необходимом при изучении специальных курсов. Изложение теоретического материала сопровождается решением примеров.

Учебное пособие предназначено для студентов физических и информационных специальностей физико-технического факультета.

Библиогр.: 10 назв. Рис.44.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики» при поддержке физико-технического факультета.

УДК 517.2: 517.3
ББК 22.161.1

ISBN 978-5-321-01701-2

© УГТУ − УПИ, 2013
© Минькова Р.М., 2013

1. Комплексные числа

Кратко напомним понятие комплексных чисел и действий с ними, которые рассматривались ранее.

1.1. Определение, изображение, формы записи

К понятию комплексного числа привело стремление решить уравнение $x^2+1=0$ и извлечь корень из отрицательного числа.

Комплексным числом z называется выражение вида $z=x+iy$, где x, y – действительные числа, i – так называемая мнимая единица, $i^2=-1$.

Числа x, y называются соответственно действительной и мнимой частью комплексного числа z и обозначаются $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$.

Если $x=0$, то число $0+iy=iy$ называется чисто мнимым, если $y=0$, то $x+i\cdot 0=x$ есть действительное число.

Два комплексных числа считаются равными, если равны их действительные части и равны их мнимые части, т.е.

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1=x_2,\ y_1=y_2.$$

Комплексные числа $z=x+iy$ и $\overline{z}=x-iy$, отличающиеся знаком мнимой части, называются комплексно-сопряженными.

Комплексное число $z=x+iy$ изображают точкой M плоскости с координатами x, y или ее радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис. 1). Длина вектора $\overrightarrow{OM}$ называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$ или r:

$$|z|=r=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

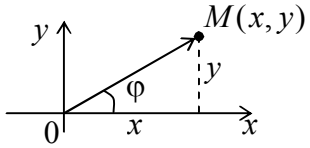

Рис. 1

Угол φ между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительным направлением оси ox называют аргументом комплексного числа z. Угол φ определяется неоднозначно, с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$; договоримся брать то значение φ, которое заключено между $-\pi$ и π, обозначать его $\arg z$ и называть главным значением аргумента.

Наряду с ***алгебраической формой*** $z=x+iy$ комплексного числа рассмотрим еще две формы записи.

Так как $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ (рис.1), то комплексное число $z=x+iy$ можно записать в ***тригонометрической форме*****:** $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Введя функцию $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, комплексное число можно записать в ***показательной форме***: $z=r\cdot e^{i\varphi}$. Итак, имеем три формы записи комплексного числа

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r\cdot e^{i\varphi}.$$

Пример 1.1. Записать комплексное число $z=-1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Чтобы записать z в тригонометрической форме, найдем его модуль и аргумент: $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$, а для правильного отыскания аргумента ре-

комендуем изобразить число z на плоскости (рис. 2). Найдем сначала острый угол φ_1, дополнительный к углу φ: $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{1}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$. Тогда $\varphi = -\pi + \varphi_1 = -\frac{2\pi}{3}$; тригонометрическая и показательная формы записи числа $z = -1 - i\sqrt{3}$ будут следующие:

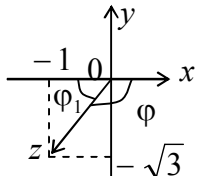

Рис. 2

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\,e^{-\frac{2\pi}{3}i}.$$

1.2. Основные действия с комплексными числами

Операции сложения, вычитания, умножения комплексных чисел определяются следующим естественным образом.

1). ***При сложении (вычитании)*** двух комплексных чисел складываются (соответственно вычитаются) их действительные и мнимые части, т.е.

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + i\,y_1) + (x_2 + i\,y_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2).}. \qquad (1.1)$$

С геометрической точки зрения сложение (вычитание) комплексных чисел равносильно сложению (вычитанию) изображающих их векторов (рис.3). Отметим, что расстояние между комплексными точками z_1 и z_2 равно $|z_1 - z_2|$. Поэтому окружность с центром в точке z_0 радиуса R имеет уравнение $|z - z_0| = R.$

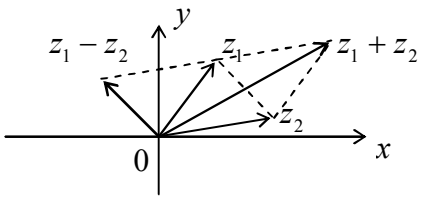

Рис. 3

2). ***Умножение*** двух комплексных чисел в алгебраической форме определяется по правилам умножения двучленов с учетом равенства $i^2 = -1,$ т.е.

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i\,y_1)\cdot(x_2 + i\,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)}. \qquad (1.2)$$

При умножении двух комплексных чисел в тригонометрической форме их модули умножаются, а аргументы складываются; действительно:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i\,(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right] =$$
$$= r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right].$$

Поэтому

$$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2}. \qquad (1.3)$$

В показательной форме

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1\,e^{i\varphi_1}\cdot r_2\,e^{i\varphi_2} = r_1\,r_2\,e^{i\,(\varphi_1+\varphi_2)}}.$$

3). ***Деление*** комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению, т.е. $z = \frac{z_1}{z_2}$, если $z \cdot z_2 = z_1$. Практически при делении двух комплексных чисел в алгебраической форме нужно числитель и знаменатель дроби

$\frac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ умножить на число, сопряженное знаменателю; тогда делителем будет действительное число и

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)\cdot(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}. \qquad (1.4)$$

Например, $\frac{2+5i}{7+3i}=\frac{(2+5i)\cdot(7-3i)}{(7+3i)\cdot(7-3i)}=\frac{14-15i^2+35i-6i}{49-9i^2}=\frac{29+29i}{49+9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

При делении двух комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах их модули делятся, а аргументы вычитаются, т.е.

$$|z|=\frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg z=\arg z_1-\arg z_2. \qquad (1.5)$$

Действительно, если $\frac{z_1}{z_2}=z,$ то $z_1=z\cdot z_2$. Тогда $|z_1|=|z|\cdot|z_2|,$ $\arg z_1=\arg z+\arg z_2$.

Отсюда $|z|=\frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg z=\arg z_1-\arg z_2.$

В показательной форме: $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

4). ***Возведение в степень*** комплексного числа в алгебраической форме осуществляется по правилам возведения в степень двучлена с учетом того, что $i^2=-1,$ $i^3=i^2\cdot i=-i,$ $i^4=i^2\cdot i^2=1$ и т.д. Например, используя формулу для куба разности, получим: $(2-i)^3=2^3-3\cdot2^2\cdot i+3\cdot2\cdot i^2-i^3=8-12i-6+i=2-11i.$

При возведении комплексного числа z в большую степень удобно использовать его тригонометрическую форму $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Учитывая, что при умножении модули умножаются, а аргументы складываются, получим формулу Муавра:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^ne^{in\varphi}. \qquad (1.6)$$

Пример 1.2. Вычислить z^6, если $z=\sqrt{3}+i.$

Решение. Изобразим комплексное число z на плоскости (рис. 4), найдем его модуль и аргумент:

$$|z|=r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2, \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi=\frac{\pi}{6}.$$

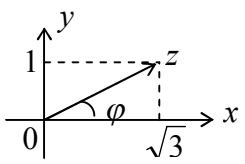

Рис. 4

Тогда $z^6=r^6(\cos6\varphi+i\sin6\varphi)=2^6(\cos\pi+i\sin\pi)=-64.$

5). ***Извлечение корня n-й степени из комплексного числа*** определяется как действие, обратное возведению в степень, т.е. $\sqrt[n]{z}=w,$ если $w^n=z$.

При извлечении корня из комплексного числа z удобно использовать тригонометрическую форму записи комплексного числа. Пусть $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$. Так как $w^n=z,$ то

$$\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

У равных комплексных чисел модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться на число, кратное 2π, то есть

$$\rho^n = r,\ \ n\theta = \varphi + 2\pi k \quad \text{или} \quad \rho = \sqrt[n]{r},\ \ \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

Подставляя эти значения в выражение $\sqrt[n]{z} = w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$ получим

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\,\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\\ k = 0,1,2,\ldots,n-1.} \qquad (1.7)$$

Придавая k значения $0,1,2,\ldots,n-1$, получим n различных значений корня n−й степени из комплексного числа. При других значениях k получим значения корня, совпадающие с уже найденными. Например, при $k = n$ и при $k = 0$ значения корней совпадают:

$$w_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi n}{n} + i\,\sin\frac{\varphi+2\pi n}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\,\sin\frac{\varphi}{n}\right) = w_0.$$

Аналогично, $w_{n+1} = w_1,\ \ w_{n+2} = w_2, \ldots$. Итак, для любого $z \neq 0$

корень степени n из числа z имеет n различных значений.

Пример 1.3. Решить уравнение $z^3 + 1 = 0.$

Решение. Из уравнения имеем $z = \sqrt[3]{-1}$. Найдем модуль и аргумент числа -1: $|-1| = 1,\ \ \arg(-1) = \pi$. Тогда корни уравнения имеют вид:

$$z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{\cos\pi + i\,\sin\pi} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}.$$

Придавая k значения $0,1,2$, получим три корня уравнения:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$
$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

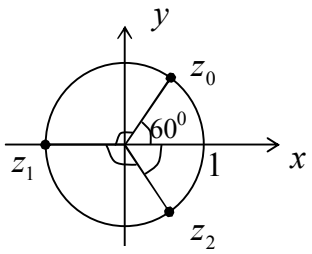

Рис. 5

Эти корни лежат на единичной окружности и делят ее на три равные части (рис. 5).

Если нужно извлечь корень квадратный, то можно и не пользоваться формулой (1.7). Например,

$$\sqrt{12i-5} = \sqrt{12i-9+4} = \sqrt{12i+(3i)^2+2^2} = \sqrt{(2+3i)^2} = \pm(2+3i).$$

Если вы не догадались о таком способе, то можно обозначить $\sqrt{12i-5} = x + iy$ и возвести это равенство в квадрат: $12i - 5 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$.

Приравнивая действительные и мнимые части, получим:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ 2xy = 12, \end{cases} \Rightarrow x^2 - \frac{6^2}{x^2} = -5 \Rightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0.$$

Действительные корни получившегося биквадратного уравнения $x = \pm 2$. Тогда $y = \pm 3$ и $z = x + iy = \pm(2+3i)$.

2. Функции комплексного переменного

Если каждому комплексному числу z из множества D соответствует комплексное число w из множества E, то w является функцией переменной z: $w = f(z)$. При этом D есть область ее определения, а E − множество ее значений.

Мы будем рассматривать как однозначные, так и многозначные функции, т.е. каждому значению аргумента соответствует одно или много значений функции.

Например, функция $w = \dfrac{3z - i}{z^2 + 1}$ определена при $z \neq \pm i$ и является однозначной функцией; функция $w = \sqrt[5]{z}$ является пятизначной функцией; функция $w = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ является многозначной функцией.

В дальнейшем нам нужно будет выделять у функции ее действительную и мнимую части. Как это делается, рассмотрим на примере функции $w = z^2$. Так как $z = x + iy$, то $w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Таким образом, функция $w = z^2$ представлена в виде $w = u(x, y) + i\,v(x, y)$, где $u(x, y) = x^2 - y^2$ − ее действительная часть, а $v(x, y) = 2xy$ − ее мнимая часть.

Аналогичным образом любую функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$\boxed{\begin{array}{c} f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y); \\ u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z). \end{array}}$$

2.1. Элементарные функции

Функции $e^z, \sin z, \cos z$

Известно, что функции $e^z, \sin z, \cos z$ для любого действительного z представимы в виде суммы следующих рядов:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \tag{2.1}$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \tag{2.2}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \tag{2.3}$$

Нетрудно показать, пользуясь признаком Даламбера, что эти ряды сходятся и для любого комплексного числа z. Поэтому формулы (2.1), (2.2), (2.3) естественно взять за определения функций $e^z, \sin z, \cos z$ для любого комплексного числа z. Заметим, что функции $\sin z, \cos z$ нельзя определять, как в тригонометрии, т.к. угол z не может быть комплексным. Поэтому и пришлось прибегнуть к помощи рядов.

Так как ряд для $\sin z$ содержит только нечетные степени z, то $\sin(-z) = -\sin z$, т.е. функция $\sin z$ − нечетная. Ряд для $\cos z$ содержит только четные степени z, поэтому $\cos(-z) = \cos z$ и функция $\cos z$ − четная.

Связь между функциями $e^z, \sin z, \cos z$

I). Запишем функцию e^{iz}:

$$e^{iz} = 1 + (iz) + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \dots$$

Сгруппируем слагаемые, стоящие на нечетных местах, и отдельно слагаемые, стоящие на четных местах, и учтем, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, ...:

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right).$$

Сумма первого ряда равна $\cos z$, сумма второго ряда равна $\sin z$. Поэтому

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z.} \qquad (2.4)$$

2). Заменяя в формуле (2.4) z на $-z$ и используя четность функции $\cos z$ и нечетность функции $\sin z$, получим

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad . \qquad (2.5)$$

Складывая и вычитая формулы (2.4) и (2.5), получим: $e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z$, $e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$, или

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}, \qquad \boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}. \qquad (2.6)$$

Формулы (2.4), (2.6) устанавливают связь между функциями e^z, $\sin z$, $\cos z$ и называются ***формулами Эйлера.***

Свойства функций $e^z, \sin z, \cos z$

1). $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

Действительно, используя определение функции e^z, получим

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \left(1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \frac{z_1^4}{4!} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \frac{z_2^4}{4!} + \dots\right) =$$

$$= 1 + \frac{z_1 + z_2}{1!} + \frac{z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2}{2!} + \frac{z_1^3 + 3z_1^2 z_2 + 3z_1 z_2^2 + z_2^3}{2!} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{z_1 + z_2}{1!} + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2!} + \frac{(z_1 + z_2)^3}{3!} + \dots = e^{z_1 + z_2}.$$

2). Функция e^z имеет период $\boxed{T = 2\pi i.}$

Действительно, используя предыдущее свойство, а затем формулу (2.4), получим

$$e^{z + 2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

3). Функции $\sin z$, $\cos z$ имеют период $T = 2\pi$.

Действительно, используя формулу (2.6) и периодичность функции e^z, получим

$$\cos(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z + 2\pi)} + e^{-i(z + 2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Аналогично проверяется периодичность функции $\sin z$.

4). а) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,

б) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2$, г) $\sin 2z = 2 \sin z \cdot \cos z$,

в) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$, д) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$.

Для проверки первых трех формул нужно записать $\sin z$, $\cos z$ по формулам Эйлера (2.6). Следующие две формулы получаются из предыдущих при $z_1 = z_2$.

5). Функции $\sin z$, $\cos z$ − не ограничены на комплексной плоскости.

Например, $\cos(in) = \dfrac{e^{i(in)} + e^{-i(in)}}{2} = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Обратим внимание, что свойства I), 3), 4) функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ такие же, как для соответствующих функций действительной переменной. Свойства же 2) и 5) имеют место только для функций комплексной переменной.

Перечисленные свойства используются при вычислении значений функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ и при решении уравнений, содержащих эти функции.

Пример 2.1. Вычислить $e^{3+\pi i}$.

Решение. По свойству 1) и формуле (2.1): $e^{3+\pi i} = e^3 \cdot e^{\pi i} = e^3(\cos\pi + i\sin\pi) = -e^3$.

Гиперболические функции

Для комплексного аргумента гиперболические синус и косинус вводятся так же, как для действительного аргумента, т.е.

$$\boxed{\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}}. \qquad (2.7)$$

Перечислим свойства функций $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$.

1). Функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ имеют период $2\pi i$ (так же, как функция e^z).

2). Для комплексного аргумента существует следующая связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos(iz) = \operatorname{ch} z, & \sin(iz) = i\operatorname{sh} z, \\ \operatorname{ch}(iz) = \cos z, & \operatorname{sh}(iz) = i\sin z. \end{array}} \qquad (2.8)$$

Проверим одну из этих формул: $\cos(iz) = \dfrac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z$.

3). Для комплексного аргумента (как и для действительного):

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,$$

$$\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{sh} 2z = 2\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z.$$

Пример 2.2. Вычислить: а) $\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}i$, б) $\operatorname{ch}\pi i$, в) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\ln 2\right)$.

Решение. а) $\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}i = i\sin\frac{\pi}{2} = i$; б) $\operatorname{ch}\pi i = \cos\pi = -1$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\ln 2\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos(i\ln 2) - \sin\frac{\pi}{2}\sin(i\ln 2) = -\sin(i\ln 2) = -i\operatorname{sh}(\ln 2) =$

$$= -i \cdot \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = -i\frac{2 - (2)^{-1}}{2} = -\frac{3i}{4}.$$

Логарифмическая функция

Логарифмическая функция вводится как обратная к показательной, т.е.

$w = \operatorname{Ln} z$, если $z = e^w$.

Пусть $w = u + iv$. Так как $z = e^w$, то $z = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv}$; отсюда $z = e^u(\cos v + i\sin v)$.

Мы получили тригонометрическую форму записи числа z, где e^u – его модуль, а v – его аргумент, или отличается от аргумента на $2\pi k$. Таким образом, $e^u = |z|$ или $u = \ln|z|$; $v = \arg z + 2\pi k$. Поэтому для вычисления $\operatorname{Ln} z = u + iv$ получаем следующую формулу:

$$\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots} \qquad (2.9)$$

Значение этой многозначной функции при $k = 0$ называют главным значением логарифма и обозначают $\ln z$.

На функцию $\operatorname{Ln} z$ распространяется ряд свойств логарифма действительного переменного:

$$\text{I)}\ \operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \text{2)}\ \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\text{3)}\ \operatorname{Ln}\left(z_1^{z_2}\right) = z_2 \cdot \operatorname{Ln} z_1, \qquad \text{4)}\ e^{\operatorname{Ln} z} = z.$$

Докажем, например, первое свойство:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \ln|z_1 \cdot z_2| + i\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \ln(|z_1| \cdot |z_2|) + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) =$$
$$= (\ln|z_1| + i\operatorname{Arg} z_1) + (\ln|z_2| + i\operatorname{Arg} z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2.$$

Пример 2.3. Вычислить $\ln(-1 - i\sqrt{3})$.

Решение. Найдём модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 - i\sqrt{3}$ (см. пример 1.1):

$$|z| = 2, \quad \arg z = -\frac{2\pi}{3}.$$

Тогда по формуле (2.9) имеем:

$$\ln(-1 - i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3}\right).$$

Обобщенные степенная и показательная функции

Степенная функция $w = z^a$ с произвольным комплексным показателем $a = \alpha + i\beta$ определяется равенством

$$\boxed{w = z^a = e^{\operatorname{Ln} z^a} = e^{a \operatorname{Ln} z}}.$$

Показательная функция $w = a^z$ с произвольным комплексным основанием $a = \alpha + i\beta$ определяется равенством

$$\boxed{w = a^z = e^{\operatorname{Ln} a^z} = e^{z \operatorname{Ln} a}}.$$

Пример 2.4. $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\ln 1 + i(\pi/2 + 2\pi k))} = e^{-(\pi/2 + 2\pi k)}$.

Обратные тригонометрические и гиперболические функции

По определению

$w = \operatorname{Arcsin} z$, если $\sin w = z$; $\quad w = \operatorname{Arc\cos} z$, если $\cos w = z$;

$w = \operatorname{Arctg} z$, если $\operatorname{tg} w = z$; $\quad w = \operatorname{Arcctg} z$, если $\operatorname{ctg} w = z$;

$w = \operatorname{Arcsh} z$, если $\operatorname{sh} w = z$; $\quad w = \operatorname{Arcch} z$, если $\operatorname{ch} w = z$;

$w = \operatorname{Arcth} z$, если $\operatorname{th} w = z$; $\quad w = \operatorname{Arccth} z$, если $\operatorname{cth} w = z$.

Пример 2.5. Вычислить $w = \operatorname{Arcch} i$.

Решение. Из условия $w = \operatorname{Arcch} i$ имеем:

$$\operatorname{ch} w = i \;\Rightarrow\; \frac{e^{w}+e^{-w}}{2} = i \;\Rightarrow\; e^{2w} - 2ie^{w} + 1 = 0 \;\Rightarrow\; e^{w} = i \pm \sqrt{i^2 - 1} = i\left(1 \pm \sqrt{2}\right) \Rightarrow$$

$$w_1 = \operatorname{Ln}\left[\left(1+\sqrt{2}\right) i\right] = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

$$w_2 = \operatorname{Ln}\left[\left(1-\sqrt{2}\right) i\right] = \ln\left(\sqrt{2}-1\right) + i\left(\frac{-\pi}{2} + 2\pi k\right).$$

2.2. Предел и непрерывность функции

Определение предела функции комплексного переменного совпадает с аналогичным определением для функции действительного переменного. Для формулировки определения введем на комплексной плоскости понятие окрестности конечной точки (рис.6) и окрестности бесконечности (рис.7).

$\varepsilon-$ окрестность конечной точки $S_\varepsilon(z_0) = \{ z : |z - z_0| < \varepsilon \}$;

$\varepsilon-$ окрестность бесконечности $S_\varepsilon(\infty) = \{ z : |z| > \varepsilon \}$;

выколотая $\varepsilon-$ окрестность конечной точки $\overset{\circ}{S}_\varepsilon(z_0) = \{ z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon \}$;

выколотая $\varepsilon-$ окрестность бесконечности $\overset{\circ}{S}_\varepsilon(\infty) = S_\varepsilon(\infty) = \{ z : |z| > \varepsilon \}$.

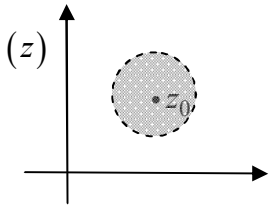

Рис.6

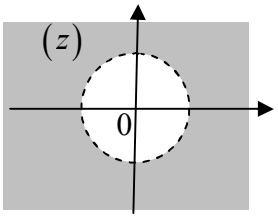

Рис.7

Определение (на языке окрестностей). Комплексное число A называют пределом функции $f(z)$ при $z \to a$ ($A, a-$ конечные или бесконечные), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что

$$f(z) \in S_\varepsilon(A) \text{ как только } z \in \overset{\circ}{S}_\delta(z_0).$$

Определение (на языке неравенств). Рассмотрим несколько случаев.

1). $\lim\limits_{z \to a} f(z) = A$ (a, $A-$ конечные), если для $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0$ такое, что

$$|f(z) - A| < \varepsilon \text{ как только } 0 < |z - a| < \delta.$$

2). $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$ ($a-$ конечное), если для $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0$ такое, что

$$|f(z)| > \varepsilon \text{ как только } 0 < |z - a| < \delta.$$

3). $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A$ ($A-$ конечное), если для $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0$ такое, что

$$|f(z) - A| < \varepsilon \text{ как только } |z| > \delta.$$

Пример 2.6. Существует ли $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$?

Решение. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}}{z}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-iy}{x+iy}=\begin{cases}1, & y=0,\ x\to 0,\\ -1, & x=0,\ y\to 0.\end{cases}$ Следовательно, $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}}{z}$ не существует.

Теорема 2.1. Пусть $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $A=a+ib$, $z_0=x_0+iy_0$. Тогда

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b.$$

Доказательство. Так как $|f(z)-A|=\sqrt{\left[u(x,y)-a\right]^2+\left[v(x,y)-b\right]^2}$, то

$|f(z)-A|\to 0$ при $z\to z_0$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $u(x,y)-a\to 0$, $v(x,y)-b\to 0$ при $x\to x_0$, $y\to y_0$.

Эта теорема позволяет перенести на функции комплексного переменного основные свойства предела функций двух действительных переменных.

Определение непрерывности для функции комплексного переменного совпадает с аналогичным определением для функции действительного переменного.

Функция $f(z)$ называется ***непрерывной*** в точке z_0, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0).$$

Для непрерывности функции комплексного переменного $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в точке $z_0=x_0+iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ были непрерывны в точке (x_0,y_0) (следует из теоремы 2.1).

Это позволяет перенести на функции комплексного переменного основные свойства непрерывных функций двух действительных переменных.

2.3. Дифференцируемые функции

Функция $f(z)$ называется ***дифференцируемой*** в точке z_0, если она имеет в этой точке производную

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}.$$

Из определения производной и свойств предела функции следует, что для функций комплексного переменного сохраняются основные правила дифференцирования суммы, произведения, частного, правило дифференцирования сложной функции:

$$\left[f(z)+g(z)\right]'=f'(z)+g'(z),$$

$$\left[f(z)\cdot g(z)\right]'=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z),$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)\cdot g(z)-f(z)\cdot g'(z)}{g^2(z)},$$

$$\left[f(w(z))\right]_z'=f'_w\cdot w'_z.$$

Выясним, при каких условиях функция $f(z)$ будет дифференцируемой.

Теорема 2.2. Пусть функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ – дифференцируемы в точке (x,y).

Функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ будет дифференцируемой в точке $z=x+iy$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия Коши-Римана:

$$\boxed{u'_x=v'_y,\quad u'_y=-v'_x}\ . \tag{2.10}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z, т.е. существует предел

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u(x,y)+i\Delta v(x,y)}{\Delta x+i\Delta y},$$

причем этот предел не зависит от способа стремления Δx и Δy к нулю. В частности, при $\Delta y=0$, $\Delta x\to 0$ имеем

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u(x,y)+i\Delta_x v(x,y)}{\Delta x}=u'_x+iv'_x.$$

При $\Delta x=0$, $\Delta y\to 0$ имеем

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u(x,y)+i\Delta_y v(x,y)}{i\Delta y}=v'_y-iu'_y.$$

Сравнивая эти равенства, получим: $u'_x+iv'_x=v'_y-iu'_y \ \Rightarrow\ u'_x=v'_y,\quad u'_y=-v'_x$.

Достаточность. Пусть выполнены условия Коши-Римана и функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ − дифференцируемы. Тогда

$$\Delta u=u'_x\Delta x+u'_y\Delta y+o(\rho),$$
$$\Delta v=v'_x\Delta x+v'_y\Delta y+o(\rho).$$

Здесь $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=|\Delta z|$. Тогда

$$\Delta f(z)=\Delta u+i\Delta v=(u'_x+iv'_x)\Delta x+(u'_y+iv'_y)\Delta y+o(|\Delta z|).$$

Во второй скобке этого равенства воспользуемся условиями Коши-Римана:

$$u'_y+iv'_y=-v'_x+iu'_x=i^2v'_x+iu'_x=i(u'_x+iv'_x);$$

$$\Delta f(z)=(u'_x+iv'_x)\Delta x+i(u'_x+iv'_x)\Delta y+o(|\Delta z|)=(u'_x+iv'_x)(\Delta x+i\Delta y)+o(|\Delta z|)=(u'_x+iv'_x)\Delta z+o(|\Delta z|).$$

Поэтому существует производная

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(u'_x+iv'_x)\Delta z+o(|\Delta z|)}{\Delta z}=u'_x+iv'_x+\lim_{\Delta z\to 0}\frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}=u'_x+iv'_x,$$

т.е. функция $f(z)$ − дифференцируема, причем $f'(z)=u'_x+iv'_x$.

Следствие 1. Если для функции $f(z)$ выполняются условия Коши-Римана, то

$$\boxed{f'(z)=u'_x+iv'_x=v'_y-iu'_y=u'_x-iu'_y=v'_y+iv'_x.}$$

Первая из этих формул получена при доказательстве теоремы, остальные формулы следуют из условий Коши-Римана.

Следствие 2. Элементарные функции $\sin z$, $\cos z$, e^z, z^n, $\ln z\ (z\neq 0)$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ − дифференцируемы, причем

$$(\sin z)'=\cos z,\ (\cos z)'=-\sin z,\ \left(e^z\right)'=e^z,\ \left(z^n\right)'=nz^{n-1},$$

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}\,(z \neq 0),\ (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z,\ (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

Докажем это утверждение, например, для функции $\sin z$. Для этого выделим действительную и мнимую части этой функции:

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cdot \cos(iy) + \cos x \cdot \sin(iy) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y;\ \Rightarrow$$

$$u(x, y) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y, \quad v(x, y) = \cos x \cdot \operatorname{sh} y.$$

Проверим условия Коши-Римана:

$$u'_x = \cos x \cdot \operatorname{ch} y = v'_y, \quad u'_y = \sin x \cdot \operatorname{sh} y = -v'_x.$$

Так как условия Коши-Римана выполняются, то функция $\sin z$ – дифференцируема и

$$(\sin z)' = u'_x + i v'_x = \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \sin x \cdot \operatorname{sh} y = \cos x \cdot \cos(iy) - \sin x \cdot \sin(iy) = \cos(x + iy) = \cos z.$$

Пример 2.7. Исследовать, будет ли дифференцируема функция $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$.

Решение. Учитывая, что $z = x + iy$, $\operatorname{Re} z = x$, получим

$$f(z) = (x + iy)x = x^2 + ixy.$$

Таким образом, мы выделили у функции $f(z)$ ее действительную часть $u = x^2$ и мнимую часть $v = xy$. Найдем частные производные этих функций: $u'_x = 2x$, $v'_x = y$, $u'_y = 0$, $v'_y = x$. Условия Коши–Римана $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ выполняются только при $x = y = 0$. Поэтому функция $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в точке $z = 0$.

Геометрический смысл аргумента и модуля производной

1). На плоскости (z) рассмотрим точки z_0 и z, кривую γ, их соединяющую, и угол φ наклона секущей $z_0 z$ (рис. 8).

При отображении $w = f(z)$ получим в плоскости (w) их образы: точки w_0 и w, кривую Γ, их соединяющую, и угол θ наклона секущей $w_0 w$ (рис. 9).

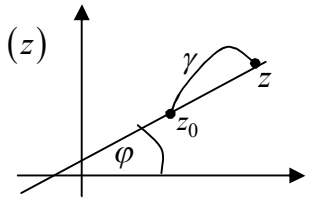

Рис. 8

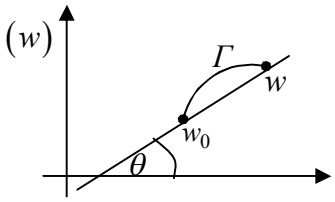

Рис. 9

По определению производной

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{w - w_0}{z - z_0}. \qquad (2.11)$$

Так как при делении комплексных чисел их аргументы вычитаются, то из равенства (2.11) следует, что

$$\arg f'(z_0) = \lim_{w \to w_0} \underbrace{\arg(w - w_0)}_{\text{угол } \theta} - \lim_{z \to z_0} \underbrace{\arg(z - z_0)}_{\text{угол } \varphi}.$$

При $z \to z_0$ имеем: $w \to w_0$, угол наклона φ секущей $z_0 z$ стремится к углу наклона φ_0 касательной к кривой γ в точке z_0, угол наклона θ секущей $w_0 w$

стремится к углу наклона θ_0 касательной к кривой Γ в точке w_0. Поэтому

$$\boxed{\arg f'(z_0) = \theta_0 - \varphi_0}.$$

Это равенство выражает ***геометрический смысл аргумента производной***:

$\arg f'(z_0)$ есть угол поворота касательной к кривой γ в точке z_0 при отображении $f(z)$.

Пусть γ_1 – другая кривая, проходящая через точку z_0,

φ_1 – угол наклона ее касательной к оси ox,

Γ_1 – образ γ_1, проходящий через точку w_0,

θ_1 – угол наклона ее касательной к оси ox.

Тогда $\arg f'(z_0) = \theta_0 - \varphi_0$, $\arg f'(z_0) = \theta_1 - \varphi_1$. Вычитая эти два равенства, получим

$$\boxed{\theta_1 - \theta_0 = \varphi_1 - \varphi_0}, \text{ т.е.}$$

угол между образами кривых в точке w_0 равен углу между кривыми в точке z_0.

Это есть свойство сохранения или консерватизма углов в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

2). Из равенства (3.1) следует:

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} \approx \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} \Rightarrow |w - w_0| \approx |f'(z_0)| \cdot |z - z_0|, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{|\Delta w| \approx |f'(z_0)| \cdot |\Delta z|}.$$

Это равенство выражает ***геометрический смысл модуля производной***:

величина $|f'(z_0)|$ определяет коэффициент изменения (подобия) длины любой бесконечно малой дуги, выходящей из точки z_0 при отображении $w = f(z)$.

Так как коэффициент изменения (подобия) одинаков для любой бесконечно малой дуги, выходящей из точки z_0, то это свойство называют свойством постоянства растяжений.

Пример 2.8. Найти угол поворота и коэффициент подобия любой малой кривой, выходящей из точки z_0 при отображении $f(z) = \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$.

Решение. Найдем производную этой функции в точках z и z_0:

$$f'(z) = \frac{1 \cdot (z - \overline{z}_0) - 1 \cdot (z - z_0)}{(z - \overline{z}_0)^2} = \frac{z_0 - \overline{z}_0}{(z - \overline{z}_0)^2}, \quad f'(z_0) = \frac{1}{z_0 - \overline{z}_0} = \frac{1}{(x_0 + i\,y_0) - (x_0 - i\,y_0)} = \frac{-i}{2y_0}.$$

Тогда угол поворота любой кривой, проходящей через точку z_0, при данном отображении равен $\arg f'(z_0) = \dfrac{\pi}{2}$, если $y_0 < 0$ и равен $\arg f'(z_0) = \dfrac{-\pi}{2}$, если $y_0 > 0$.

Коэффициент подобия в точке z_0 равен $|f'(z_0)| = \left|\dfrac{-i}{2y_0}\right| = \dfrac{1}{2|y_0|}$ $(y_0 \neq 0)$.

2.4. Аналитические функции

В теории функций комплексного переменного важную роль играет класс аналитических функций. Однозначная функция $f(z)$ называется ***аналитической в точке*** z, если она дифференцируема в этой точке и в некоторой ее окрестности.

Однозначная функция $f(z)$ называется ***аналитической в области*** D, если она является аналитической в каждой точке этой области.

Укажем ряд свойств аналитических функций.

1). Функция $f(z)$ является аналитической в области D тогда и только тогда, когда в этой области ее действительная и мнимая части удовлетворяют условиям Коши-Римана.

2). Сумма, разность, произведение, суперпозиция аналитических функций являются функциями аналитическими. Частное аналитических функций является аналитической функцией, если знаменатель не обращается в нуль.

3). Пусть функция $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ является аналитической в области D. Тогда в этой области функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ являются гармоническими, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\boxed{u''_{xx}+u''_{yy}=0}\,, \quad \boxed{v''_{xx}+v''_{yy}=0}. \tag{2.12}$$

Докажем это свойство. Так как функция $f(z)$ является аналитической, то ее действительная и мнимая части $u(x,y)$, $v(x,y)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана: $u'_x=v'_y$, $u'_y=-v'_x$. Продифференцируем первое равенство по x, второе – по y:

$$u''_{xx}=v''_{xy}, \quad u''_{yy}=-v''_{xy}.$$

Складывая эти равенства, получим: $u''_{xx}+u''_{yy}=0$. Аналогично доказывается, что функция $v(x,y)$ также является гармонической.

Отметим, что из гармоничности функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ не следует аналитичность функции $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$. Например, для функции $f(z)=\overline{z}=x-i\,y$ ее действительная и мнимая части $u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$ являются функциями гармоническими, но не удовлетворяют условиям Коши-Римана, т.е. функция $f(z)=\overline{z}$ не является аналитической.

4). Если известна действительная или мнимая часть аналитической функции $f(z)$, то с точностью до постоянной может быть восстановлена сама функция $f(z)$.

Пусть, например, известна $\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)$. Требуется найти $\operatorname{Im} f(z)=v(x,y)$. Воспользуемся условиями Коши-Римана:

$$v'_x=-u'_y, \quad v'_y=u'_x. \tag{2.13}$$

Первое из этих равенств проинтегрируем по x с точностью до константы $c(y)$, не зависящей от переменной интегрирования

$$v=-\int u'_y\,dx+c(y).$$

Для отыскания $c(y)$ следует подставить найденную функцию $v(x,y)$ во второе из равенств (2.13).

Пример 2.9. Найти аналитическую функцию $f(z)$, у которой

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x,y) = 6x^2y - 2y^3 - y\,.$$

Решение. Требуется найти $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$. Воспользуемся условиями Коши-Римана:

$$u'_x = v'_y = 6x^2 - 6y^2 - 1, \quad u'_y = -v'_x = -12xy\,. \tag{2.14}$$

Равенство $u'_x = 6x^2 - 6y^2 - 1$ проинтегрируем по x:

$$u = \int \left(6x^2 - 6y^2 - 1\right) dx = 2x^3 - 6y^2x - x + c(y)\,.$$

Для отыскания $c(y)$ подставим найденную функцию $u(x,y)$ во второе из равенств (2.14) $u'_y = -12xy$: $u'_y = -12xy = -12xy + c'(y) \;\Rightarrow\; c'(y) = 0 \;\Rightarrow\; c(y) = c$. Тогда

$$u = 2x^3 - 6y^2x - x + c,$$

$$f(z) = u + iv = \left(2x^3 - 6y^2x - x + c\right) + i\left(6x^2y - 2y^3 - y\right) =$$

$$= -(x + iy) + 2\left(x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3\right) + c = -(x+iy) + 2(x+iy)^3 + c.$$

Следовательно, $f(z) = 2z^3 - z + c$.

3. Интегрирование функций

3.1. Определение и свойства интеграла

Пусть (L) − гладкая ориентированная дуга на комплексной плоскости z, $f(z)$ − непрерывная функция, заданная на дуге (L). Разобьем дугу (L) произвольным образом на n ячеек (элементарных дуг) точками $z_1,\ z_2, ..., z_n$ (рис. 10). В этих ячейках выберем произвольно точки $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, ..., \tilde{z}_n$. Составим сумму $\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)\cdot \Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Эта сумма называется интегральной суммой функции $f(z)$ по дуге (L). Найдем предел интегральной суммы при стремлении к нулю величины $d = \max\limits_{1\le k\le n}\{|\Delta z_k|\}$.

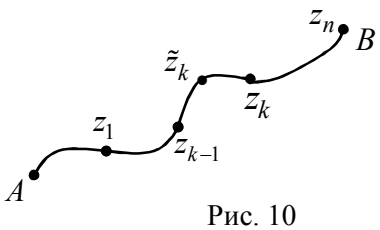

Рис. 10

Если существует предел интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)\cdot \Delta z_k$ при $d \to 0$, не зависящий от способа разбиения дуги L и от выбора промежуточных точек $\tilde{z}_k$, то этот предел называется интегралом функции $f(z)$ по дуге L и обозначается $\int\limits_{(L)} f(z)dz$:

$$\int\limits_{(L)} f(z)dz = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)\cdot \Delta z_k\,. \tag{3.1}$$

Для обозначения интеграла по замкнутому контуру используется знак $\oint_L$.

Свойства интеграла

1). $\int\limits_{(L)} f(z)\,dz = \int\limits_{(L)} \left[u(x,y)+i\,v(x,y)\right](dx+i\,dy) = \int\limits_{(L)} \left[u\,dx - v\,dy\right] + i\int\limits_{(L)} \left[v\,dx + u\,dy\right]$.

2). При изменении ориентации дуги интеграл $\int\limits_{(L)} f(z)\,dz$ меняет знак.

3). $\int\limits_{(L)} \left[\lambda f(z) + \mu\, g(z)\right]dz = \lambda \int\limits_{(L)} f(z)\,dz + \mu \int\limits_{(L)} g(z)\,dz$.

4). Пусть $\left|f(z)\right| \le M$ на дуге (L). Тогда $\left|\int\limits_{(L)} f(z)\,dz\right| \le M \cdot L$, где L – длина дуги.

5). Пусть $z = z(t)$ есть параметрическое уравнение дуги *AB,* причём концам дуги *A* и *B* соответствуют значения параметров t_A и t_B. Тогда

$$\int\limits_{(AB)} f(z)\,dz = \int\limits_{t_A}^{t_B} f\left(z(t)\right) z'(t)\,dt. \qquad (3.2)$$

Эти свойства следуют из определения интеграла; например, приведем вывод свойства 4):

$$\left|f(\tilde{z}_k)\right| \le M \;\Rightarrow\; \left|\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)\cdot \Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left|f(\tilde{z}_k)\right| \cdot \left|\Delta z_k\right| \le M \sum_{k=1}^{n} \left|\Delta z_k\right| \le M \cdot L \ .$$

Формулу (3.2) удобно использовать для вычисления интеграла. Покажем это на следующем примере.

Пример 3.1. Вычислить интеграл $I_n = \oint\limits_{(L)} \dfrac{dz}{(z-z_0)^n}$ по окружности с центром в точке z_0 радиусом *R*, ориентированной против часовой стрелки.

Решение. Вычислим этот интеграл, используя равенство (3.2). Для этого запишем параметрические уравнения окружности: $x - x_0 = R\cos t,\ y - y_0 = R\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$. Отсюда $z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = R\cos t + i\,R\sin t = R\cdot \mathrm{e}^{i\,t}$, т.е. мы получили ***параметрическое уравнение окружности*** в комплексной форме

$$z = z_0 + R\,\mathrm{e}^{i\,t},\ \ t \in [0, 2\pi] \ . \qquad (3.3)$$

Вычислим $dz = z'_t\,dt = R\cdot i\,e^{it}dt$ и подставим в интеграл:

$$I_n = \int\limits_0^{2\pi} \frac{R\,i\,e^{i\,t}dt}{\left(R\,e^{i\,t}\right)^n} = \frac{i}{R^{\,n-1}} \int\limits_0^{2\pi} e^{\,i\,(1-n)\,t}\,dt \ .$$

Следует различать два случая. При $n = 1$ имеем: $I_1 = i\int\limits_0^{2\pi} e^0 d\,t = 2\pi i$.

При $n \neq 1$ получим: $I_n = \dfrac{i}{R^{n-1}} \cdot \dfrac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)}\Bigg|_0^{2\pi} = \dfrac{1}{R^{(n-1)}(1-n)}\left[e^{2\pi i(1-n)} - e^0\right]$.

Число $2\pi i \cdot (1-n)$ кратно периоду $2\pi i$ показательной функции, поэтому $e^{2\pi i(1-n)} = e^0$ и $I_n = 0 \quad (n \neq 1)$. Таким образом,

$$\oint\limits_{(L)} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Пример 3.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)} z \cdot \operatorname{Re} z\, dz$

а) по отрезку OA; б) по отрезку AB; в) по отрезку BO; г) по ломаной $OABO$ (рис. 11).

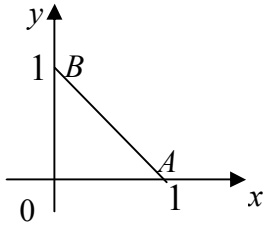

Рис. 11

Решение.

а). На отрезке OA: $y = 0$, $z = x + iy = x$, $dz = dx$, $\operatorname{Re} z = x$. Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{OA} z \operatorname{Re} z\, dz = \int\limits_0^1 x \cdot x\, dx = \frac{1}{3}.$$

б). На отрезке AB: $y = 1 - x$, $z = x + iy = x + i(1-x)$, $dz = (1-i)dx$, $\operatorname{Re} z = x$. Поэтому

$$I_2 = \int\limits_{AB} z \operatorname{Re} z\, dz = \int\limits_1^0 \left[x + i(1-x)\right] \cdot x(1-i)\, dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i.$$

в). На отрезке BO: $x = 0$, $z = x + iy = iy$, $dz = i\,dy$, $\operatorname{Re} z = 0$, $x \in [0,1]$. Поэтому

$$I_3 = \int\limits_{BO} z \operatorname{Re} z\, dz = \int\limits_1^0 iy \cdot 0 \cdot i\, dy = 0.$$

г). $\int\limits_{OABO} z \operatorname{Re} z\, dz = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}i\right) + 0 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}i$.

3.2. Интегральные теоремы

Введем следующие понятия. Область D назовем односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости принадлежит D. В противном случае область называется многосвязной. Выражаясь образно, односвязная плоская область – это область без дырок (рис. 12), а многосвязная область − это область с дырками (рис. 13).

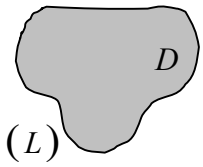

Рис. 12

Теорема Коши (для односвязной области).
Пусть функция $f(z)$ является ***аналитической*** в ***односвязной*** области D.
Тогда интеграл от этой функции по любой кусочно-гладкой замкнутой кривой L из области D равен нулю, т.е.

$$\oint\limits_{(L)} f(z)\, dz = 0 \quad . \tag{3.4}$$

Доказательство. Для упрощения доказательства будем предполагать непрерывность производной $f'(z)$. Запишем интеграл в виде

$$\int\limits_{(L)} f(z)dz = \int\limits_{(L)} [u\,dx - v\,dy] + i \int\limits_{(L)} [v\,dx + u\,dy]$$

и применим формулу Грина $\oint\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{(D)} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$ (рис. 12):

$$\int\limits_{(L)} [u\,dx - v\,dy] = \iint\limits_{(D)} \left[-v'_x - u'_y\right] dx\,dy, \qquad \int\limits_{(L)} [v\,dx + u\,dy] = \iint\limits_{(D)} \left[u'_x - v'_y\right] dx\,dy\ .$$

В силу условий Коши-Римана $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ подынтегральные выражения в каждом из двойных интегралов равны нулю и поэтому эти интегралы равны нулю, а значит, $\oint\limits_{(L)} f(z)\,dz = 0$.

Пример 3.3. Вычислить интеграл $I = \oint\limits \left(z^3 + e^z + z \cdot \mathrm{Re}\, z + \dfrac{e^z \cdot \sin z}{(z+1)^5} \right) dz$ по ломаной $OABO$ (рис. 11).

Решение. Функция $z^3 + e^z + \dfrac{e^z \cdot \sin z}{(z+1)^5}$ является аналитической внутри контура $OABO$ (нуль знаменателя − точка $z = -1$ лежит вне области, ограниченной этим контуром); область, ограниченная линией интегрирования, является односвязной. Поэтому по теореме Коши

$$I_1 = \oint\limits_{OABO} \left(z^3 + e^z + \frac{e^z \cdot \sin z}{(z+1)^5} \right) dz = 0\,.$$

Функция $z \cdot \mathrm{Re}\, z$, как показано в примере 2.7, не является аналитической. Интеграл от нее вычислен в примере 3.2: $I_2 = \int\limits_{OABO} z \cdot \mathrm{Re}\, z\, dz = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} i$. Поэтому

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\, i\,.$$

Теорема Коши (для многосвязной области). Пусть

1) D − ***многосвязная область***, ограниченная внешним контуром L и внутренними контурами $L_1, L_2, ..., L_n$ (рис. 13),

2) контуры $L, L_1, L_2, ..., L_n$ одинаково ориентированы (например, против хода часовой стрелки),

3) функция $f(z)$ является ***аналитической*** в области D и непрерывной в замкнутой области $\bar{D}$.

Тогда интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам, т.е.

$$\oint\limits_{L} f(z)\,dz = \oint\limits_{L_1} f(z)\,dz + \oint\limits_{L_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint\limits_{L_n} f(z)\,dz\ . \qquad (3.5)$$

Доказательство. Для простоты ограничимся областью, ограниченной внешним контуром L и только одним внутренним контуром L_1. Сделаем разрез по линии AB (рис. 14). Обозначим через D' − область D с разрезом по линии AB. Эта область будет односвязной с границей L'. По теореме Коши для односвязной области $\oint\limits_{L'} f(z)dz = 0$. Здесь граница L' состоит из линии L, обходимой против часовой стрелки (обозначим ее L^+), линии AB, линии L_1, обходимой по часовой стрелке (обозначим ее L_1^-), и линии BA. Поэтому

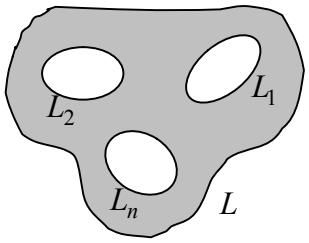

Рис. 13

$$\oint\limits_{L'} f(z)dz = \oint\limits_{L^+} f(z)dz + \int\limits_{AB} f(z)dz + \oint\limits_{L_1^-} f(z)dz + \oint\limits_{BA} f(z)dz = 0.$$

При изменении ориентации дуги интегралы меняют знак. Поэтому имеем

$$\oint\limits_{L^+} f(z)dz + \int\limits_{AB} f(z)dz - \oint\limits_{L_1^+} f(z)dz - \oint\limits_{AB} f(z)dz = 0.$$

Значит, $\oint\limits_{L^+} f(z)dz = \oint\limits_{L_1^+} f(z)dz$, что и требовалось доказать.

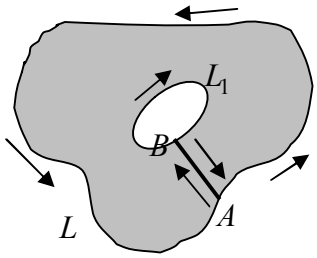

Рис. 14

Пример 3.4. Вычислить интеграл $I_n = \oint\limits_{(L)} \frac{dz}{(z-z_0)^n}$ по произвольной замкнутой линии, ориентированной против часовой стрелки.

Решение. Рассмотрим два случая.

1). Если точка z_0 расположена внутри контура (L), то функция $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ неаналитична внутри контура (L), т.к. знаменатель обращается в ноль в точке z_0, но эта функция является аналитической в многосвязной области (рис. 15), ограниченной контуром (L) и окружностью (γ). Поэтому по теореме Коши для многосвязной области интеграл I_n по внешнему контуру (L) равен интегралу по внутреннему контуру – окружности (γ), который был вычислен в примере 3.1, т.е.

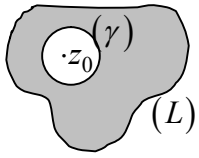

Рис. 15

$$I_n = \oint\limits_{(L)} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \oint\limits_{(\gamma)} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

2). Если точка z_0 расположена вне контура (L), то функция $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ аналитична внутри контура (L), т.к. там знаменатель не обращается в ноль. Поэтому по теореме Коши для односвязной области интеграл I_n по контуру (L) равен нулю.

Окончательно, $I_n = \oint\limits_{(L)} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \text{ и } z_0 \text{ - внутри } (L), \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$

Теорема (о первообразной). Пусть функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и $\oint_L f(\tau)d\tau = 0$ по любому замкнутому контуру L из области D. Тогда

1) интеграл $\int_{z_0 z} f(\tau)d\tau$ не зависит от формы кривой $z_0 z$, обозначается $\int_{z_0}^{z} f(\tau)d\tau$ и является аналитической функцией $F(z)$ в области D,

2) $F'(z) = \left(\int_{z_0}^{z} f(\tau)d\tau \right)' = f(z)$, т.е. $F(z)$ является первообразной для $f(z)$.

Доказательство теоремы опустим.

Из этой теоремы следуют формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z} f(\tau)d\tau = F(z) - F(z_0),$$

где $F(z)$ – первообразная для $f(z)$, и формула интегрирования по частям

$$\int_{z_0}^{z} u(\tau)\,dv(\tau) = u(\tau)v(\tau)\Big|_{z_0}^{z} - \int_{z_0}^{z} v(\tau)\,du(\tau).$$

Вывод этих формул такой же, как для функции действительного переменного.

Пример 3.5. Вычислить $I = \int_L z \cdot e^z dz$ по линии L, соединяющей точки $z_1 = 0,\ z_2 = \pi i$.

Решение. Функция $z \cdot e^z$ является аналитической, значит интеграл не зависит от формы линии, поэтому запишем его в виде $\int_0^{\pi i} z \cdot e^z dz$. Применим к нему метод интегрирования по частям, взяв $u = z$, $dv = e^z dz$. Тогда $du = dz$, $v = e^z$,

$$I = \int_0^{\pi i} z \cdot e^z dz = z \cdot e^z \Big|_0^{\pi i} - \int_0^{\pi i} e^z dz = \left(z e^z - e^z \right)\Big|_0^{\pi i} = \pi i \cdot e^{\pi i} - e^{\pi i} + 1.$$

Так как $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, то интеграл $I = 2 - \pi i$.

3.3. Интегральные формулы Коши

Теорема. Пусть функция $f(z)$ является ***аналитической*** в ***односвязной*** области D. Тогда в любой внутренней точке a области D имеют место формулы Коши

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{z-a}, \qquad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, \quad n = 1,2,3\ldots, \tag{3.6}$$

где L – положительно ориентированная кривая в области D, охватывающая точку a.

Доказательство. 1). Функция $\dfrac{f(z)}{z-a}$ неаналитична в области D (знаменатель в точке a этой области равен нулю), но эта функция аналитична в многосвязной области D с удаленной из нее окрестностью точки a (рис. 16). Поэтому по теореме Коши для многосвязной области имеем

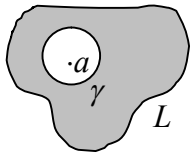

Рис. 16

$$\oint\limits_L \frac{f(z)dz}{z-a} = \oint\limits_\gamma \frac{f(z)dz}{z-a},$$

где γ есть окружность $|z-a|=r$. Преобразуем интеграл

$$\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-a}dz = \oint\limits_\gamma \frac{[f(z)-f(a)]+f(a)}{z-a}dz = \oint\limits_\gamma \frac{[f(z)-f(a)]}{z-a}dz + \oint\limits_\gamma \frac{f(a)}{z-a}dz = I_1 + I_2.$$

Для вычисления интеграла I_2 воспользуемся результатом примера 3.4:

$$\oint\limits_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \;\Rightarrow\; I_2 = \oint\limits_\gamma \frac{f(a)}{z-a}dz = f(a)\oint\limits_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i\, f(a).$$

Для вычисления интеграла I_1 воспользуемся непрерывностью функции $f(z)$ в точке a:

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a) \;\Rightarrow\; \text{для } \forall\varepsilon>0 \;\; \exists\delta>0: \; |f(z)-f(a)|<\varepsilon, \text{ как только } |z-a|<\delta.$$

Тогда на окружности γ с радиусом $r<\delta$ получим:

$$\frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|} < \frac{\varepsilon}{r} \;\Rightarrow\; |I_1| = \left|\oint\limits_\gamma \frac{[f(z)-f(a)]}{z-a}dz\right| < \frac{\varepsilon}{r}\cdot 2\pi r = 2\pi\varepsilon \text{ для } \forall\varepsilon>0 \;\Rightarrow\; I_1 = 0.$$

Итак,

$$I_1 = 0, \;\; I_2 = 2\pi i\, f(a) \;\Rightarrow\; \oint\limits_L \frac{f(z)dz}{z-a} = I_1 + I_2 = 2\pi i\, f(a) \;\Rightarrow\; f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)dz}{z-a}.$$

2). Вторую из формул (3.6) можно доказать продифференцировав n раз по параметру a только что полученное равенство $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(z)dz}{z-a}$:

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint\limits_L \frac{f(z)dz}{z-a}\right)'_a = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \left(\frac{f(z)}{z-a}\right)'_a dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)\cdot(-1)}{-(z-a)^2}dz = \frac{1!}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz,$$

$$f''(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \left(\frac{f(z)}{(z-a)^2}\right)'_a = \frac{2!}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z-a)^3}dz, \ldots$$

Замечания

1). Из теоремы следует, что аналитическая функция $f(z)$ имеет производные любого порядка в произвольной внутренней точке a области D.

Отметим, что из дифференцируемости действительной функции не следует существование даже второй производной; например, функция $y = x^{3/2}$ имеет первую производную $y' = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$, но вторая производная $y'' = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}x^{-1/2}$ не существует в точке $x=0$.

2). Интегральные формулы Коши можно переписать в виде

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i \cdot f(a), \qquad \oint_L \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a) \tag{3.7}$$

и использовать для вычисления соответствующих интегралов при условии, что точка a находится внутри контура L. Если точка a находится вне контура L, то подынтегральная функция является аналитичной, поэтому по теореме Коши эти интегралы равны нулю.

Пример 3.6. Вычислить интегралы $I_1 = \oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^4} dz$, $I_2 = \oint\limits_{|z|=1/2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^4} dz$.

Решение. В первом интеграле точка $z=1$ находится внутри контура интегрирования $|z|=2$ (рис. 17), поэтому по второй из формул (3.7) при $n=3$ имеем

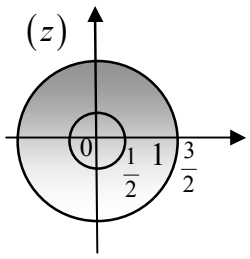

Рис. 17

$$I_1 = \oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z-1)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!}\left(e^{2z}\right)'''\Big|_{z=1} = \frac{8\pi i}{3} e^2.$$

Во втором интеграле точка $z=1$ находится вне контура интегрирования $|z|=1/2$; внутри этого контура подынтегральная функция является аналитичной, поэтому по теореме Коши интеграл I_2 равен нулю.

Пример 3.7. Вычислить интеграл $I = \oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2+1} dz$.

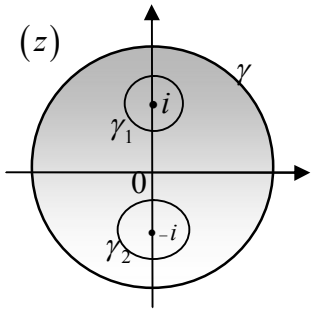

Рис. 18

Решение. Внутри контура γ (рис. 18) знаменатель функции обращается в нуль в точках $z_1 = i$, $z_2 = -i$. Построим окружности γ_1, γ_2 с центрами в этих точках достаточно малых радиусов, таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали внутри контура γ. В многосвязной области, ограниченной внешним контуром γ и внутренними контурами γ_1, γ_2, подынтегральная функция является аналитической (т. к. нули знаменателя не входят в эту область); поэтому применима теорема Коши для многосвязной области:

$$I = \oint_\gamma \frac{\sin z}{z^2+1} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z^2+1} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\sin z}{z^2+1} dz.$$

Разложим $z^2+1 = z^2 - i^2$ на множители $(z-i)(z+i)$, затем в интеграле по кривой γ_1, окружающей точку i, в знаменателе оставим $z-i$, а в интеграле по кривой γ_2, окружающей точку $-i$, в знаменателе оставим $z+i$ и применим для каждого интеграла первую из формул Коши (3.7):

$$I = \oint_{\gamma_1} \frac{\left(\frac{\sin z}{z+i}\right)}{z-i} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\left(\frac{\sin z}{z-i}\right)}{z+i} dz = 2\pi i \left(\frac{\sin z}{z+i}\right)\Big|_{z=i} + 2\pi i \left(\frac{\sin z}{z-i}\right)\Big|_{z=-i} = \pi \sin i - \pi \sin(-i) = 2\pi \operatorname{sh} 1.$$

Теорема Морера (обратная к теореме Коши). Пусть

1) функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D,

2) $\oint\limits_L f(\tau)d\tau = 0$ по любому замкнутому контуру L из области D.

Тогда функция $f(z)$ является аналитической функцией в области D.

Доказательство. Из теоремы о первообразной следует, что функция $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\tau)d\tau$ является аналитической и $F'(z) = f(z)$. Но аналитическая функция имеет производные любого порядка, в частности, $\exists\, F''(z) = f'(z)$. Отсюда следует, что $\exists\, f'(z)$, следовательно, функция $f(z)$ является аналитической функцией.

4. Ряды в комплексной области

4.1. Числовые ряды

Напомним основные сведения о числовых комплексных рядах, которые были рассмотрены ранее в теории рядов.

Ряд из комплексных чисел $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ называют сходящимся, если последовательность его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ имеет конечный предел S. Этот предел называют суммой ряда.

Необходимый и достаточный признак сходимости ряда:

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + i\,y_n)$ сходится $\Leftrightarrow$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ сходятся.

Пример 4.1. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{i}{2^n} \right)$ на сходимость и найти его сумму.

Решение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ является знакочередующимся и сходится по признаку Лейбница, так как его члены по абсолютной величине убывают и стремятся к нулю. Для вычисления его суммы запишем ряд Тейлора для функции $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,\ x \in (-1, 1].$$

В частности, при $x = 1$ получим $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ является геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = \frac{1}{2}$, знаменателем

$q=\frac{1}{2}$ и суммой $\frac{b_1}{1-q}=\frac{1/2}{1-1/2}=1$. Окончательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{i}{2^n}\right)$ сходится и его сумма $S=\ln 2+i$.

Необходимый признак сходимости ряда:

если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} z_n=0$.

Пример 4.2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+i\,\frac{3n^3+5}{10n^3-7}\right)$ на сходимость.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+5}{10n^3-7}$ расходится, так как $\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+5}{10n^3-7}=\frac{3}{10}\neq 0$. Следовательно, заданный ряд расходится.

Достаточный признак сходимости ряда: **е**сли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится и называется абсолютно сходящимся рядом.

Пример 4.3. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{n/2}\cdot n^3}$ на сходимость.

Решение. Рассмотрим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(1+i)^n}{2^{n/2}\cdot n^3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|1+i|^n}{2^{n/2}\cdot n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{\left(\sqrt{2}\right)^n\cdot n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Последний ряд сходится, поэтому исходный ряд сходится абсолютно.

4.2. Функциональные ряды

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, составленный из функций $u_n(z)$, определенных на множестве D, и его $n-$ю частичную сумму $S_n(z)=u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(z)$.

Определение 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ ***сходится*** к функции $S(z)$ в точке z области D, если для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N(\varepsilon,z)$ такой, что $|S_n(z)-S(z)|<\varepsilon$ для $\forall n>N$.

Определение 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ ***сходится равномерно*** к функции $S(z)$ в области D, если для любого $\varepsilon>0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|S_n(z)-S(z)|<\varepsilon$ для любого $n>N$ и любого $z\in D$.

Отличие этих определений состоит в том, что в определении 2 найдется один номер $N(\varepsilon)$, обслуживающий все точки z области D, а в определении 1 номер

$N(\varepsilon, z)$ для каждой точки z свой.

Напомним один из признаков равномерной сходимости.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости: если $|u_n(z)| \le a_n$ для любой точки z области D и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно в области D.

Свойства равномерно сходящихся рядов

1). О непрерывности суммы ряда

Пусть функции $u_n(z)$ непрерывны в области D и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно к функции $S(z)$ в области D. Тогда сумма ряда $S(z)$ непрерывна в области D.

2). О почленном интегрировании ряда

Пусть функции $u_n(z)$ непрерывны на кусочно-гладкой кривой γ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно к функции $S(z)$ на кривой γ. Тогда ряд можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_{\gamma} S(z)dz = \int_{\gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\gamma} u_n(z)dz \right).$$

3). О почленном дифференцировании ряда

Пусть функции $u_n(z)$ аналитичны в односвязной замкнутой области D и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно к функции $S(z)$ в области D. Тогда сумма ряда $S(z)$ аналитична в области D и ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, т.е.

$$S^{(k)}(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \right)^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n{}^{(k)}(z).$$

Первое и второе свойства такие же, как в теории рядов с действительными членами. Поэтому их доказательства мы опускаем. Докажем третье свойство, которое отличается от аналогичного свойства для ряда с действительными членами.

Функции $u_n(z)$ аналитичны, а значит непрерывны в области D и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно к функции $S(z)$ в области D. Поэтому сумма ряда $S(z)$ непрерывна в области D и ряд можно почленно интегрировать по любой замкнутой кривой γ из области D, т.е.

$$\oint_\gamma S(z)dz = \oint_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\oint_\gamma u_n(z)dz\right).$$

Так как функции $u_n(z)$ аналитичны в области D, то по теореме Коши для односвязной области $\oint_\gamma u_n(z)dz = 0$. Тогда $\oint_\gamma S(z)dz = 0$ по любой замкнутой кривой γ из области D, и по теореме Морера функция $S(z)$ аналитична в области D.

Для обоснования почленного дифференцирования ряда рассмотрим произвольную точку z_0 из области D и окружность γ с уравнением $|z - z_0| = R$ из области D. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится равномерно к функции $S(z)$ на γ и функция $\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$ ограничена на γ, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ сходится равномерно к функции $\frac{S(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ на γ и его можно почленно интегрировать, т.е.

$$\oint_\gamma \frac{S(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz = \sum_{n=1}^{\infty}\oint_\gamma \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz\,.$$

Из этого равенства, используя интегральные формулы Коши (3.7), получим

$$\frac{2\pi i}{k!}S^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi i}{k!}u_n{}^{(k)}(z_0) \quad \Rightarrow \quad S^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n{}^{(k)}(z_0).$$

Рассмотрим важный частный случай функционального ряда – степенной ряд.

Степенные ряды

Степенной ряд в комплексной области есть ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots\,,$$

где a_n $(n = 0,1,2,3,\ldots)$, z, z_0 – комплексные числа.

Степенной ряд в комплексной области обладает следующими свойствами.

1). Областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ является круг $|z - z_0| < R$.

Этот круг может выродиться в одну точку z_0 или во всю комплексную плоскость $(R = \infty)$.

2). В круге $|z - z_0| \le \rho$ $(\rho < R)$ степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ сходится равномерно.

3). Сумма степенного ряда внутри круга сходимости является функцией аналитической.

4). Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать любое число раз и почленно интегрировать.

Доказываются эти свойства так же, как в действительной области.

4.3. Разложение аналитической функции в степенной ряд

Рассмотрим сначала несколько примеров.

I). Функцию $f(z)=\frac{1}{1-z^2}$ можно трактовать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{b_1}{1-q}=b_1+b_1q+b_1q^2+\dots$, где $b_1=1$, $q=z^2$. Если $|q|<1$, то

$$\frac{1}{1-z^2}=1+z^2+z^4+z^6+\dots, \quad |z|<1.$$

Заметим, что в круге $|z|<1$ функция $\frac{1}{1-z^2}$ является аналитической и мы ее разложили в ряд по неотрицательным степеням z, называемый ее рядом Тейлора.

2). Разделим предыдущее равенство на z^3. Получим разложение

$$\frac{1}{z^3\left(1-z^2\right)}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}+z+z^2+\dots,$$

которое, как и первое разложение, справедливо в круге $|z|<1$, но с выколотой точкой $z=0$ или, другими словами, в кольце $0<|z|<1$. Итак, функция $\frac{1}{z^3\left(1-z^2\right)}$, аналитическая в кольце $0<|z|<1$, разложена в этом кольце в ряд, содержащий и положительные, и отрицательные степени z, т.е. в так называемый ряд Лорана.

3). По определению, $e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\dots$ для любого z, т. е. функция, аналитическая в круге $|z|<\infty$ бесконечного радиуса, разложена в этом круге в ряд Тейлора. Заменяя в последнем разложении z на $\frac{1}{z}$, получим

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z\cdot 1!}+\frac{1}{z^2\cdot 2!}+\frac{1}{z^3\cdot 3!}+\frac{1}{z^4\cdot 4!}+\dots$$

Это разложение по отрицательным степеням z (т.е. в ряд Лорана) имеет место для любого z, отличного от нуля, т.е. в кольце $0<|z|<\infty$.

В этих примерах функции, аналитические в круге, разложены в ряды, которые не содержат отрицательных степеней z, т.е. в ряды Тейлора; функции, аналитические в кольце, разложены в этом кольце в ряды, содержащие отрицательные степени z, т.е. в ряды Лорана.

Отмеченная закономерность имеет место не только в конкретных примерах, но и в общем случае. Точнее, имеют место следующие теоремы.

Теорема 4.1. Функция $f(z)$, ***аналитическая в круге*** $|z-z_0|<R$, разлагается в этом круге ***в ряд Тейлора*** по степеням $(z-z_0)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \text{ где } c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

В замкнутом круге $|z-z_0|\le\rho$ $(\rho<R)$ ряд Тейлора сходится равномерно и его можно почленно интегрировать и дифференцировать.

Доказательство. Возьмем произвольную точку z из круга $|z-z_0|<R$ и окруж-

ность γ_ρ радиуса ρ с центром в точке z_0, содержащую точку z (рис. 19).

Воспользуемся интегральной формулой Коши (3.6)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta\,. \tag{4.1}$$

Преобразуем дробь $\dfrac{1}{\eta-z}$, выделив в ее знаменателе $(z-z_0)$:

$$\frac{1}{\eta-z}=\frac{1}{(\eta-z_0)-(z-z_0)}.$$

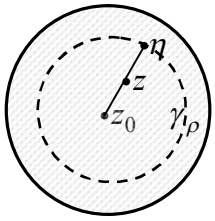

Рис. 19

В знаменателе из двух величин $(\eta-z_0)$, $(z-z_0)$ вынесем за скобку наибольшую по модулю, т.е. $(\eta-z_0)$ (рис. 19)

$$\frac{1}{\eta-z}=\frac{1}{(\eta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{(\eta-z_0)}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{(z-z_0)}{(\eta-z_0)}}.$$

Эту дробь можно рассматривать как сумму $\dfrac{b_1}{1-q}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $b_1=\dfrac{1}{\eta-z_0}$, $q=\dfrac{z-z_0}{\eta-z_0}$, причем $|q|=\dfrac{|z-z_0|}{|\eta-z_0|}<1$.

Учитывая, что $\dfrac{b_1}{1-q}=b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots$, получим

$$\frac{1}{\eta-z}=\frac{1}{\eta-z_0}+\frac{1}{\eta-z_0}\cdot\frac{z-z_0}{\eta-z_0}+\frac{1}{\eta-z_0}\cdot\left(\frac{z-z_0}{\eta-z_0}\right)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\eta-z_0)^{n+1}}.$$

Подставим в равенство (4.1) полученное выражение для $\dfrac{1}{\eta-z}$ в виде ряда и, внеся $f(\eta)$ под знак суммы, почленно проинтегрируем ряд

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho}f(\eta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\oint\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n c_n\,,$$

где $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ или, с учетом формул Коши (3.7), $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Обоснуем возможность почленного интегрирования ряда $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}f(\eta)\frac{(z-z_0)^n}{(\eta-z_0)^{n+1}}$ на окружности γ_ρ. Действительно, $|\eta-z_0|=\rho$ на γ_ρ, а функция $f(\eta)$ является аналитической, а значит и непрерывной, и ограниченной по модулю, т.е. $|f(\eta)|\le M$. Поэтому $\left|f(\eta)\dfrac{(z-z_0)^n}{(\eta-z_0)^{n+1}}\right|\le M\dfrac{|z-z_0|^n}{\rho^{n+1}}$. Ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z-z_0|^n}{\rho^{n+1}}$ не зависит от η и сходится, как геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\dfrac{|z-z_0|}{\rho}$, $0<q<1$.

Поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f(\eta)\frac{(z-z_0)^n}{(\eta-z_0)^{n+1}}$ по признаку Вейерштрасса сходится равномерно по η на γ_ρ и его можно почленно интегрировать по η на γ_ρ.

Кроме того, в замкнутом круге $|z-z_0|\le\rho$ $(\rho<R)$ ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, как степенной ряд, сходится равномерно. Следовательно, ряд Тейлора можно почленно интегрировать и дифференцировать. Теорема доказана.

Следствие. Радиус сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$ по степеням $(z-z_0)$ равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$.

Действительно, если R есть расстояние от точки z_0 до ближайшей особой точки функции $f(z)$, то в круге $|z-z_0|<R$ нет особых точек функции $f(z)$, т.е. функция является аналитической в этом круге и по теореме 4.1 разлагается в этом круге в ряд Тейлора.

Пример 4.4. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(z-6)}$ в ряд по степеням $(z-4)$.

Решение. 1). Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z=1,\ z=6$. От точки $z_0=4$ до ближайшей особой точки $z=6$ расстояние $R=2$. Поэтому функция $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням $(z-4)$ в круге $|z-4|<2$ (рис. 20).

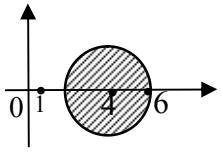

Рис. 20

2). Разложим функцию $f(z)$ на простейшие дроби

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)^2(z-6)}=\frac{A}{(z-1)^2}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z-6}.$$

После приведения к общему знаменателю получим

$$z=A(z-6)+B(z-1)(z-6)+C(z-1)^2 \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l|ll} z=1 & 1=-5A & A=-1/5 \\ z=6 & 6=25C & \Rightarrow\ C=6/25 \\ \text{при } z^2 & 0=B+C & B=-6/25 \end{array}.$$

3). Преобразуем дробь $\dfrac{1}{z-6}$, выделив в ее знаменателе $(z-4)$: $\dfrac{1}{z-6}=\dfrac{1}{(z-4)-2}$.

В знаменателе из двух величин $(z-4),\ (-2)$ вынесем за скобку большую по модулю в круге $|z-4|<2$, т.е. (-2) (рис. 20)

$$\frac{1}{z-6}=\frac{1}{(z-4)-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{(z-4)}{2}}.$$

Тогда эту дробь можно рассматривать как сумму $\dfrac{b_1}{1-q}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $b_1=\dfrac{1}{-2},\quad q=\dfrac{z-4}{2}$, причем $|q|=\dfrac{|z-4|}{2}<1$. Учитывая, что $\dfrac{b_1}{1-q}=b_1+b_1q+b_1q^2+\dots$, получим $\dfrac{1}{z-6}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{z-4}{2^2}-\dfrac{(z-4)^2}{2^3}-\dots=-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-4)^n}{2^{n+1}}$.

4). Преобразуем дробь $\frac{1}{z-1}$, выделив в ее знаменателе $(z-4)$: $\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-4)+3}$.

В знаменателе из двух величин $(z-4)$, 3 вынесем за скобку большую по модулю в круге $|z-4|<2$, т.е. 3

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-4)+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(z-4)}{3}}.$$

Тогда эту дробь можно рассматривать как сумму $\frac{b_1}{1-q}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $b_1=\frac{1}{3}$, $q=-\frac{z-4}{3}$, причем $|q|=\frac{|z-4|}{3}<1$. Учитывая, что $\frac{b_1}{1-q}=b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots$, получим

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{3}-\frac{z-4}{3^2}+\frac{(z-4)^2}{3^3}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-4)^n}{3^{n+1}}.$$

5). Продифференцируем полученное равенство:

$$\left(\frac{1}{z-1}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-4)^n}{3^{n+1}}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(z-4)^{n-1}}{3^{n+1}}.$$

Заменив $n-1$ на k, получим

$$\frac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(z-4)^{n-1}}{3^{n+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k+1)(z-4)^k}{3^{k+2}}.$$

6). Подставим полученные ряды в $f(z)$:

$$f(z)=\frac{-1/5}{(z-1)^2}+\frac{-6/25}{z-1}+\frac{6/25}{z-6}=\frac{-1}{25}\left[5\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)(z-4)^n}{3^{n+2}}+6\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-4)^n}{3^{n+1}}+6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-4)^n}{2^{n+1}}\right].$$

Окончательно, объединив три ряда в один, получим разложение функции $f(z)$ в ряд по степеням $(z-4)$ в круге $|z-4|<2$:

$$f(z)=\frac{-1}{25}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-4)^n, \text{ где } c_n=\left((-1)^n\frac{5(n+1)}{3^{n+2}}+(-1)^n\frac{6}{3^{n+1}}+\frac{6}{2^{n+1}}\right).$$

Перейдем к разложению в ряд функций, аналитических в кольце.

Теорема 4.2. Функция $f(z)$, ***аналитическая в кольце*** $r<|z-z_0|<R$, разлагается в этом кольце ***в ряд Лорана*** по степеням $(z-z_0)$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n, \text{ где } c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \qquad (4.2)$$

γ – контур из кольца, охватывающий точку z_0.

В замкнутом кольце $r_1\le|z-z_0|\le R_1$ $\left(r<r_1<R_1<R\right)$ ряд Лорана сходится равномерно и его можно почленно интегрировать и дифференцировать.

Доказательство опустим; оно аналогично доказательству предыдущей теоремы.

В теоремах 4.1 и 4.2 число R не обязательно конечное. Если $R=\infty$ и $z_0=0$, то круг $|z|<\infty$ есть вся комплексная плоскость, а кольцо $r<|z|<\infty$ есть окрестность бесконечности (см. рис. 22).

Формулы (4.2) для коэффициентов ряда Лорана на практике применяются редко, так как требуют громоздких вычислений. Обычно используют известные разложения в ряд элементарных функций.

Пример 4.5. Функцию $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}$ разложить в ряд:

а) в окрестности точки $z_0=0$;

б) в окрестности бесконечности;

в) в окрестности точки $z_0=2$.

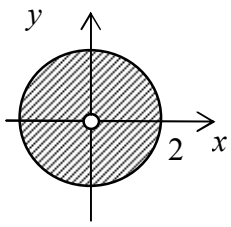

Рис. 21

Решение. Аналитичность функции нарушается в точках $z=0$ и $z=2$.

а). Выделим окрестность точки $z_0=0$, в которой функция является аналитической. Это кольцо $0<|z|<2$ (рис. 21). По теореме 4.2 в этом кольце функция $f(z)=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{z-2}$ разлагается в ряд Лорана по степеням *z*. Для разложения дроби $\dfrac{1}{z-2}$ по степеням z в знаменателе этой дроби из двух слагаемых z и –2 вынесем большее по модулю в кольце $0<|z|<2$, т.е. –2: $\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{-2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}$. Эту дробь можно рассматривать как сумму геометрической прогрессии $b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots$ при $b_1=1,\ q=\frac{z}{2}$, $\left(|q|=\dfrac{|z|}{2}<1\right)$. Таким образом, в кольце $0<|z|<2$ имеем

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{z}{2}\right)+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\ldots\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{z(z-2)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2^{n+1}}.$$

Здесь ряд Лорана содержит только одну отрицательную степень $z^{-1}/2$.

б). Выделим окрестность бесконечности, в которой функция является аналитической. Это кольцо $2<|z|<\infty$ (рис. 22). По теореме 4.2 в этом кольце функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана по степеням *z*. Применим к дроби $\dfrac{1}{z-2}$ тот же прием, что и в предыдущем случае: в знаменателе из двух слагаемых z и –2 вынесем большее по модулю в кольце $2<|z|<\infty$, т.е. в данном случае − это z:

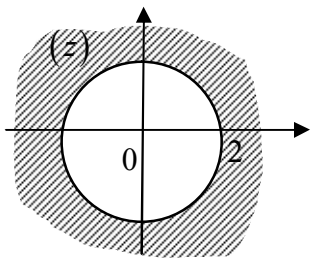

Рис. 22

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}==\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{z(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+2}}.$$

Здесь ряд Лорана содержит бесконечно много отрицательных степеней z.

в). Выделим окрестность точки $z_0=2$, в которой функция $f(z)$ аналитична − это кольцо $0<|z-2|<2$ (рис. 23). По теореме 5.2 в этом кольце функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана по степеням $z-2$. Множитель $\dfrac{1}{z-2}$ является степенью $z-2$. Поэтому разложим

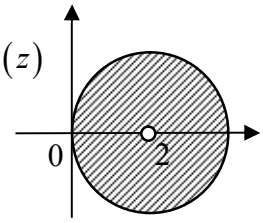

Рис. 23

в ряд только множитель $\frac{1}{z}$. Выделим в знаменателе $(z-2)$ и из двух слагаемых $(z-2)$ и 2 вынесем наибольшее по модулю в кольце $0<|z-2|<2$, т.е. 2

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-2)+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-2}{2}\right)}=\frac{1}{2}-\frac{z-2}{2^2}+\frac{(z-2)^2}{2^3}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{z(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^{n-1}}{2^{n+1}}.$$

Пример 4.6. Функцию $f(z)=\cos\frac{z}{z-1}$ разложить в ряд в окрестности точки $z_0=1$.

Решение. Функция $f(z)$ имеет одну особую точку $z=1$; следовательно, $f(z)$ аналитична в кольце $0<|z-1|<\infty$ и разлагается в этом кольце в ряд Лорана по степеням $(z-1)$. Для получения этого разложения сделаем преобразования

$$\cos\frac{z}{z-1}=\cos\frac{(z-1)+1}{z-1}=\cos\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\cos1\cos\frac{1}{z-1}-\sin1\sin\frac{1}{z-1}$$

и воспользуемся рядами для $\cos\frac{1}{z-1}$ и $\sin\frac{1}{z-1}$:

$$\cos\frac{z}{z-1}=\cos1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2n}}-\sin1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}.$$

5. Теория вычетов

5.1. Нули функции

Точка $z=a$ является нулем функции $f(z)$ порядка k, если функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=(z-a)^k\varphi(z),\ \varphi(a)\neq0. \qquad (5.1)$$

Например, функция $f(z)=(z-i)^3(z+4)$ имеет два нуля: $z=i$ нуль третьего порядка и $z=-4$ нуль первого порядка (такой нуль называют простым нулем).

Функция $f(z)=1+e^z$ обращается в нуль при $z=\ln(-1)=\ln1+\pi i=\pi i.$ Чтобы определить порядок этого нуля, запишем ряд Тейлора функции $f(z)=1+e^z$ по степеням $(z-\pi i)$, учитывая, что $f^{(n)}(\pi i)=e^{\pi i}=-1$:

$$f(z)=-(z-\pi i)-\frac{1}{2!}(z-\pi i)^2-\frac{1}{3!}(z-\pi i)^3-\ldots=(z-\pi i)\left[-1-\frac{1}{2!}(z-\pi i)-\frac{1}{3!}(z-\pi i)^2-\ldots\right],$$

т.е. $f(z)=(z-\pi i)\varphi(z)$, где $\varphi(z)=-1-\frac{1}{2!}(z-\pi i)-\frac{1}{3!}(z-\pi i)^2-\ldots$, причем $\varphi(\pi i)=-1$.

Поэтому $z=\pi i$ есть нуль первого порядка для функции $f(z)=1+e^z$.

Рассмотрим более простой способ определения порядка нуля.

Теорема 5.1 (о порядке нуля).
Точка $z=a$ является нулем аналитической функции $f(z)$ порядка k тогда и только тогда, когда $$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0,\ f^{(k)}(a)\neq 0, \qquad (5.2)$$
т.е. порядок нуля равен порядку первой отличной от нуля производной.

Необходимость. Пусть $z=a$ есть нуль порядка k для $f(z)$. Тогда

$$f(z)=(z-a)^k\varphi(z),\ \varphi(a)\neq 0.$$

Продифференцируем это равенство k раз:

$$f'(z)=(z-a)^k\varphi'(z)+k(z-a)^{k-1}\varphi(z),$$
$$f''(z)=(z-a)^k\varphi''(z)+2k(z-a)^{k-1}\varphi'(z)+k(k-1)(z-a)^{k-2}\varphi(z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(k-1)}(z)=(z-a)^k\varphi^{(k-1)}(z)+\ldots+k(k-1)(k-2)\ldots 1\cdot(z-a)\varphi(z),$$
$$f^{(k)}(z)=(z-a)^k\varphi^{(k)}(z)+\ldots+k!\varphi(z).$$

Вычислим эти производные в точке $z=a$:

$$f'(a)=0,\ \ f''(a)=0,\ \ f^{(k-1)}(a)=0,\ \ f^{(k)}(a)=k!\,\varphi(a)\neq 0.$$

Достаточность. Пусть $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0,\ f^{(k)}(a)\neq 0$. Тогда ряд Тейлора функции $f(z)$ по степеням $(z-a)$ примет вид:

$$f(z)=\underbrace{f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\ldots+\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(z-a)^{k-1}}_{=0}+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k+\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(z-a)^{k+1}+\ldots\ \Rightarrow$$

$$f(z)=(z-a)^k\varphi(z),\ \text{где}\ \varphi(z)=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}+\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(z-a)+\ldots,\ \text{причем}\ \varphi(a)=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\neq 0.$$

Следовательно, $z=a$ есть нуль порядка k для $f(z)$.

Пример 5.1. Найти нули функции $f(z)=(1-\cos z)^3$ и определить их порядок.

Решение. Найдем нули функции

$$f(z)=(1-\cos z)^3=0\ \Rightarrow\ \cos z=1\ \Rightarrow\ z_k=2\pi k\ \ (k=0,\pm 1,\pm 2\ldots).$$

Определим порядок нуля сначала для функции $g(z)=1-\cos z$. Так как $g'(z_k)=\sin z_k=0,\ g''(z_k)=\cos z_k\neq 0$, то в силу теоремы 6.1 точки $z_k=2\pi k$ являются нулями второго порядка для функции $g(z)=1-\cos z$, т.е. эту функцию можно представить в виде $g(z)=1-\cos z=(z-z_k)^2\cdot\varphi(z),\ \varphi(z_k)\neq 0$. Тогда

$$f(z)=(1-\cos z)^3=(z-z_k)^6\cdot\varphi^3(z),\ \varphi^3(z_k)\neq 0.$$

Поэтому точки $z_k=2\pi k$ являются нулями шестого порядка для функции $f(z)$.

5.2. Особые точки функции и их классификация

Особые точки функции − это точки, в которых нарушается ее аналитичность.

Особую точку называют изолированной, если в некоторой ее окрестности нет других особых точек функции.

Например, функция $f(z)=\dfrac{1}{\sin(1/z)}$ имеет особые точки $z_0=0,\ z_k=\dfrac{1}{\pi k}\ (k=\pm1,\pm2,...)$.

При этом точки $z_k=\dfrac{1}{\pi k}\ (k=\pm1,\pm2,...)$ являются изолированными, их можно отделить одну от другой окрестностью. Точка $z_0=0$ является неизолированной, так как в любую ее окрестность попадут некоторые из особых точек z_k.

В зависимости от того, каким будет предел функции в особой точке z_0, различают три типа изолированных особых точек.

1). Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ − конечен, то z_0 называют ***устранимой*** особой точкой.

2). Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, то z_0 называют ***полюсом***.

3). Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует, то z_0 называют ***существенно особой*** точкой.

Например, для функции $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^3(z-2)}$ особые точки $z=1,\ z=2$ являются полюсами, т.к. в этих точках предел функции равен бесконечности. Но это полюсы разного порядка: точку $z=1$ называют полюсом 3−го порядка, точку $z=2$ − полюсом 1−го порядка или простым полюсом.

Порядок полюса − это натуральное число k, такое, что $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^k$ отличен от нуля и бесконечности. Более удобно определять порядок полюса, используя связь полюса с нулями.

Теорема 5.2. Пусть z_0 есть нуль порядка k функции $\varphi(z)$ и нуль порядка n функции $\psi(z)$; тогда для функции $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ точка z_0 есть полюс порядка $n-k$, если $k<n$, и устранимая особая точка, если $k\ge n$.

Доказательство. Так как точка z_0 есть нуль порядка k функции $\varphi(z)$ и нуль порядка n функции $\psi(z)$, то

$$\begin{aligned}&\varphi(z)=(z-z_0)^k\cdot\varphi_1(z),\quad \varphi_1(z_0)\neq0,\\ &\psi(z)=(z-z_0)^n\cdot\psi_1(z),\quad \psi_1(z_0)\neq0\end{aligned}\quad\Rightarrow f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{(z-z_0)^k\cdot\varphi_1(z)}{(z-z_0)^n\cdot\psi_1(z)},\quad \frac{\varphi_1(z_0)}{\psi_1(z_0)}\neq0.$$

Тогда при $k<n$ получим

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^{n-k}}\cdot\frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty, \qquad \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^{n-k}\neq 0.$$

Следовательно, точка z_0 является полюсом порядка $n-k$ функции $f(z)$.

При $k\geq n$ получим $f(z)=(z-z_0)^{k-n}\cdot\dfrac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}$, $k-n\geq 0$. Следовательно, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ конечен и z_0 есть устранимая особая точка функции $f(z)$.

Замечания

1). Если $\varphi(z_0)\neq 0$, то можно записать $\varphi(z)=(z-z_0)^0\cdot\varphi(z)$ и считать z_0 нулем функции $\varphi(z)$ порядка $k=0$. Теорема 5.2 остается справедливой и в этом случае.

2). В частности, если точка z_0 является нулем порядка n функции $\psi(z)$, то точка z_0 является полюсом порядка n функции $\dfrac{1}{\psi(z)}$.

Пример 5.2. Определить типы особых точек функции $f(z)=\dfrac{z^2}{(1-\cos z)^3}$.

Решение. В примере 5.1 было установлено, что точки $z_i=2\pi i$ $(i=0,\pm1,\pm2,...)$ являются нулями порядка $n=6$ для функции $\psi(z)=(1-\cos z)^3$. Для функции $\varphi(z)=z^2$ точка $z_0=0$ является нулем порядка $k=2$, а точки $z_i=2\pi i$ $(i\neq 0)$ – нулями порядка $k=0$. Поэтому по теореме 5.2 точка $z_0=0$ является полюсом порядка $n-k=6-2=4$, а точки $z_i=2\pi i$ $(i\neq 0)$ – полюсами порядка $n-k=6-0=6$.

Тип изолированной особой точки можно охарактеризовать также через разложение функции в ряд Лорана в выколотой окрестности этой точки.

Теорема 5.3 (о ряде Лорана в окрестности устранимой особой точки). Точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в выколотой окрестности точки z_0 не содержит отрицательных степеней $(z-z_0)$.

Необходимость. Пусть точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$, тогда $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ – конечен. Отсюда следует, что функция $f(z)$ ограничена по модулю в выколотой δ – окрестности точки z_0; в частности, $|f(z)|\leq M$ на окружности γ_r с уравнением $|z-z_0|=r$, где $r<\delta$. Оценим коэффициенты c_{-n} ряда Лорана, воспользовавшись формулой (4.2):

$$|\,c_{-n}\,|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz\right|\leq\frac{1}{2\pi}\cdot M\cdot\frac{1}{r^{-n+1}}\cdot 2\pi r=M\cdot r^n \quad (n=0,1,2,...).$$

Так как r можно взять сколь угодно малым, то все коэффициенты c_{-n} ряда Лорана при отрицательных степенях $(z-z_0)$ равны нулю.

Достаточность. Пусть разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 не содержит отрицательных степеней $(z-z_0)$, т.е.

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\dots\ .$$

Тогда $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$, т. е. z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$.

Теорема 5.4 (о ряде Лорана в окрестности полюса)
Точка z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в выколотой окрестности точки z_0 содержит конечное число отрицательных степеней $(z-z_0)$, а именно

$$f(z)=\frac{c_0}{(z-z_0)^k}+\dots+\frac{c_1}{(z-z_0)}+c_k+c_{k+1}(z-z_0)+\dots\quad (c_0\neq 0)$$

Необходимость. Пусть точка z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$, тогда $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^k$ отличен от нуля и бесконечности. Отсюда следует, что z_0 является устранимой особой точкой для функции $\varphi(z)=f(z)(z-z_0)^k$ и, значит, в ее ряде Лорана нет отрицательных степеней $(z-z_0)$, т.е.

$$\varphi(z)=f(z)(z-z_0)^k=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\dots+c_k(z-z_0)^k+c_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\dots,$$

причем $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^k=c_0\neq 0$. Тогда

$$f(z)=\frac{c_0}{(z-z_0)^k}+\dots+\frac{c_1}{(z-z_0)}+c_k+c_{k+1}(z-z_0)+\dots\quad (c_0\neq 0).$$

Достаточность. Пусть разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 содержит конечное число отрицательных степеней $(z-z_0)$, т.е.

$$f(z)=\frac{c_0}{(z-z_0)^k}+\dots+\frac{c_1}{(z-z_0)}+c_k+c_{k+1}(z-z_0)+\dots\quad (c_0\neq 0)\ .$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(z-z_0)^k}\left[c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\dots\right]=\infty,$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^k=\lim_{z\to z_0}\left[c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\dots\right]=c_0\neq 0.$$

Следовательно, z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$.

Теорема 5.5 (о ряде Лорана в окрестности существенно особой точки***)***
Точка z_0 является существенно особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в выколотой окрестности точки z_0 содержит бесконечно много отрицательных степеней $(z-z_0)$.

Эта теорема следует из предыдущих теорем 5.3 и 5.4.

Пример 5.3. Исследовать особые точки функций $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$, $g(z)=e^{1/z}$.

Решение. Точка $z=0$ является особой точкой этих функций. Для установления ее типа воспользуемся разложениями в ряд функций $\sin z$, $e^{1/z}$:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\ldots,$$

$$g(z)=e^{1/z}=1+\frac{1/z}{1!}+\frac{(1/z)^2}{2!}+\frac{(1/z)^3}{3!}+\ldots=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2\cdot 2!}+\frac{1}{z^3\cdot 3!}+\ldots.$$

В силу теоремы 5.4 для $f(z)$ точка $z=0$ является полюсом второго порядка.

В силу теоремы 5.5 для $g(z)$ точка $z=0$ является существенно особой точкой.

5.3. Вычеты функции в ее особых точках

Вычетом функции $f(z)$ в ее изолированной особой точке z_0 называется число

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(\gamma)} f(z)dz, \qquad (5.3)$$

где γ^+ есть положительно ориентированная граница окрестности точки z_0, не содержащая других особых точек функции (рис. 24). Принято также другое обозначение вычета: $\operatorname*{Выч}_{z=z_0} f(z)$.

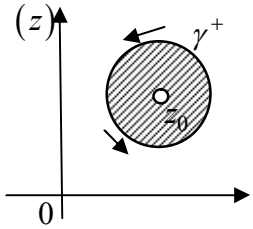

Рис. 24

Рассмотрим различные способы вычисления вычетов.

1). Вычисление вычета через коэффициент ряда Лорана

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности ее особой точки z_0, проинтегрируем по положительно ориентированной окружности γ^+ с центром в точке z_0 и воспользуемся тем, что $\oint\limits_{\gamma^+}(z-z_0)^n dz=\begin{cases}2\pi i, & n=-1,\\ 0, & n\neq -1\end{cases}$ (пример 3.1):

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \Rightarrow \oint\limits_{\gamma^+} f(z)dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\oint\limits_{\gamma^+}(z-z_0)^n dz=c_{-1}\cdot 2\pi i \Rightarrow \operatorname{Res} f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma^+} f(z)dz=c_{-1}.$$

Итак, вычет функции $f(z)$ в ее особой точке z_0 равен коэффициенту c_{-1} при $\dfrac{1}{z-z_0}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

$$\operatorname{Res} f(z_0)=c_{-1}. \qquad (5.4)$$

Например, в разложении функции $z^2e^{1/z}$ в окрестности особой точки $z_0=0$

$$z^2e^{1/z}=z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{5!\,z^5}+\ldots\right)=z^2+z+\frac{1}{3!\,z}+\frac{1}{5!\,z^3}+\ldots$$

коэффициент c_{-1} при $\dfrac{1}{z}$ равняется $\dfrac{1}{3!}$, следовательно, $\operatorname{Res} f(z_0)=c_{-1}=\dfrac{1}{3!}=\dfrac{1}{6}$.

2). Вычет в устранимой особой точке

В окрестности устранимой особой точки z_0 ряд Лорана функции не содержит отрицательных степеней $(z-z_0)$, следовательно, коэффициент $c_{-1}=0$. Таким образом, в устранимой особой точке

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0)=0}. \qquad (5.5)$$

3). Вычисление вычета в полюсе первого порядка

Если z_0 есть полюс первого порядка функции $f(z)$, то разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 в силу теоремы 5.4 имеет вид:

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$$

Умножим это равенство на $(z-z_0)$

$$f(z)\cdot(z-z_0)=c_{-1}+c_0\cdot(z-z_0)+c_1\cdot(z-z_0)^2+c_2\cdot(z-z_0)^3+\ldots\ .$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $z\to z_0$, получим:

$$\lim_{z\to z_0}\left(f(z)\cdot(z-z_0)\right)=c_{-1}=\operatorname{Res} f(z_0),$$

т.е. в полюсе первого порядка

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\left(f(z)\cdot(z-z_0)\right)}. \qquad (5.6)$$

4). Вычисление вычета функции $\frac{\varphi(z)}{g(z)}$, если $\varphi(z_0)\neq 0,\ g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0$.

Так как $\varphi(z_0)\neq 0,\ g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0$, то z_0 является нулем порядка $k=0$ функции $\varphi(z)$ и нулем порядка $n=1$ функции $g(z)$; поэтому по теореме 5.2 точка z_0 является полюсом порядка $n-k=1$ функции $\frac{\varphi(z)}{g(z)}$ и для вычисления вычета этой функции можно воспользоваться формулой (5.6)

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{\varphi(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{g(z)}(z-z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Итак, в случае, когда $\varphi(z_0)\neq 0,\ g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0$, справедлива формула

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0}\frac{\varphi(z)}{g(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}}. \qquad (5.7)$$

5). Вычисление вычета в полюсе к-го порядка

Если z_0 есть полюс k-го порядка функции $f(z)$, то разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 в силу теоремы 5.4 имеет вид:

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots\quad(c_{-k}\neq 0).$$

Умножим это равенство на $(z-z_0)^k$ и затем продифференцируем $k-1$ раз:

$$f(z)\cdot(z-z_0)^k=c_{-k}+c_{-k+1}\cdot(z-z_0)+\ldots+c_{-1}\cdot(z-z_0)^{k-1}+c_0\cdot(z-z_0)^k+c_1\cdot(z-z_0)^{k+1}+\ldots\ ,$$

$$\left[f(z)\cdot(z-z_0)^k \right]^{(k-1)} = c_{-k}\cdot 0 + c_{-k+1}\cdot 0 + \ldots + c_{-1}\cdot(k-1)! + c_0\cdot k!\cdot(z-z_0) + c_1\cdot\frac{(k+1)!}{2}(z-z_0)^2 + \ldots \ .$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $z \to z_0$, получим

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\cdot(z-z_0)^k \right]^{(k-1)} = c_{-1}\cdot(k-1)! = \operatorname{Res} f(z_0)\cdot(k-1)!,$$

т.е. в полюсе k-го порядка

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\cdot(z-z_0)^k \right]^{(k-1)}}. \qquad (5.8)$$

Пример 5.4. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ в ее особых точках.

Решение. Знаменатель $e^z - 1$ обращается в нуль в точке $z_0 = 0$ и, учитывая периодичность функции e^z, в точках $z_k = 2\pi k i \ \ (k = \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots)$. Это и будут особые точки функции $f(z)$.

Точки $z_k = 2\pi k i \ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ являются нулями порядка $n = 1$ для функции $g(z) = e^z - 1$, т.к. $g(z_k) = 0, \ g'(z_k) \neq 0$. Для функции $\varphi(z) = z$ точка $z_0 = 0$ является нулем порядка $k = 1$, а точки $z_k = 2\pi k i \ \ (k \neq 0)$ – нулями порядка $k = 0$. Поэтому по теореме 5.2 точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, а точки $z_k = 2\pi k i \ \ (k \neq 0)$ – полюсами порядка $n - k = 1 - 0 = 1$ функции $f(z)$.

Применяя формулы (5.5) и (5.7), получим

$$\operatorname{Res} f(z_0) = 0, \quad \operatorname{Res} f(z_k) = \left.\frac{z}{\left(e^z - 1\right)'}\right|_{z=z_k} = \frac{z_k}{e^{z_k}} = \frac{2\pi k i}{1} = 2\pi k i \ .$$

6. Применение вычетов

6.1. Применение вычетов к вычислению интегралов $\oint_L f(z)dz$

Теорема 6.1. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области D с положительно ориентированной границей L^+ за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ \ldots, z_n$, лежащих внутри D. Тогда

$$\oint_{L^+} f(z)dz = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k) \ . \qquad (6.1)$$

Доказательство. Удалим из области D (рис. 25) каждую особую точку вместе с ее окрестностью (границы окрестностей обозначим $L_1, L_2, \ \ldots, L_n$). В получившейся многосвязной области функция будет аналитической. Применяя интегральную теорему Коши для многосвязной области, получим

$$\oint_{L^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\ \oint_{L_k^+} f(z)dz \ .$$

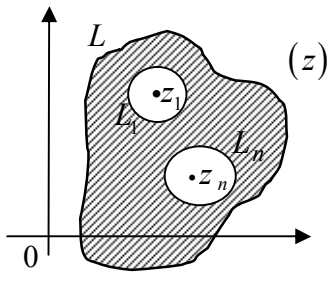

Рис. 25

Из определения вычета (5.3) следует, что $\oint\limits_{L_k^+} f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} f(z_k)$. Поэтому

$$\oint\limits_{L^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{L_k^+} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k).$$

Пример 6.1. Вычислить интеграл $\oint\limits_L \frac{z}{e^z - 1}\, dz$ по контуру L: $|z - \pi i| = 4$.

Решение. Контур L – это окружность с центром в точке $z = \pi i$ и с радиусом 4 (рис. 26). В примере 5.4 мы нашли особые точки функции $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$: это точки $z = 0$, $\pm 2\pi i$, $\pm 4\pi i$,... . Из этих точек внутрь контура L попадают точки $z = 0$ и $z = 2\pi i$. Вычеты в этих точках были вычислены в примере 5.4. Применяя формулу (6.1), получим

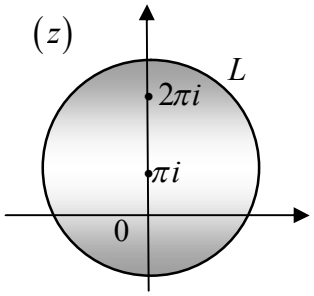

Рис. 26

$$\oint\limits_{L^+} \frac{z}{e^z - 1} dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(2\pi i)\right] = 2\pi i \left(0 + 2\pi i\right) = -4\pi^2.$$

Пример 6.2. Вычислить интеграл $\oint\limits_L \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 1} dz$ по контуру $|z - i| = 3/2$ (рис. 27).

Решение. Контур $|z - i| = 3/2$ есть окружность с центром $z = i$ и радиусом $3/2$ (рис. 27). Подынтегральная функция $f(z)$ имеет три особые точки $z = 0, z = i, z = -i$. Внутрь контура попадают особые точки $z = 0, z = i$.

Т. к. функция $f(z)$ – четная, то в разложении ее в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ нет нечетных степеней z, в частности, нет $\frac{1}{z}$. Поэтому

$$\operatorname{Res} f(0) = c_{-1} = 0.$$

Вычет в точке $z = i$ для функции вида $\frac{\varphi(z)}{g(z)}$ в случае, когда $\varphi(z_0) \neq 0,\ g(z_0) = 0,\ g'(z_0) \neq 0$, можно вычислить по формуле (5.7), т.е.

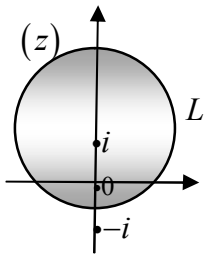

Рис. 27

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 1} = \left.\frac{e^{1/z^2}}{\left(z^2 + 1\right)'}\right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Тогда по теореме 6.1

$$\oint\limits_L \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(i)\right] = 2\pi i \left(0 + \frac{1}{e \cdot 2i}\right) = \frac{\pi}{e}.$$

Пример 6.3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{e^{1/z}}{z^2 + 1}\, dz$ (рис. 28).

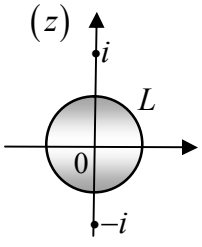

Рис. 28

Решение. Подынтегральная функция $f(z)$ имеет три особые точки $z = 0, z = i, z = -i$. Внутрь контура попадает существенно особая точка $z = 0$. Для вычисления вычета в этой особой точке разложим подынтегральную функцию $f(z)$ в ряд в окрестности $z = 0$ по степеням z:

$$f(z)=e^{1/z}\cdot\frac{1}{1-\left(-z^2\right)}=\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^3 3!}+\frac{1}{z^4 4!}+\frac{1}{z^5 5!}+\ldots\right)\cdot\left(1-z^2+z^4-z^6+\ldots\right).$$

Вычислим коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$: $c_{-1}=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots=\sin 1$. Используя разложение $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots$ при $z=1$, получим $c_{-1}=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots=\sin 1$. Тогда

$$\oint\limits_{|z|=1/2}\frac{e^{1/z}}{z^2+1}\,dz=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{1/z}}{z^2+1}=2\pi i\cdot c_{-1}=2\pi i\cdot\sin 1.$$

6.2. Применение вычетов к вычислению интегралов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$

Здесь и дальше несобственный интеграл понимается в смысле главного значения.

Теорема 6.2. Пусть 1) функция $f(x)$ совпадает с $f(z)$ и непрерывна на $(-\infty,+\infty)$,
2) функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$,
3) существуют положительные числа M, R_0, δ такие, что

$$|f(z)|\le\frac{M}{|z|^{1+\delta}}\quad\text{при условии, что } |z|=R\ge R_0. \tag{6.2}$$

Тогда интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$ можно вычислить по формуле

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}f(z_k),\ \text{где}\ \operatorname{Im}z_k>0. \tag{6.3}$$

Доказательство. Рассмотрим замкнутый контур L, состоящий из отрезка $[-R,R]$ действительной оси и верхней полуокружности L_R (рис. 29). Выберем R настолько большим, чтобы $R>R_0$ и особые точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ попали внутрь контура L. По теореме (6.1)

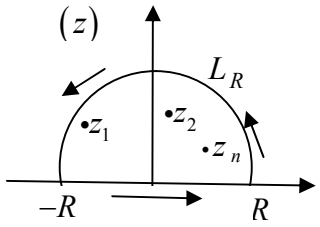

Рис. 29

$$\oint\limits_{L^+}f(z)\,dz=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}f(z_k).$$

С другой стороны, по свойству аддитивности интеграла

$$\oint\limits_{L^+}f(z)\,dz=\int\limits_{[-R,\,R]}f(z)\,dz+\int\limits_{L_R}f(z)\,dz.$$

Сравнивая эти два равенства и учитывая, что $z=x$ на отрезке $[-R,R]$, получим

$$\int\limits_{-R}^{+R}f(x)\,dx+\int\limits_{L_R}f(z)\,dz=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}f(z_k). \tag{6.4}$$

На полуокружности L_R по условию теоремы $|f(z)|\le\frac{M}{|z|^{1+\delta}}=\frac{M}{R^{1+\delta}}$, а по свойству

об оценке интеграла $\left| \int\limits_{L_R} f(z)dz \right| \le \frac{M}{R^{1+\delta}} \cdot \pi R = \frac{M}{R^{\delta}} \cdot \pi \to 0$ при $R \to \infty$ и $\delta > 0$.

Поэтому равенство (6.4) в пределе при $R \to \infty$ примет вид:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k).$$

Следствие. Пусть функция $f(z) = \frac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ есть отношение двух многочленов, $n-k>1$ и $z_1, z_2, \ \ldots, z_N$ есть нули знаменателя $Q_n(z)$, лежащие в верхней полуплоскости. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res} f(z_k).$$

Доказательство. Запишем функцию $f(z) = \frac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ в виде

$$f(z) = \frac{P_k(z)}{Q_n(z)} = \frac{a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n} = \frac{z^k\left(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_k z^{-k}\right)}{z^n\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}\right)} = \frac{1}{z^{n-k}} \cdot \varphi(z),$$

$$\text{где } \varphi(z) = \frac{\left(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_k z^{-k}\right)}{\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}\right)}.$$

Так как $\lim\limits_{z\to\infty} \varphi(z) = \frac{a_0}{b_0}$, то $|\varphi(z)| \le M$ при условии, что $|z| \ge R_0$. Поэтому

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^{n-k}} \cdot |\varphi(z)| \le \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \text{ где } \delta = n-k-1 > 0$$

и можно применить теорему 6.2.

Пример 6.4. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Решение. Так как подынтегральная функция является четной, то

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Функция $f(z) = \frac{1}{\left(z^2+1\right)^3}$ есть отношение двух многочленов, в верхней полуплоскости имеет одну особую точку $z = i$, поэтому по следствию к теореме 6.2

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{\left(z^2+1\right)^3}.$$

Для функции $f(z) = \frac{1}{\left(z^2+1\right)^3} = \frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}$ точка $z = i$ является полюсом третьего порядка. Поэтому для вычисления вычета воспользуемся формулой (5.8):

$$I=\pi i\ \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{\left(z^2+1\right)^3}=\pi i\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^3(z-i)^3}\cdot(z-i)^3\right]''=\frac{\pi i}{2}\lim_{z\to i}\left[\frac{(-3)(-4)}{(z+i)^5}\right]=\frac{6\pi i}{(2i)^5}=\frac{3\pi}{16}.$$

6.3. Применение вычетов к вычислению интегралов

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{iax}dx,\quad I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos ax\,dx,\quad I_3=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin ax\,dx$$

Отметим, что $e^{iax}=\cos ax+i\sin ax$. Поэтому

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{iax}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos ax\,dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin ax\,dx=I_2+i\ I_3\ \Rightarrow$$

$$I_2=\operatorname{Re}I_1,\quad I_3=\operatorname{Im}I_1.$$

Следовательно, достаточно разобраться с вычислением интеграла $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{iax}dx$.

Для этого воспользуемся следующим результатом (доказательство опустим).

Лемма Жордана. Пусть на полуокружности $\gamma_R:\begin{cases}|z-iy_0|=R,\\ \operatorname{Im}z\ge y_0\end{cases}$ функция $f(z)$ аналитична и $|f(z)|\le\varepsilon(R)$, где $\varepsilon(R)\to 0$ при $R\to\infty$. Тогда

$$\int_{\gamma_R}f(z)e^{iaz}dz\to 0 \text{ при } R\to\infty \text{ и } a>0.$$

Замечание

Приведенную формулировку леммы Жордана можно распространить еще на несколько случаев. Итак, лемма Жордана справедлива, если в ней

1) $a>0$, $\gamma_R:\begin{cases}|z-iy_0|=R,\\ \operatorname{Im}z\ge y_0,\end{cases}$ 3) $a=i\alpha$ $(\alpha>0)$, $\gamma_R:\begin{cases}|z-x_0|=R,\\ \operatorname{Re}z\ge x_0,\end{cases}$

2) $a<0$, $\gamma_R:\begin{cases}|z-iy_0|=R,\\ \operatorname{Im}z\le y_0,\end{cases}$ 4) $a=i\alpha$ $(\alpha<0)$, $\gamma_R:\begin{cases}|z-x_0|=R,\\ \operatorname{Re}z\le x_0.\end{cases}$

Применим лемму Жордана к вычислению интеграла $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{iax}dx$.

Теорема 6.3. Пусть 1) функция $f(x)$ совпадает с $f(z)$ и непрерывна на $(-\infty,+\infty)$, 2) функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$,

3) $|f(z)|\le\varepsilon(R)$ на полуокружности $\gamma_R:\begin{cases}|z|=R,\\ \operatorname{Im}z\ge 0,\end{cases}$ причем $\varepsilon(R)\to 0$ при $R\to\infty$.

Тогда интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{iax}dx$ можно вычислить по формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{iax}dx=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)e^{iaz}\right],\ \text{где } \operatorname{Im}z_k>0,\ a>0. \qquad (6.5)$$

Доказательство. Рассмотрим замкнутый контур γ, состоящий из отрезка $[-R,R]$ действительной оси и верхней полуокружности γ_R (рис. 30). Выберем R настолько большим, чтобы особые точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ попали внутрь контура γ. По теореме (6.1)

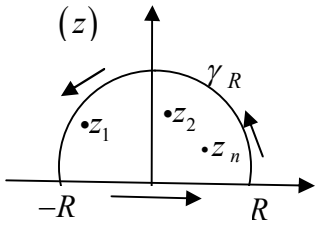

Рис. 30

$$\oint\limits_{\gamma^+} f(z)e^{iaz}dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)e^{iaz}\right].$$

С другой стороны, по свойству аддитивности интеграла

$$\oint\limits_{\gamma^+} f(z)e^{iaz}dz = \int\limits_{[-R,\,R]} f(z)e^{iaz}dz + \int\limits_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}dz\,.$$

Сравнивая эти два равенства и учитывая, что $z = x$ на отрезке $[-R,R]$, получим

$$\int\limits_{-R}^{+R} f(x)e^{iax}dx + \int\limits_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)e^{iaz}\right]. \qquad (6.6)$$

На полуокружности γ_R по условию теоремы функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана при $y_0 = 0$, поэтому из леммы Жордана следует, что

$$\int\limits_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}dz \to 0 \text{ при } R \to \infty \text{ и } a > 0\,.$$

Тогда равенство (6.6) в пределе при $R \to \infty$ примет вид:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)e^{iaz}\right].$$

Следствие. Пусть функция $f(z) = \dfrac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ есть отношение двух многочленов, где $k < n$ и $z_1, z_2, \ldots, z_N$ есть нули знаменателя $Q_n(z)$, лежащие в верхней полуплоскости. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)e^{iaz}\right],\ a > 0\,.$$

Доказательство. Запишем функцию $f(z) = \dfrac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ в виде

$$f(z) = \frac{P_k(z)}{Q_n(z)} = \frac{a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n} = \frac{z^k\left(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_k z^{-k}\right)}{z^n\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}\right)} = \frac{1}{z^{n-k}} \cdot \varphi(z),$$

$$\text{где } \varphi(z) = \frac{\left(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_k z^{-k}\right)}{\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_n z^{-n}\right)}\,.$$

Так как $\lim\limits_{z\to\infty} \varphi(z) = \dfrac{a_0}{b_0}$, то $|\varphi(z)| \le M$ при условии, что $|z| \ge R$. Поэтому

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^{n-k}} \cdot |\varphi(z)| \le \frac{M}{R^{n-k}} = \varepsilon(R)\,.$$

Так как $n - k > 0$, то $\varepsilon(R) \to 0$ при $R \to \infty$, и можно применить теорему 6.3:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k}\left[f(z)e^{iaz} \right].$$

Пример 6.5. Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos ax\,dx}{x^2+b^2}$ $(a>0,\ b>0)$.

Решение. Так как подынтегральная функция является четной, то

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax\,dx}{x^2+b^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax\,dx}{x^2+b^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}dx}{x^2+b^2}.$$

Функция $f(z) = \dfrac{1}{z^2+b^2}$ есть правильная дробь, у которой знаменатель в верхней полуплоскости имеет один ноль $z = bi$, поэтому по следствию к теореме 6.3 имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}dx}{x^2+b^2} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=bi} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}.$$

Вычет в точке $z = bi$ для функции вида $\dfrac{\varphi(z)}{g(z)}$ в случае, когда $\varphi(z_0)\neq 0,\ g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0$,

можно вычислить по формуле (5.7), т.е. $\operatorname*{Res}_{z=bi} \dfrac{e^{iaz}}{z^2+b^2} = \left.\dfrac{e^{iaz}}{\left(z^2+b^2\right)'}\right|_{z=bi} = \dfrac{e^{-ab}}{2bi}$.

Окончательно, получим

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+b^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(2\pi i \operatorname*{Res}_{z=bi} \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} \right) = \operatorname{Re}\left(\pi i \ \frac{e^{-ab}}{2bi} \right) = \frac{\pi}{2b}e^{-ab}.$$

Заметим, что здесь неприменима теорема 6.2 для функции $f(z) = \dfrac{\cos az}{z^2+b^2}$, т.к. $|\cos z|$ быстро возрастает для $|z| \geq R_0$ и функция $f(z)$ не удовлетворяет условию (6.2).

7. Операционное исчисление

Одним из важных приложений теории функций комплексного переменного является операционное исчисление. В физике, механике, электротехнике, радиотехнике методы операционного исчисления используются при решении многих прикладных задач.

7.1. Понятие оригинала и его изображения

Комплекснозначная функция $f(t) = u(t) + iv(t)$ вещественного аргумента t называется ***оригиналом***, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $f(t)$ кусочно непрерывна, т.е. на любом конечном интервале может иметь лишь конечное число точек разрыва первого рода;

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3) $f(t)$ растет не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие числа $M > 0$ и $s \geq 0$, при которых

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{st}. \qquad (7.1)$$

Точную нижнюю грань s_0 тех значений s, для которых справедливо неравенство (7.1), называют ***показателем роста*** оригинала $f(t)$).

Пример 7.1. Функция Хевисайда $\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$ (рис.31) является оригиналом с показателем роста $s_0=0$, так как $\eta(t)\le 1=e^{0\cdot t}$.

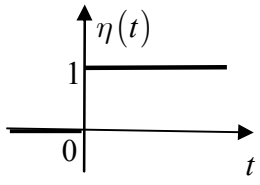

Рис. 31

Замечание. Пусть некоторая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3 определения оригинала, но не удовлетворяет условию 2, т.е. функция $\varphi(t)\ne 0$ для $t<0$. Умножив эту функцию на $\eta(t)$, мы "зануляем" функцию $\varphi(t)$ для $t<0$ и не изменяем ее для $t\ge 0$. Тогда произведение $\varphi(t)\cdot\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \varphi(t), & t\ge 0\end{cases}$ будет оригиналом. В дальнейшем иногда для сокращения записи будем писать $\varphi(t)$ вместо $\varphi(t)\cdot\eta(t)$.

Пример 7.2. Функции $f(t)=\frac{1}{t}\eta(t),\ g(t)=e^{t^2}\eta(t)$ не являются оригиналами, т.к. первая функция в точке $t=0$ имеет разрыв второго рода, вторая функция не удовлетворяет соотношению (7.1).

Пример 7.3. Показать, что функции $f(t)=e^{(a+bi)t}\cdot\eta(t),\ g(t)=t^a\cdot\eta(t)\ \ (a>0)$ являются оригиналами и найти их показатели роста.

Решение. Функция $f(t)$ непрерывна всюду, кроме точки $t=0$; $f(t)=0$ при t < 0 и

$$|f(t)|\le\left|e^{(a+bi)t}\right|=\left|e^{at}\cdot e^{bit}\right|=e^{at}\cdot\underbrace{\left|e^{bit}\right|}_{=1}=e^{at}.$$

Поэтому функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0=a$, если $a>0$, и с показателем роста $s_0=0$, если $a\le 0$.

Функция $g(t)$ непрерывна всюду, $g(t)=0$ при t < 0 и для любого $\varepsilon>0$ имеем:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^a}{e^{\varepsilon t}}=0\ \Rightarrow\ |g(t)|\le|t^a|\le M\cdot e^{\varepsilon t},\ \ s_0=\inf\{\varepsilon:\ \varepsilon>0\}=0.$$

Поэтому функция $g(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0=0$.

Свойства оригиналов

Пусть $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_1, $g(t)$ есть оригинал с показателем роста s_2. Тогда

1) $f_1(t)=f(t)+g(t)$ есть оригинал с показателем роста $s=\max\{s_1,s_2\}$,
2) $f_2(t)=f(at)\ \ (a>0)$ есть оригинал с показателем роста as_1,
3) $f_3(t)=f(t-\tau)\cdot\eta(t-\tau)\ \ (\tau>0)$ есть оригинал с показателем роста s_1,
4) $f_4(t)=t^\alpha f(t)\ \ (\alpha>0)$ есть оригинал с показателем роста s_1,
5) $f_5(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$ есть оригинал с показателем роста s_1.

Действительно, функции $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t), f_5(t)$ кусочно непрерывны и равны нулю при $t<0$, т.е. удовлетворяют первому и второму условиям определения оригинала. Проверим выполнение для них третьего условия:

$$\left|f_1(t)\right| \le \left|f(t)\right| + \left|g(t)\right| \le M_1 e^{s_1 t} + M_2 e^{s_2 t} \le M_1 e^{st} + M_2 e^{st} \le M e^{st},$$

где $M = M_1 + M_2,\ s = \max\{s_1, s_2\}$,

$$\left|f_2(t)\right| = \left|f(at)\right| \le M e^{s_1(at)} = M e^{(s_1 a)t} \quad (a>0),$$

$$\left|f_3(t)\right| = \left|f(t-\tau)\cdot\eta(t-\tau)\right| \le \left|f(t-\tau)\right| \le M\cdot e^{s_1(t-\tau)} \le M\cdot e^{s_1 t},$$

$$\left|f_4(t)\right| \le t^{\alpha}\left|f(t)\right| \le e^{\varepsilon t}\cdot M e^{s_1 t} = M e^{(s_1+\varepsilon)t},\ s = \inf\{s_1+\varepsilon\} = s_1,$$

$$\left|f_5(t)\right| = \left|\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right| \le \int_0^t \left|f(\tau)\right| d\tau \le M\int_0^t e^{s_1\tau}d\tau \le M e^{s_1 t}\int_0^t d\tau = M e^{s_1 t} t \le M e^{(s_1+\varepsilon)t}.$$

Перейдем к понятию изображения.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$, связанная с оригиналом $f(t)$ равенством:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\,dt \quad . \tag{7.2}$$

Тот факт, что $F(p)$ есть изображение для $f(t)$, будем символически записывать так: $f(t) \div F(p)$ или $F(p) \div f(t)$. Несобственный интеграл, стоящий в правой части равенства (7.2), часто называют интегралом Лапласа для функции $f(t)$. Переход от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют преобразованием Лапласа. Теорию преобразования Лапласа называют операционным исчислением. В дальнейшем мы увидим, что смысл операционного метода заключается в том, что с помощью введения изображений удается упростить решение многих задач.

Теорема 7.1. (о существовании и аналитичности изображения)

Пусть оригинал $f(t)$ имеет показатель роста s_0. Тогда

1) в области $\operatorname{Re} p > s_0$ изображение $F(p)$ существует, т.е. интеграл $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ сходится,

2) в области $\operatorname{Re} p \ge \alpha$ $(\alpha > s_0)$ интеграл $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ сходится равномерно,

3) изображение $F(p)$ является аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > s_0$.

Доказательство.

1). Пусть $p = s + i\sigma$. Учитывая, что $|f(t)| \le M\cdot e^{s_0 t}$, получим:

$$\left|f(t)e^{-pt}\right| = \left|f(t)\right|\cdot\left|e^{-st-i\sigma t}\right| \le \left(M e^{s_0 t}\right)\cdot\left|e^{-st}\right|\cdot\underbrace{\left|e^{-i\sigma t}\right|}_{=1} = \left(M e^{s_0 t}\right)e^{-st} = M e^{(s_0-s)t},$$

$$|F(p)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \le \int_0^{+\infty} \left| f(t) e^{-pt} \right| dt \le M \int_0^{+\infty} e^{(s_0 - s)t} dt = M \left. \frac{e^{(s_0 - s)t}}{s_0 - s} \right|_{t=0}^{t=+\infty}.$$

Тогда в области $s = \operatorname{Re} p > s_0$ (рис. 32) будем иметь:

$$s_0 - s < 0, \quad e^{(s_0 - s)t} \to 0 \text{ при } t \to +\infty,$$

$$|F(p)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \le M \left. \frac{e^{(s_0 - s)t}}{s_0 - s} \right|_{t=0}^{t=+\infty} = M \left(0 - \frac{1}{s_0 - s} \right) = \frac{M}{s - s_0}, \qquad (7.3)$$

т.е. интеграл $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ сходится.

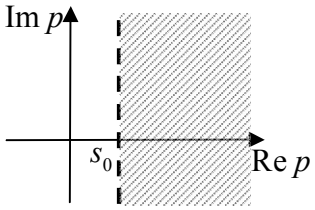

Рис.32

2). В области $s = \operatorname{Re} p \ge \alpha \ (\alpha > s_0)$ будем иметь: $s_0 - s \le s_0 - \alpha < 0$,

$$\left| f(t) e^{-pt} \right| \le M e^{(s_0 - s)t} \le M e^{(s_0 - \alpha)t},$$

функция $e^{(s_0 - \alpha)t}$ не зависит от p и интеграл $\int_0^{+\infty} e^{(s_0 - \alpha)t} dt = \frac{1}{s_0 - \alpha}$ сходится. Поэтому по признаку Вейерштрасса интеграл $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ сходится равномерно в области $\operatorname{Re} p \ge \alpha$.

3). Пусть $\gamma -$ произвольный замкнутый контур в области $\operatorname{Re} p > s_0$. Тогда

$$\oint_\gamma F(p) dp = \oint_\gamma dp \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt \oint_\gamma e^{-pt} dp.$$

Здесь мы поменяли порядок интегрирования. Так как функция e^{-pt} является аналитической, то $\oint_\gamma e^{-pt} dp = 0$ и поэтому $\oint_\gamma F(p) dp = 0$. Кроме того, можно показать, что функция $F(p)$ является непрерывной (обоснование этого опустим). Тогда из теоремы Морера (п. 3.3), обратной к теореме Коши, следует, что функция $F(p)$ является аналитической.

Следствие. Пусть оригинал $f(t)$ имеет показатель роста s_0 и $f(t) \div F(p)$. Тогда

1) $|F(p)| \le \frac{M}{\operatorname{Re} p - s_0} \ (\operatorname{Re} p > s_0)$, 2) $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) = 0$

Действительно, первое утверждение следует из соотношения (7.3), а второе утверждение следует из первого.

Пример 7.4. Найти изображение функции Хэвисайда $\eta(t)$.

Решение. Порядок роста функции $\eta(t)$ равен $s_0 = 0$ и, следовательно, изображение существует, когда $\operatorname{Re} p > 0$. По определению

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\eta(t)}_{=1} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{-p} \left(\underbrace{\lim_{t \to +\infty} e^{-pt}}_{=0} - e^0 \right) = \frac{1}{p}.$$

Поясним равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-pt}=0$. Если $p=s+i\sigma$, то $e^{-pt}=e^{-(s+i\sigma)t}=e^{-st}\cdot e^{-i\sigma t}$. Функция e^{-st} является бесконечно малой при $t\to+\infty$, так как $s=\operatorname{Re} p>0$. Функция $e^{-i\sigma t}$ является ограниченной, так как

$$\left|e^{-i\sigma t}\right|=\sqrt{\cos^2(-\sigma t)+\sin^2(-\sigma t)}=1.$$

Поэтому функция e^{-pt}, как произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию, является бесконечно малой при $t\to+\infty$, т.е. $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-pt}=0$.

Итак, мы получили: $\boxed{\eta(t)\div\frac{1}{p}\ \text{ или }\ 1\div\frac{1}{p}}$.

Во второй формуле мы по договоренности опустили множитель $\eta(t)$.

Пример 7.5. Найти изображение функции $e^{qt}\cdot\eta(t)$.

Решение. Функция $e^{qt}\cdot\eta(t)$ является оригиналом с показателем роста $s_0=\operatorname{Re} q$ (пример 7.3). Поэтому ее изображение $F(p)$ определено в области $\operatorname{Re} p>\operatorname{Re} q$. Найдем это изображение:

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{qt}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty} e^{(q-p)t}dt=\frac{e^{(q-p)t}}{(q-p)}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-q}.$$

Здесь, также как в предыдущем примере, можно показать, что $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{(q-p)t}=0$, так как $\operatorname{Re}(q-p)<0$. Итак,

$$\boxed{e^{qt}\cdot\eta(t)\div\frac{1}{p-q}\ \text{ или }\ e^{qt}\div\frac{1}{p-q}\ \ (\operatorname{Re} p>\operatorname{Re} q)}.$$

Для перехода от оригинала к изображению (и для обратного перехода) надо знать свойства изображения.

7.2. Свойства изображений

1. Линейность

Пусть $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_1, $g(t)$ есть оригинал с показателем роста s_2, $f(t)\div F(p)$, $g(t)\div G(p)$. Тогда

$$\boxed{\lambda\cdot f(t)+\mu\cdot g(t)\div\lambda\cdot F(p)+\mu\cdot G(p)},$$

где λ, μ – любые постоянные, $\operatorname{Re} p>\max\{s_1,s_2\}$.

Действительно, по свойству оригиналов функция $\lambda\cdot f(t)+\mu\cdot g(t)$ есть оригинал с показателем роста $s=\max\{s_1,s_2\}$, поэтому в области $\operatorname{Re} p>\max\{s_1,s_2\}$ изображение оригинала $\lambda\cdot f(t)+\mu\cdot g(t)$ существует. Вычислим его:

$$\lambda f(t)+\mu g(t)\div\int_0^{+\infty}\left(\lambda f(t)+\mu g(t)\right)e^{-pt}dt=\lambda\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt+\mu\int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt=\lambda F(p)+\mu G(p).$$

Используя это свойство, можно показать, что

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sin\alpha t\div\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}, & \cos\alpha t\div\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}\quad(\operatorname{Re} p>|\operatorname{Im}\alpha|)\\ \operatorname{sh}\alpha t\div\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}, & \operatorname{ch}\alpha t\div\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}\quad(\operatorname{Re} p>|\operatorname{Re}\alpha|).\end{array}}$$

(по договоренности опускаем множитель $\eta(t)$).

Действительно, по формуле Эйлера $\sin\alpha t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}\right)$.

Используя свойство линейности и пример 7.5, получим

$$\sin\alpha t \div \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\alpha} - \frac{1}{p+i\alpha}\right) = \frac{1}{2i}\frac{(p+i\alpha)-(p-i\alpha)}{p-i^2\alpha^2} = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(\pm i\alpha) = |\operatorname{Im}\alpha|.$$

Аналогично, например,

$$\operatorname{ch}\alpha t = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\right) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{p+\alpha}\right) = \frac{p}{p^2-\alpha^2}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(\pm\alpha) = |\operatorname{Re}\alpha|.$$

2. Свойство подобия

Пусть $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0 и $f(t) \div F(p)$. Тогда

$$\boxed{f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda}F(\lambda p), \quad \lambda > 0, \quad \operatorname{Re} p > \lambda s_0}.$$

Действительно, $f(\lambda t) \div \int\limits_0^{+\infty} f(\lambda t)e^{-pt}dt = \left|\begin{matrix}\lambda t = \tau \\ \lambda\, dt = d\tau\end{matrix}\right| = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\frac{p}{\lambda}\tau}d\tau = \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, причем, так как $f(\lambda t)$ есть оригинал с показателем роста λs_0, то его изображение существует в области $\operatorname{Re} p > \lambda s_0$.

3. Дифференцирование оригинала

Пусть $f^{(n)}(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0. Тогда $f^{(n-1)}(t)$, $f^{(n-2)}(t), \ldots,$ $f'(t), f(t)$ есть оригиналы с показателями роста s_0, причем, если $f(t) \div F(p)$, то

$$\boxed{\begin{aligned} &f'(t) \div pF(p) - f(0), \\ &f''(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \ldots., \\ &f^{(n)}(t) \div p^nF(p) - p^{n-1}f'(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), \end{aligned}}$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$ $(k = 1,2,3,\ldots)$ и $\operatorname{Re} p > s_0$.

Действительно, если $f^{(n)}(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0, то из свойств оригиналов следует, что $\int\limits_0^t f^{(n)}(\tau)d\tau = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0)$, а следовательно и $f^{(n-1)}(t)$, есть оригинал с показателем роста s_0. Аналогично, $f^{(n-2)}(t) = \int\limits_0^t f^{(n-1)}(\tau)d\tau + f^{(n-1)}(0)$ является оригиналом с показателем роста s_0 и т.д.

Найдем изображение оригинала $f'(t)$. Для этого воспользуемся определением изображения и методом интегрирования по частям:

$$f'(t) \div \int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \left|\begin{matrix} u = e^{-pt} \\ dv = f'(t)dt \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du = -pe^{-pt}dt \\ v = \int f'(t)dt = f(t) \end{matrix}\right| = f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + p\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Оценим функцию $f(t)e^{-pt}$, где $p = s + i\sigma$. Так как $|f(t)| \le M e^{s_0 t}$ и $\left|e^{-i\sigma t}\right| = 1$, то

$$\left| f(t)e^{-pt} \right| \le M \cdot e^{s_0 t} \left| e^{-st} \right| \cdot \left| e^{-i\sigma t} \right| = M \cdot e^{s_0 t} \cdot e^{-st} = M \cdot e^{-(s-s_0)t}.$$

Предел этой функции при $t \to +\infty$ равен нулю, так как $s = \operatorname{Re} p > s_0$. Поэтому $f'(t) \div 0 - f(0) + pF(p) = pF(p) - f(0)$. Пользуясь полученным изображением производной и учитывая, что $f''(t) = \left(f'(t)\right)'$, находим

$$f''(t) \div p\left[pF(p) - f(0)\right] - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) \text{ и т.д.}$$

Пример 7.6. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t) = \sin^2 t$.

Решение. Продифференцируем это равенство:

$$f'(t) = 2\sin t \cos t = \sin 2t.$$

Перейдем к изображениям:

$$pF(p) - \underbrace{f(0)}_{=0} = \frac{2}{p^2 + 2^2} \quad \Rightarrow \quad F(p) = \frac{2}{p\left(p^2 + 4\right)}.$$

4. Интегрирование оригинала

Пусть $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0, $f(t) \div F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$. Тогда

$$\boxed{\int_0^t f(\tau)\,d\tau \div \frac{F(p)}{p}.}$$

Таким образом, при интегрировании оригинала его изображение делится на p.

Действительно, рассмотрим функцию $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ и ее изображение $G(p)$. Известно, что $g'(t) = f(t)$. Перейдем в этом равенстве к изображениям, учитывая свойство 3:

$$pG(p) - g(0) = F(p), \quad g(0) = \int_0^0 f(\tau)\,d\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Пример 7.7. Доказать, что $t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Решение. Применим n раз свойство 4, учитывая, что $1 \div \frac{1}{p}$. Тогда получим:

$$t = \int_0^t 1 \cdot d\tau \div \frac{1/p}{p} = \frac{1}{p^2}, \ \frac{t^2}{2} = \int_0^t \tau\,d\tau \div \frac{1/p^2}{p} = \frac{1}{p^3}, \ \frac{t^3}{2\cdot 3} = \int_0^t \frac{\tau^2}{2}\,d\tau \div \frac{1/p^3}{p} = \frac{1}{p^4}, \ldots, \frac{t^n}{n!} \div \frac{1}{p^{n+1}} \Rightarrow t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

5. Дифференцирование изображения

Пусть $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0, $f(t) \div F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$. Тогда

$$\boxed{F'(p) \div (-t) f(t), \ F''(p) \div (-t)^2 f(t), \ldots, F^{(n)}(p) \div (-t)^n f(t).}$$

т.е. при дифференцировании изображения его оригинал умножается на $(-t)$.

Действительно, функция $F(p)$ в области $\operatorname{Re} p > s_0$ является аналитической и ее можно дифференцировать по p, причем, в силу равномерной сходимости интеграла, дифференцирование по p можно провести под знаком интеграла:

$$F'(p)=\left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right)'_p=\int_0^{+\infty}\left[f(t)e^{-pt}\right]'_p dt=\int_0^{+\infty}\left[(-t)f(t)\right]e^{-pt}dt \div (-t)f(t),$$

$$F''(p)=\left(F'(p)\right)'=\int_0^{+\infty}\left[(-t)f(t)e^{-pt}\right]'_p dt=\int_0^{+\infty}\left[(-t)^2 f(t)\right]e^{-pt}dt \div (-t)^2 f(t)\ \ldots .$$

Пример 7.8. Найти изображение оригиналов $t\cdot\sin\alpha t,\ t\cdot\cos\alpha t$.

Решение. Учтем, что $\sin\alpha t \div \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2},\ \cos\alpha t \div \frac{p}{p^2+\alpha^2}$. Умножим оригиналы на $(-t)$. При этом их изображения нужно продифференцировать по p, т.е.

$$(-t)\cdot\sin\alpha t \div \frac{d}{dp}\left(\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\right)=\frac{-2p\alpha}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2},$$

$$(-t)\cdot\cos\alpha t \div \frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+\alpha^2}\right)=-\frac{p^2-\alpha^2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}.$$

Следовательно, $t\cdot\sin\alpha t \div \frac{2p\alpha}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2},\ t\cdot\cos\alpha t \div \frac{p^2-\alpha^2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$.

6. Интегрирование изображения

Пусть $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0, $f(t)\div F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$. Тогда

$$\int_p^{+\infty} F(p)dp \div \frac{f(t)}{t}$$

при условии, что 1) $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом, 2) $\int_p^{\infty} F(p)dp=\lim_{\operatorname{Re} q\to\infty}\int_p^q F(p)dp$, причем путь интегрирования лежит в области $\operatorname{Re} p > s_0$.

Действительно, рассмотрим функцию $g(t)=\frac{f(t)}{t}$ и ее изображение $G(p)$. Учитывая свойство 5, получим:

$$G'(p)\div(-t)g(t)=(-t)\frac{f(t)}{t}=-f(t).$$

С другой стороны,

$$-F(p)\div -f(t).$$

Сравнивая эти два равенства, получим: $F(p)=-G'(p)$.

Проинтегрируем это равенство, выбирая путь интегрирования в области $\operatorname{Re} p > s_0$, где изображение существует и аналитично:

$$\int_p^{\infty} F(p)dp=-\int_p^{\infty} G'(p)dp=-\lim_{\operatorname{Re} q\to\infty}\int_p^q G'(p)dp=-\lim_{\operatorname{Re} q\to\infty}\left[G(q)-G(p)\right]=G(p).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\lim_{\operatorname{Re} q\to\infty} G(q)=0$ из следствия к теореме 7.1.

Пример 7.9. Найти изображение интегрального синуса $\operatorname{si}(t)=\int_0^t \frac{\sin t}{t}dt$.

Решение. Так как $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$, то из свойства 6, а затем из свойства 4 следует:

$$\frac{\sin t}{t} \div \int_p^{\infty} \frac{1}{p^2+1}dp = \operatorname{arctg} p\,\Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p, \quad \operatorname{si}(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{t}dt \div \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p\right).$$

7. Запаздывание оригинала

Пусть $f(t)\eta(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0 и $f(t)\eta(t) \div F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$. Тогда при запаздывании оригинала на время α (рис. 33) его изображение умножается на $e^{-p\alpha}$, т.е.

$$\boxed{f(t-\alpha)\eta(t-\alpha) \div F(p)e^{-p\alpha} \quad (\alpha > 0).}$$

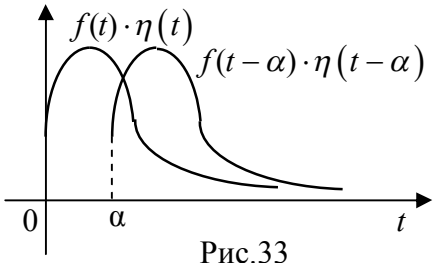

Рис.33

Действительно, используя определение изображения и учитывая, что $\eta(t-\alpha) = 0$ при $t < \alpha$, имеем:

$$f(t-\alpha)\eta(t-\alpha) \div \int_0^{+\infty} f(t-\alpha)\cdot\eta(t-\alpha)\cdot e^{-pt}dt = \int_{\alpha}^{+\infty} f(t-\alpha)\cdot e^{-pt}dt.$$

Сделав в интеграле замену $t-\alpha = \tau$, $dt = d\tau$, получим

$$f(t-\alpha)\cdot\eta(t-\alpha) \div \int_0^{+\infty} f(\tau)\cdot e^{-p(\tau+\alpha)}d\tau = e^{-p\alpha}\int_0^{+\infty} f(\tau)\cdot e^{-p\tau}d\tau = e^{-p\alpha}F(p).$$

Следствие (о единичной функции отрезка)

Единичная функция $\eta_{[a,b]}(t)$ отрезка $[a,b]$, равная единице на отрезке $[a,b]$ и нулю вне этого отрезка (рис.34), представима в виде

$$\eta_{[a,b]}(t) = \eta(t-a) - \eta(t-b) \qquad (7.3)$$

и имеет изображение $\eta_{[a,b]}(t) \div \frac{1}{p}e^{-pa} - \frac{1}{p}e^{-pb}$.

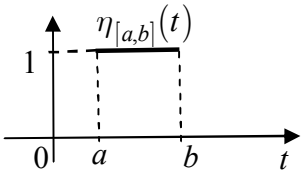

Рис.34

Действительно, рассмотрим функции $\eta(t-a)$, $\eta(t-b)$ (рис.35). На интервалах $(-\infty, a)$ и $(b, +\infty)$ их значения совпадают, а разность равна нулю. На отрезке $[a,b]$ их разность равна 1. Следовательно,

$$\eta_{[a,b]}(t) = \eta(t-a) - \eta(t-b).$$

Этот оригинал часто используется в приложениях.

Найдем его изображение, используя соотношение $\eta(t) \div \frac{1}{p}$ и свойство запаздывания оригинала: $\eta_{[a,b]}(t) \div \frac{1}{p}e^{-pa} - \frac{1}{p}e^{-pb}$.

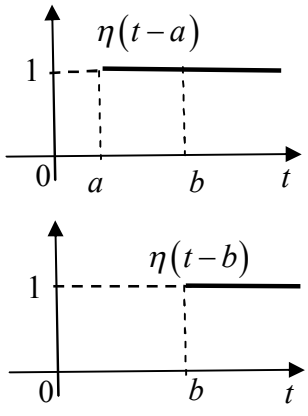

Рис.35

Пример 7.10. Найти изображение треугольного импульса (рис. 36).

Решение. Исходная функция $f(t)$ равна сумме двух вспомогательных функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ (рис. 37 и 38). Функция $f_1(t)$ равна t на отрезке $[0,2]$ и нулю вне этого отрезка т.е. $f_1(t) = t\cdot\eta_{[0,2]}(t)$. Функция $f_2(t)$ равна $4-t$ на отрезке $[2, 4]$ и нулю вне этого отрезка, т.е. $f_2(t) = (4-t)\cdot\eta_{[2,4]}(t)$. Таким образом,

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)=t\cdot\eta_{[0,2]}(t)+(4-t)\cdot\eta_{[2,4]}(t).$$

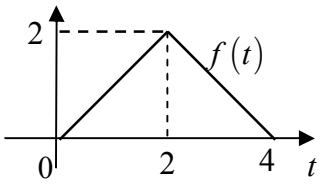

Рис.36

Воспользуемся соотношением (7.3):

$$f(t)=t\cdot\big[\eta(t)-\eta(t-2)\big]+(4-t)\cdot\big[\eta(t-2)-\eta(t-4)\big]=$$
$$=t\cdot\eta(t)-2(t-2)\cdot\eta(t-2)+(t-4)\cdot\eta(t-4).$$

Оригинал $t\cdot\eta(t)$ имеет изображение $\frac{1}{p^2}$. Для оригиналов, запаздывающих соответственно на 2 и 4, это изображение надо умножить на e^{-2p} и e^{-4p}. Поэтому $f(t)\div\frac{1}{p^2}-2\cdot\frac{1}{p^2}\cdot e^{-2p}+\frac{1}{p^2}\cdot e^{-4p}$.

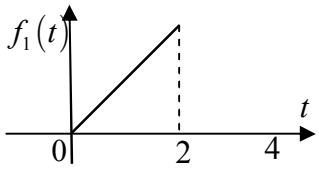

Рис. 37

8. Смещение изображения

Пусть $f(t)$ есть оригинал с показателем роста s_0, $f(t)\div F(p)$, $\operatorname{Re}p>s_0$. Тогда

$$\boxed{F(p-\alpha)\div f(t)e^{\alpha t},\ \operatorname{Re}(p-\alpha)>s_0.}$$

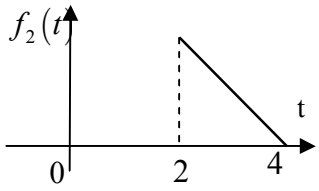

Рис. 38

Таким образом, при смещении изображения на α, оригинал умножается на $e^{\alpha t}$. Действительно,

$$f(t)\cdot e^{\alpha t}\div\int_0^{+\infty}\Big[f(t)\cdot e^{\alpha t}\Big]\cdot e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}f(t)\cdot e^{-(p-\alpha)t}dt=F(p-\alpha)$$

и интеграл сходится, если $\operatorname{Re}(p-\alpha)>s_0$.

Пример 7.11. Найти изображение оригинала $t^n e^{\alpha t}$.

Решение. Применяя свойство 8 к известному уже соотношению $t^n\div\frac{n!}{p^{n+1}}$, получим

$$\boxed{t^n e^{\alpha t}\div\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}}.$$

9. Изображение периодического оригинала

Пусть оригинал $f(t)$ с показателем роста s_0 имеет период T, $f(t)\div F(p)$. Тогда

$$\boxed{f(t)\div\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt,\quad \operatorname{Re}p>s_0}.$$

Действительно, $f(t)\div F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)\cdot e^{-pt}dt=\int_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt+\int_T^{+\infty}f(t)\cdot e^{-pt}dt=I_1+I_2$.

Сделав во втором интеграле I_2 замену $t=\tau+T$, $dt=d\tau$, получим

$$I_2=\int_T^{+\infty}f(t)\cdot e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}\underbrace{f(\tau+T)}_{=f(\tau)}\cdot e^{-p(\tau+T)}d\tau=e^{-pT}\int_0^{+\infty}f(\tau)\cdot e^{-p\tau}d\tau=e^{-pT}F(p)\Rightarrow$$

$$F(p)=I_1+I_2=\int_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt+e^{-pT}F(p)\ \Rightarrow\ F(p)\left(1-e^{-pT}\right)=\int_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt\Rightarrow$$

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt.$$

Пример 7.12. Найти изображение периодического с периодом T прямоугольного импульса $f(t)$ величины A и продолжительности $T/2$ (рис. 39).

Решение. Применяя свойство 9, получим:

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^{T/2} A\cdot e^{-pt}dt=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-pT}}A\cdot\frac{e^{-pt}}{-p}\Bigg|_{t=0}^{t=T/2}=\frac{A}{p}\cdot\frac{1-e^{-pT/2}}{1-e^{-pT}}=\frac{A}{p\left(1+e^{-pT/2}\right)}.$$

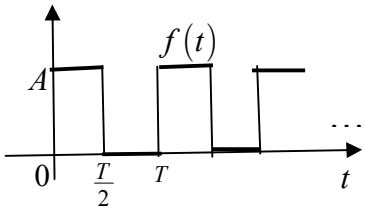

Рис.39

10. Свертка функций и ее изображение

Сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$ называют функцию

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau.$$

Отметим следующие свойства свертки.

1). Свертка симметрична, т.е. $f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$**.**

Действительно,

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau=\left|\begin{matrix}t-\tau=q\\ d\tau=-dq\end{matrix}\right|=-\int_t^0 f(t-q)\cdot g(q)dq=\int_0^t g(q)\cdot f(t-q)dq=g(t)*f(t).$$

2). Свертка оригиналов является оригиналом.

Действительно,

а) при $t<0$ имеем: $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau=0$, т.к. $f(\tau)=0$ при $\tau<t<0$,

б) свертка кусочно непрерывных функций является кусочно непрерывной функцией,

в) если $f(t),\ g(t)$ есть оригиналы с показателями роста $s_1,\ s_2$, то

$$|f(\tau)|\cdot|g(t-\tau)|\le M_1e^{s_1\tau}\cdot M_2e^{s_2(t-\tau)}\le\underbrace{M_1M_2}_{=M}e^{s\tau}e^{s(t-\tau)}=Me^{st},\quad s=\max\{s_1,s_2\}\ \Rightarrow$$

$$|f(t)*g(t)|=\left|\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau\right|\le\int_0^t|f(\tau)|\cdot|g(t-\tau)|d\tau\le M\int_0^t e^{st}d\tau\le Me^{st}t\le Me^{st}e^{\varepsilon t}=Me^{(s+\varepsilon)t},$$

т.е. свертка оригиналов является оригиналом с показателем роста $s=\max\{s_1,s_2\}$.

3). Изображением свертки функций является произведение их изображений; более точно, если $f(t)\div F(p)\ (\mathrm{Re}\,p>s_1),\quad g(t)\div G(p)\ (\mathrm{Re}\,p>s_2)$, то

$$f(t)*g(t)\div F(p)\cdot G(p),\ \ \mathrm{Re}\,p>\max\{s_1,s_2\}.$$

Действительно,

$$f(t)*g(t)\div\int_0^{+\infty}\left[f(t)*g(t)\right]\cdot e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau\right]\cdot\underbrace{e^{-p\tau}e^{-p(t-\tau)}}_{=e^{-pt}}dt.$$

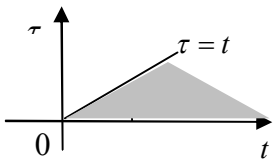

Рис.40

Имеем двойной интеграл по области $D:\begin{cases}0\le\tau\le t,\\ 0\le t<\infty\end{cases}$ (рис. 40).

Поменяем в двойном интеграле порядок интегрирования, затем во внутреннем интеграле сделаем замену $t-\tau=\eta,\ dt=d\eta$:

$$f(t)*g(t)\div\int_0^{+\infty}f(\tau)\cdot e^{-p\tau}d\tau\left[\int_\tau^{+\infty}g(t-\tau)\cdot e^{-p(t-\tau)}dt\right]=\int_0^{+\infty}f(\tau)\cdot e^{-p\tau}d\tau\left[\int_0^{+\infty}g(\eta)\cdot e^{-p\eta}d\eta\right]=F(p)\cdot G(p).$$

Пример 7.13. Найти изображение функции $\varphi(t)=\int_0^t\tau\cdot\sin(t-\tau)d\tau$.

Решение. Данную функцию можно записать в виде свертки $\varphi(t)=t*\sin t$. Так как $t\div\frac{1}{p^2}$, $\sin t\div\frac{1}{p^2+1}$, то изображением свертки данных функций является произведение их изображений, т.е. $\varphi(t)=t*\sin t\div\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p^2+1}$.

Пример 1.4. Найти оригинал по его изображению $F(p)=\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Решение. Имеем $F(p)=\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}$, где $\frac{1}{p^2+1}\div\sin t$. Следовательно,

$$\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\div\sin t*\sin t=\int_0^t\sin\tau\cdot\sin(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos(2\tau-t)-\cos t\right]d\tau=$$

$$=\left(\frac{1}{4}\sin(2\tau-t)-\frac{1}{2}\tau\cos t\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t}=\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin(-t)-\frac{t\cos t}{2}=\frac{\sin t-t\cos t}{2}.$$

11). Формула Дюамеля

Пусть $f(t)\div F(p)\ \ (\mathrm{Re}\,p>s_1)$, $\ g(t)\div G(p)\ \ (\mathrm{Re}\,p>s_2)$. Тогда

$$p\cdot F(p)\cdot G(p)\div f(t)*g'(t)+f(t)g(0),\ \ \mathrm{Re}\,p>\max\{s_1,s_2\}.$$

Действительно,

$$p\cdot F(p)\cdot G(p)=\left[p\cdot G(p)-g(0)\right]\cdot F(p)+g(0)\cdot F(p)\div f(t)*g'(t)+f(t)g(0).$$

Все основные правила и формулы операционного исчисления, рассмотренные выше, удобно свести в следующую таблицу.

№	оригинал	изображение
1	$\lambda f(t)+\mu g(t)$	$\lambda F(p)+\mu G(p)$
2	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
3	$f''(t)$	$p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$
4	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
5	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$

№	оригинал	изображение
12	1	$\frac{1}{p}$
13	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
14	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
15	$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
16	$\cos\alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$

6	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_{p}^{+\infty} F(p)\,dp$
7	$f(t-\alpha)\cdot\eta(t-\alpha)$	$F(p)\cdot e^{-\alpha p}$
8	$f(t)\cdot e^{\alpha t}$	$F(p-\alpha)$
9	$f(t)*g(t)=\int\limits_{0}^{t} f(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau$	$F(p)\cdot G(p)$
10	$f(t)*g'(t)+f(t)\cdot g(0)$	$p\cdot F(p)\cdot G(p)$
11	$f(t)$ с периодом T	$\frac{1}{1-e^{-pT}}\int\limits_{0}^{T} f(t)\cdot e^{-pt}\,dt$

17	$\operatorname{sh}\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
18	$\operatorname{ch}\alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
19	$t\cdot\sin\alpha t$	$\frac{2p\alpha}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$
20	$t\cdot\cos\alpha t$	$\frac{p^2-\alpha^2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$
21	$t\cdot\operatorname{sh}\alpha t$	$\frac{2p\alpha}{\left(p^2-\alpha^2\right)^2}$
22	$t\cdot\operatorname{ch}\alpha t$	$\frac{p^2+\alpha^2}{\left(p^2-\alpha^2\right)^2}$

Более подробные таблицы приведены, например, в [2], [6], [7].

7.3. Восстановление оригинала по его изображению

При решении задач с использованием преобразования Лапласа сначала переходят от уравнения для оригинала к более простому уравнению для его изображения, из которого находят изображение. Затем по этому изображению восстанавливают оригинал. Рассмотрим различные способы восстановления оригинала.

Сведение изображения к табличным изображениям

а) представить изображение в виде суммы табличных изображений (например, разложив дробь на простейшие дроби),

б) представить изображение в виде произведения табличных изображений

$$F(p)=F_1(p)\cdot F_2(p)\ \Rightarrow\ f(t)=f_1(t)*f_2(t), \tag{7.4}$$

$$F(p)=p\cdot F_1(p)\cdot F_2(p)\ \Rightarrow\ f(t)=f_1(t)*f_2'(t)+f_1(t)\cdot f_2(0), \tag{7.5}$$

в) использовать свойства запаздывания оригинала и смещения изображения

$$F(p)\div f(t)\ \Rightarrow\ F(p)\cdot e^{-\alpha p}\div f(t-\alpha)\cdot\eta(t-\alpha), \tag{7.6}$$

$$F(p)\div f(t)\ \Rightarrow\ F(p-\alpha)\div f(t)\cdot e^{\alpha t}, \tag{7.7}$$

г) использовать изображение периодического оригинала с периодом T, т.е. если

$$F(p)=\frac{G(p)}{1-e^{-pT}}, \tag{7.8}$$

то по изображению $G(p)$ восстановить оригинал $g(t)$ на отрезке $[0,T]$ и продолжить этот оригинал периодически.

Пример 7.15. Найти оригинал по его изображению $F(p)=\frac{1}{(p+1)^2}\cdot e^{-3p}$.

Решение. Воспользуемся табличным изображением $\frac{1}{p^2} \div t$ и формулами (7.7), (7.6):

$$\frac{1}{(p+1)^2} \div t e^{-t}\eta(t) \;\Rightarrow\; \frac{1}{(p+1)^2} e^{-3p} \div (t-3)\, e^{-(t-3)}\eta(t-3).$$

Пример 7.16. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \dfrac{p^3+3p-5}{(p+1)^2\left(p^2+2p+10\right)}$.

Решение. Разложим дробь на простейшие дроби:

$$F(p) = \frac{p^3+3p-5}{(p+1)^2\left(p^2+2p+10\right)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+2p+10} \;\Rightarrow$$

$$p^3+3p-5 = A(p+1)\left(p^2+2p+10\right) + B\left(p^2+2p+10\right) + (Cp+D)(p+1)^2 \;\Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} p=-1 & -9 = 9B & B=-1 & B=-1 \\ p^3 & 1 = A+C & A+C=1 & A=2/3 \\ p^2 & 0 = 3A+B+2C+D & A+D=-1 & C=1/3 \\ p=0 & -5 = 10A+10B+D & 10A+D=5 & D=-5/3 \end{array} \Rightarrow \Rightarrow$$

$$F(p) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{p-5}{p^2+2p+10} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(p+1)-6}{(p+1)^2+9}.$$

Воспользуемся табличными изображениями и свойством (7.7):

$$\frac{1}{p+1} \div e^{-t},\;\; \frac{1}{p^2} \div t,\;\; \frac{p}{p^2+9} \div \cos 3t,\;\; \frac{3}{p^2+9} \div \sin 3t \;\Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{2}{3}e^{-t} - te^{-t} - \frac{1}{3}\cos 3t\cdot e^{-t} - \frac{2}{3}\sin 3t\cdot e^{-t}.$$

Пример 7.17. Найти оригинал по его изображению

$$F(p) = \frac{G(p)}{1-e^{-pT}}, \text{ где } G(p) = \frac{1}{p^2} - \left(\frac{T}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)e^{-pT/2}.$$

Решение. Изображение имеет вид (7.8), поэтому искомый оригинал есть периодическая функция с периодом T, которая на отрезке $[0,T]$ совпадает с оригиналом $g(t)$ изображения $G(p)$. Оригинал $g(t)$ найдем, используя свойство линейности, соотношение (7.6) и табличные изображения $\frac{1}{p^2} \div t\cdot\eta(t),\;\; \frac{1}{p} \div \eta(t)$:

$$g(t) = t\cdot\eta(t) - \left(\frac{T}{2} + \left(t-\frac{T}{2}\right)\right)\cdot\eta\left(t-\frac{T}{2}\right) = t\cdot\eta(t) - t\cdot\eta\left(t-\frac{T}{2}\right) = \begin{cases} t, & 0<t<T/2, \\ 0, & t>T/2. \end{cases}$$

Искомый оригинал $f(t)$ получается при периодическом продолжении оригинала $g(t)$ с отрезка $[0,T]$ на положительную полуось t (рис. 41).

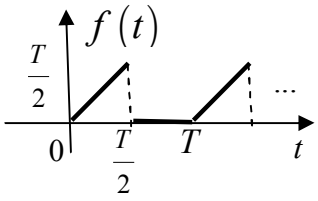

Рис. 41

Отыскание оригинала по формуле Меллина

Пусть $F(p)$ в области $\operatorname{Re} p > s_0$ является изображением оригинала $f(t)$ с показателем роста s_0. Тогда в точках непрерывности функции $f(t)$ справедлива формула Меллина:

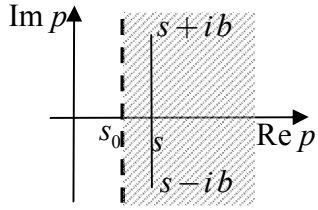

Рис.42

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\frac{1}{2\pi i}\lim_{b\to\infty}\int\limits_{s-ib}^{s+ib}F(p)e^{pt}dp,$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p=s>s_0$ (рис. 42).

Доказательство формулы Меллина мы опустим. Отметим, что непосредственное применение формулы Меллина обычно затруднительно. Однако при некоторых дополнительных условиях интеграл Меллина может быть вычислен с помощью вычетов.

Отыскание оригинала с помощью вычетов

Теорема 7.2. Пусть

1) функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$ с показателем роста s_0,

2) функция $F(p)$ является аналитической в комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек $p_1, p_2,..., p_n$ из области $\operatorname{Re} p\le s_0$,

3) $|F(p)|\le\varepsilon(R)$ на полуокружности $\gamma_R:\begin{cases}|p-s|=R,\\ \operatorname{Re} p\le s,\end{cases}$ $(s>s_0)$ и $\varepsilon(R)\to 0$ при $R\to\infty$.

Тогда
$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}F(p)e^{pt},\ t>0. \qquad (7.9)$$

Доказательство. Рассмотрим замкнутый контур γ, состоящий из отрезка $[s-iR, s+iR]$ и полуокружности γ_R (рис. 43). Выберем R настолько большим, чтобы особые точки $p_1, p_2,\ldots, p_n$ попали внутрь контура γ. По теореме (6.1)

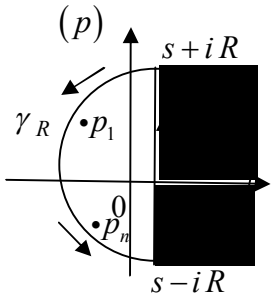

Рис. 43

$$\oint\limits_{\gamma^+}F(p)e^{pt}dp=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[F(p)e^{pt}\right].$$

С другой стороны, по свойству аддитивности интеграла

$$\oint\limits_{\gamma^+}F(p)e^{pt}dp=\int\limits_{s-iR}^{s+iR}F(p)e^{pt}dp+\int\limits_{\gamma_R}F(p)e^{pt}dp.$$

Сравнивая эти два равенства, получим:

$$\int\limits_{s-iR}^{s+iR}F(p)e^{pt}dp+\int\limits_{\gamma_R}F(p)e^{pt}dp=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[F(p)e^{pt}\right]. \qquad (7.10)$$

На полуокружности γ_R по условию теоремы функция $F(p)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, поэтому из леммы Жордана следует, что

$$\int\limits_{\gamma_R}F(p)e^{pt}dp\to 0 \text{ при } R\to\infty,\ t>0.$$

Тогда равенство (7.10) в пределе при $R\to\infty$ примет вид:

$$\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}dp=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[F(p)e^{pt}\right].$$

Учитывая формулу Меллина, получим:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}dp=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[F(p)e^{pt}\right],\ t>0$$

Следствие. Пусть функция $F(p)=\dfrac{R_k(p)}{Q_n(p)}$ есть отношение двух многочленов, $k<n$ и $p_1, p_2,\ldots,p_n$ есть нули знаменателя $Q_n(p)$. Тогда

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[F(p)e^{pt}\right].$$

Доказательство. Запишем функцию $F(p)=\dfrac{R_k(p)}{Q_n(p)}$ в виде

$$F(p)=\frac{R_k(p)}{Q_n(p)}=\frac{a_0p^k+a_1p^{k-1}+\ldots+a_k}{b_0p^n+b_1p^{n-1}+\ldots+b_n}=\frac{p^k\left(a_0+a_1p^{-1}+\ldots+a_kp^{-k}\right)}{p^n\left(b_0+b_1p^{-1}+\ldots+b_np^{-n}\right)}=\frac{1}{p^{n-k}}\cdot\varphi(p),$$

$$\text{где } \varphi(p)=\frac{\left(a_0+a_1p^{-1}+\ldots+a_kp^{-k}\right)}{\left(b_0+b_1p^{-1}+\ldots+b_np^{-n}\right)}.$$

Так как $\lim\limits_{p\to\infty}\varphi(p)=\dfrac{a_0}{b_0}$, то $\left|\varphi(p)\right|\le M$ при условии, что $\left|p\right|\ge R$. Поэтому

$$\left|F(p)\right|=\frac{1}{\left|p\right|^{n-k}}\cdot\left|\varphi(p)\right|\le\frac{M}{R^{n-k}}=\varepsilon(R).$$

Так как $n-k>0$, то $\varepsilon(R)\to0$ при $R\to\infty$, и можно применить теорему 7.2:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}F(p)e^{pt}.$$

Пример 7.18. Найти оригинал по его изображению $F(p)=\dfrac{1}{(p-4)^2(p-3)}$.

Решение. Изображение $F(p)$ является правильной дробью, имеет две особые точки: $p=4-$ полюс второго порядка, $p=3-$ полюс первого порядка. Используя следствие из теоремы 7.2, найдем оригинал:

$$f(t)=\operatorname*{Res}_{p=4}\left[F(p)e^{pt}\right]+\operatorname*{Res}_{p=3}\left[F(p)e^{pt}\right]=\lim_{p\to4}\left(\frac{e^{pt}\cdot(p-4)^2}{(p-4)^2(p-3)}\right)_p^{/}+\lim_{p\to3}\left(\frac{e^{pt}\cdot(p-3)}{(p-4)^2(p-3)}\right)=$$

$$=\lim_{p\to4}\left(\frac{e^{pt}\cdot t(p-3)-e^{pt}}{(p-3)^2}\right)+\lim_{p\to3}\left(\frac{e^{pt}}{(p-4)^2}\right)=e^{4t}(t-1)+e^{3t}.$$

Этот оригинал можно было найти, разлагая $F(p)$ на простейшие дроби.

Отыскание оригинала с помощью разложения в ряд

Пусть функция $F(p)$ в окрестности бесконечно удаленной точки разложима в ряд

$$F(p)=\frac{c_0}{p}+\frac{c_1}{p^2}+\frac{c_2}{p^3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}}.$$

Тогда $F(p)$ является изображением оригинала

$$f(t)=c_0+\frac{c_1}{1!}t+\frac{c_2}{2!}t^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}t^n. \qquad (7.11)$$

Эта формула основана на том, что $\frac{1}{p^{n+1}}\div\frac{t^n}{n!}$. Строгое обоснование формулы мы приводить не будем.

Пример 7.19. Найти оригинал по его изображению $F(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

Решение. Функция $F(p)$ имеет две особые точки $p=i$, $p=-i$ и является аналитической в окрестности бесконечности $|p|>1$. Для разложения функции $F(p)$ в ряд в этой окрестности представим функцию $F(p)$ в виде

$$F(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}=\left(p^2+1\right)^{-1/2}=\frac{1}{p}\cdot\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2}$$

и воспользуемся стандартным разложением

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots\ \ (|x|<1).$$

Тогда в окрестности бесконечности $|p|>1$ имеем $\left|\frac{1}{p^2}\right|<1$ и

$$F(p)=\frac{1}{p}\cdot\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2}=\frac{1}{p}\cdot\left(1+\frac{-1/2}{1!}\frac{1}{p^2}+\frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}\frac{1}{p^4}+\ldots\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^3}+\frac{1\cdot3}{2!2^2p^5}-\ldots\ .$$

С учетом формулы (7.11), оригинал $f(t)$ будет иметь вид:

$$f(t)=1-\frac{1}{2\cdot1!}\cdot\frac{t^2}{2!}+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}\frac{t^4}{4!}-\ldots=1-\frac{t^2}{2^2\cdot1!}+\frac{t^4}{2^4\cdot(2!)^2}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(t/2)^{2n}}{(n!)^2}\ .$$

Сумму этого ряда называют функцией Бесселя нулевого порядка и обозначают $J_0(t)$.

7.4. Применение операционного исчисления

Использование операционного метода основано на том, что при переходе от оригинала к изображению операции дифференцирования и интегрирования заменяются более простыми операциями умножения и деления. Поэтому операционный метод удобно применять для решения дифференциальных и интегральных уравнений. При этом следует:

1) перейти от оригиналов к их изображениям (исходное дифференциальное или интегральное уравнение для оригиналов перейдет в более простое уравнение для изображений – операторное уравнение);
2) из операторного уравнения найти изображение;
3) по изображению восстановить оригинал.

Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} a\,x''(t)+b\,x'(t)+c\,x(t)=f(t), \\ x(0)=x_0,\ x'(0)=x_1, \end{cases} \quad a,b,c-\text{постоянные.}$$

1). Перейдем от оригиналов к их изображениям, полагая $x(t)\div X(p),\ f(t)\div F(p)$:

$$\begin{cases} x(t)\div X(p), \\ x'(t)\div pX(p)-x(0), \\ x''(t)\div p^2X(p)-p\,x(0)-x'(0). \end{cases}$$

Умножая первое соотношение на c, второе – на b, третье – на a и складывая, получим:

$$a\,x''(t)+b\,x'(t)+c\,x(t)\div X(p)\left(a\,p^2+bp+c\right)-\underbrace{x(0)}_{=x_0}(ap+b)-a\underbrace{x'(0)}_{=x_1}.$$

С другой стороны, $a\,x''(t)+b\,x'(t)+c\,x(t)=f(t)\div F(p)$.

Сравнивая эти два соотношения, получим операторное уравнение

$$X(p)\left(a\,p^2+bp+c\right)-x_0(ap+b)-a\,x_1=F(p).$$

2). Решая операторное уравнение, найдем изображение

$$X(p)=\frac{F(p)+x_0(ap+b)+a\,x_1}{a\,p^2+bp+c}.$$

3). По изображению $X(p)$ восстановим оригинал $x(t)$.

Замечания.

1). Случай дифференциального уравнения n – го порядка с постоянными коэффициентами принципиально ничем не отличается от случая уравнения 2-го порядка.

2). При операционном методе решения, в отличие от классического метода, получаем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, минуя получение общего решения.

3). Для получения общего решения уравнения нужно считать начальные значения не заданными, а произвольными постоянными, т.е. $x(0)=c_1,\ x'(0)=c_2$.

4). Операционный метод применим и когда функция $f(t)$ кусочна непрерывна.

5). Если начальные условия заданы при $t=t_0\neq 0$, то сначала нужно сделать замену $t-t_0=\tau$. При этом $x'_t(t)=x'_\tau(t)\cdot\tau'_t=x'_\tau(t),\ x''_{tt}(t)=x''_{\tau\tau}(t)$.

Пример 7.20. Решить задачу Коши: $\begin{cases} x''(t)+9\,x(t)=f(t), \\ x(0)=0,\ x'(0)=0, \end{cases}$

если функция $f(t)$ задана графиком (рис.44).

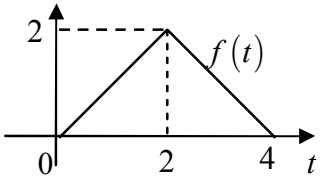

Рис.44

Решение. 1). Перейдем ÷ от оригиналов к их изображениям, полагая $x(t)\div X(p),\ f(t)\div F(p)$. Тогда

$$x(t) \div X(p),$$
$$x''(t) \div p^2 X(p) - p\,x(0) - x'(0) = p^2 X(p),$$
$$f(t) \div F(p) = \frac{1}{p^2} - 2\frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-4p} \quad (\text{пример } 7.10).$$

Используя свойство линейности, перейдем в дифференциальном уравнении от оригиналов к изображениям:

$$p^2 X(p) + 9X(p) = F(p).$$

2). Из полученного алгебраического уравнения найдем изображение

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^2+9} = \frac{1}{p^2\left(p^2+9\right)} - 2\cdot\frac{1}{p^2\left(p^2+9\right)}\cdot e^{-2p} + \frac{1}{p^2\left(p^2+9\right)}\cdot e^{-4p}.$$

3). По изображению восстановим оригинал.

Сначала найдем оригинал первого слагаемого

$$\frac{1}{p^2\left(p^2+9\right)} = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+9}\right)\cdot\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9}\right)\cdot\frac{1}{9} \div \left(t - \frac{1}{3}\sin t\right)\cdot\frac{1}{9} = \left(\frac{t}{9} - \frac{\sin t}{27}\right)\eta(t).$$

Второе и третье слагаемые в изображении $X(p)$ отличаются от первого множителями e^{-2p} и e^{-4p}, значит, их оригиналы запаздывают по сравнению с предыдущим на 2 и 4:

$$\frac{1}{p^2\left(p^2+9\right)}\cdot e^{-2p} \div \left(\frac{t-2}{9} - \frac{\sin(t-2)}{27}\right)\eta(t-2), \quad \frac{1}{p^2\left(p^2+9\right)}\cdot e^{-4p} \div \left(\frac{t-4}{9} - \frac{\sin(t-4)}{27}\right)\eta(t-4).$$

Окончательно, $x(t) = \left(\frac{t}{9} - \frac{\sin t}{27}\right)\eta(t) - 2\left(\frac{t-2}{9} - \frac{\sin(t-2)}{27}\right)\eta(t-2) + \left(\frac{t-4}{9} - \frac{\sin(t-4)}{27}\right)\eta(t-4).$

Подставляя $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\ge 0 \end{cases}$, $\eta(t-2) = \begin{cases} 0, & t<2 \\ 1, & t\ge 2 \end{cases}$, $\eta(t-4) = \begin{cases} 0, & t<4 \\ 1, & t\ge 4 \end{cases}$, получим:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{9} - \frac{\sin t}{27}, & 0 < t < 2, \\ \frac{t}{9} - \frac{\sin t}{27} - 2\left(\frac{t-2}{9} - \frac{\sin(t-2)}{27}\right), & 2 \le t \le 4, \\ \frac{t}{9} - \frac{\sin t}{27} - 2\left(\frac{t-2}{9} - \frac{\sin(t-2)}{27}\right) + \left(\frac{t-4}{9} - \frac{\sin(t-4)}{27}\right), & t > 4. \end{cases}$$

Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Дюамеля

Метод Дюамеля выгодно применять при решении уравнения со сложной правой частью $f(t)$ или при решении нескольких уравнений с одинаковыми левыми и различными правыми частями.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = f(t), \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0 \end{cases} \tag{7.12}$$

с нулевыми начальными условиями и постоянными коэффициентами a, b, c.

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\begin{cases} a\,x_1''(t)+b\,x_1'(t)+c\,x_1(t)=1, \\ x_1(0)=0,\ x_1'(0)=0 \end{cases} \tag{7.13}$$

с нулевыми начальными условиями и правой частью, равной единице.

Перейдем в задачах (7.12) и (7.13) от оригиналов к их изображениям, полагая $x(t)\div X(p)$, $x_1(t)\div X_1(p)$, $f(t)\div F(p)$ и учитывая, что $x'(t)\div pX(p)$, $x''(t)\div p^2X(p)$, $1\div\dfrac{1}{p}$.

Получим следующие операторные уравнения:

$$X(p)\left(a\,p^2+bp+c\right)=F(p), \tag{7.14}$$

$$X_1(p)\left(a\,p^2+bp+c\right)=\frac{1}{p}. \tag{7.15}$$

Поделим эти уравнения: $\dfrac{X(p)}{X_1(p)}=pF(p) \quad \Rightarrow \quad X(p)=pF(p)X_1(p)$.

Применив формулу Дюамеля (формула №10 из таблицы изображений), получим:

$$x(t)=f(t)*x_1'(t)+f(t)\cdot\underbrace{x_1(0)}_{=0}=f(t)*x_1'(t).$$

Итак, для решения задачи (7.12) нужно:

1) рассмотреть вспомогательную задачу (7.13) с правой частью, равной единице
$$\begin{cases} a\,x_1''(t)+b\,x_1'(t)+c\,x_1(t)=1, \\ x_1(0)=0,\ x_1'(0)=0; \end{cases}$$
2) в задаче (7.13) перейти к изображениям $X_1(p)\left(ap^2+bp+c\right)=\dfrac{1}{p}$ и восстановить оригинал $x_1'(t)$ по его изображению $pX_1(p)=\dfrac{1}{a\,p^2+bp+c}$;
3) решение исходной задачи (7.12) найти по формуле
$$x(t)=f(t)*x_1'(t)=\int_0^t f(\tau)\cdot x_1'(t-\tau)\,d\tau\,.$$

Замечание

Если начальные условия не являются нулевыми, то нужно их сделать нулевыми с помощью замены $y(t)=x(t)+\lambda t+\mu$ и подбора чисел $\lambda,\ \mu$.

Пример 7.21. Решить задачу Коши $\begin{cases} x''(t)+x(t)=\dfrac{1}{4+\sin^2 t}, \\ x(0)=0,\ x'(0)=0. \end{cases}$

Решение. Для функции $f(t)=\dfrac{1}{4+\sin^2 t}$ изображение найти сложно. Поэтому применим метод Дюамеля. Для этого запишем вспомогательную задачу с правой частью, равной единице:

$$\begin{cases} x_1''(t)+x_1(t)=1, \\ x_1(0)=0,\ x_1'(0)=0. \end{cases}$$

Перейдем от оригиналов к их изображениям, полагая $x_1(t) \div X_1(p)$ и учитывая, что $x_1'(t) \div pX_1(p)$, $x_1''(t) \div p^2 X_1(p)$, $1 \div \frac{1}{p}$. Получим:

$$X_1(p)\left(p^2+1\right) = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad p\,X_1(p) = \frac{1}{p^2+1} \;\Rightarrow\; x_1'(t) = \sin t\,.$$

Решение исходной задачи найдем по формуле

$$x(t) = f(t) * x_1'(t) = \int_0^t f(\tau)\cdot x_1'(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{1}{4+\sin^2\tau}\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \sin t\,\frac{\cos\tau}{4+\sin^2\tau}\,d\tau - \int_0^t \cos t\,\frac{\sin\tau}{4+\sin^2\tau}\,d\tau = \sin t\int_0^t \frac{d\sin\tau}{4+\sin^2\tau} + \cos t\int_0^t \frac{d\cos\tau}{5-\cos^2\tau} =$$

$$= \sin t\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sin t}{2} + \frac{\cos t}{2\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}+\cos\tau}{\sqrt{5}-\cos\tau}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{\sin t}{2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\sin t}{2} + \frac{\cos t}{2\sqrt{5}}\left(\ln\frac{\sqrt{5}+\cos t}{\sqrt{5}-\cos t} - \ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right).$$

Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Операционный метод решения системы линейных дифференциальных уравнений аналогичен методу решения одного линейного дифференциального уравнения. Переходя от оригиналов к изображениям, получим систему линейных алгебраических уравнений; решим ее одним из известных способов, например, методом Гаусса, или по формулам Крамера; затем по найденным изображениям восстановим оригиналы.

Пример 7.22. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$$

Решение. 1). Перейдем от оригиналов к изображениям.

Пусть $x(t) \div X(p)$, $y(t) \div Y(p)$. Тогда

$$x'(t) \div p\,X(p) - x(0) = p\,X(p),$$

$$x''(t) \div p^2 X(p) - p\,x(0) - x'(0) = p^2 X(p),$$

$$y'(t) \div p\,Y(p) - y(0) = p\,Y(p).$$

Учтём еще, что $1 - 2t \div \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2}$. Тогда дифференциальные уравнения для оригиналов перейдут в алгебраические уравнения для изображений:

$$\begin{cases} p\,X - p\,Y - 2X + 2\,Y = \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2}, \\ p^2 X + 2pY + X = 0, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} X(p-2) - Y(p-2) = \frac{(p-2)}{p^2}, \\ X\left(p^2+1\right) + 2pY = 0. \end{cases}$$

Сократим первое уравнение на $p-2$: $\begin{cases} X - Y = 1/p^2, \\ X\left(p^2+1\right) + 2pY = 0. \end{cases}$.

2) . Найдем изображения *X* и *Y* из этой системы алгебраических уравнений:

$$X = \frac{2}{p(p+1)^2}, \quad Y = X - \frac{1}{p^2}.$$

3). По изображениям восстановим оригиналы. Для этого функцию $X(p)$ разложим на простейшие дроби

$$\frac{2}{p(p+1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2}. \qquad (7.16)$$

Приведем к общему знаменателю и приравняем числители:

$$2 = A(p+1)^2 + B\,p(p+1) + C\,p.$$

Это равенство верно при любом p. В частности, при $p=0$ получим $2=A$, при $p=-1$ получим $2=-C$. Приравняв коэффициенты при p^2, получим $0=A+B$, откуда $B=-2$. Подставляя найденные коэффициенты в разложение (7.16), получим:

$$X(p) = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+1} - \frac{2}{(p+1)^2}.$$

Теперь воспользуемся табличными изображениями: $\frac{1}{p} \div 1$, $\frac{1}{p+1} \div e^{-t}$. Так как $\frac{1}{p^2} \div t$, то $\frac{1}{(p+1)^2} \div t e^{-t}$ (формула №8 из таблицы изображений) и $x(t) = 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t}$.

Из равенства $Y = X - \frac{1}{p^2}$ получим: $y(t) = x(t) - t = 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t} - t$

Окончательно имеем: $\begin{cases} x(t) = 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t}, \\ y(t) = 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t} - t. \end{cases}$

Решение интегрального уравнения типа свертки

Интегральным уравнением называют уравнение, в котором неизвестная функция входит под знак интеграла. Мы рассмотрим лишь интегральное уравнение типа свертки, т.е. уравнение вида

$$\lambda\, x(t) = f(t) + \int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau\,.$$

При $\lambda = 0$ уравнение называют интегральным уравнением Вольтера 1-го рода.
При $\lambda \neq 0$ уравнение называют интегральным уравнением Вольтера 2-го рода.

В этом уравнении интеграл представляет собой свертку функций $x(t)$ и $g(t)$, поэтому уравнение удобно записать в виде $\lambda\, x(t) = f(t) + x(t) * g(t)$ и решать операционным методом, переходя от оригиналов к изображениям.

Пусть $x(t) \div X(p)$, $f(t) \div F(p)$, $g(t) \div G(p)$. Тогда свертка функций $x(t)$ и $g(t)$ имеет изображение $X(p) \cdot G(p)$. При этом интегральное уравнение для оригинала перейдет в алгебраическое уравнение для его изображения:

$$\lambda X(p) = F(p) + X(p) \cdot G(p).$$

Найдем изображение $X(p)$ из этого уравнения: $X(p) = \frac{F(p)}{\lambda - G(p)}$.

По изображению восстановим оригинал $x(t)$.

Пример 7.23. Найти функцию $x(t)$ из уравнения $\int_0^t \sin(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = \sin^2 t$.

Решение. В этом уравнении интеграл представляет собой свертку функций $x(t)$ и $\sin t$, поэтому уравнение удобно записать в виде $x(t)*\sin t = \sin^2 t$.

1). Перейдем от оригиналов к изображениям. Пусть $x(t) \div X(p)$. Из таблицы изображений имеем: $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$, $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right)$. Тогда свертка функций $x(t)$ и $\sin t$, имеет изображение $X(p)\cdot\frac{1}{p^2+1}$. При этом интегральное уравнение для оригинала перейдет в алгебраическое уравнение для его изображения:

$$X(p)\cdot\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right).$$

2). Найдем изображение $X(p)$ из этого уравнения:

$$X(p) = \frac{p^2+1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right) = \frac{p^2+1}{2}\cdot\frac{4}{p\left(p^2+4\right)}$$

3). По изображению восстановим оригинал. Для этого числитель представим в виде $4p^2+4 = \left(p^2+4\right)+3p^2$. Тогда

$$X(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4p^2+4}{p\left(p^2+4\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(p^2+4\right)+3p^2}{p\left(p^2+4\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + 3\frac{p}{p^2+4}\right).$$

Получили сумму табличных изображений. Используя свойство линейности можно записать оригинал

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(1+3\cos 2t\right).$$

Вычисление несобственных интегралов

Пусть оригинал $f(t)$ с показателем роста s_0 имеет изображение $F(p)$.

Тогда из определения изображения следует, что

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = F(p)} \text{ в области } \operatorname{Re} p > s_0. \qquad (7.17)$$

Пример 7.24. Вычислить интегралы $\int_0^{+\infty} \cos 4t\cdot e^{-5t}dt$, $\int_0^{+\infty} t\sin 2t\cdot e^{-4t}dt$.

Решение. Интеграл $\int_0^{+\infty} \cos 4t\cdot e^{-5t}dt$ есть изображение оригинала $\cos 4t$ при $p=5$, т.е.

$$\int_0^{+\infty} \cos 4t\cdot e^{-5t}dt = \left.\frac{p}{p^2+4^2}\right|_{p=5} = \frac{5}{41}.$$

Отметим, что условие $\operatorname{Re} p > s_0$ выполняется, т.к. $\operatorname{Re} p = 5,\ s_0 = 0$ (п. 7.2, свойство 1).

Интеграл $\int_0^{+\infty} t\sin 2t\cdot e^{-4t}dt$ есть изображение оригинала $t\sin 2t$ при $p=4$, т.е.

$$\int_0^{+\infty} t\sin 2t\cdot e^{-4t}dt = -\left(\frac{2}{p^2+4}\right)'\Bigg|_{p=4} = \frac{2\cdot 2p}{\left(p^2+4\right)^2}\Bigg|_{p=4} = \frac{1}{25}.$$

Здесь использована формула №5 из таблицы изображений. Отметим, что условие $\operatorname{Re} p > s_0$ выполняется, т.к. $\operatorname{Re} p = 4,\ s_0 = 0$ (свойство 4 для оригиналов из п. 7.1 и свойство 1 для изображений из п. 7.2).

Библиографический список

1. Краснов М.Л. Вся высшая математика / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Эдиториал УРСС, 2005. Т.4. 352 с.
2. Пчелин Б.К. Специальные разделы высшей математики / Б.К. Пчелин. М.: Высшая школа, 1972. 462 с.
3. Сидоров В.Ю. Лекции по теории функций комплексного переменного / В.Ю. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. М.: Наука, 1982. 488 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике /Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2004. 603 с.
5. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов. Специальные курсы /А.Д. Мышкис. СПб.: Изд-во «Лань», 2002. 640 с.
6. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. М.: Наука, 1980. 946 с.
7. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1977. 831 с.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. М.: «Изд-во Астрель», 2003. 495 с.
9. Сборник задач по математике для втузов: В 4 ч. Ч.4 / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 2000. 464 с.
10. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1977. 831 с.

Оглавление

1. Комплексные числа…….....3
   1.1. Определение, изображение, формы записи ……..…….....3
   1.2. Основные действия с комплексными числами…….....4
2. Функции комплексного переменного…….....7
   2.1. Элементарные функции……7
   2.2. Предел и непрерывность функции……11
   2.3. Дифференцируемые функции…….…....12
   2.4. Аналитические функции…….…….....16
3. Интегрирование функций…….....17
   3.1. Определение и свойства интеграла ……..17
   3.2. Интегральные теоремы …….....19
   3.3. Интегральные формулы Коши…….....22
4. Ряды в комплексной области…….....25
   4.1. Числовые ряды……..……...25
   4.2. Функциональные ряды……....26
   4.3. Разложение аналитической функции в степенной ряд…….……...29
5. Теория вычетов …….……34
   5.1. Нули функции……..34
   5.2. Особые точки функции и их классификация…….……...36
   5.3. Вычеты функции в ее особых точках …….....39
6. Применение вычетов ……..……...41
   6.1. Применение вычетов к вычислению интегралов $\oint\limits_L f(z)dz$ ……...41
   6.2. Применение вычетов к вычислению интегралов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ …….....43
   6.3. Применение вычетов к вычислению интегралов
   $I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx,\ I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx,\ I_3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx$ …….……45
7. Операционное исчисление……47
   7.1. Понятие оригинала и его изображения…….……....47
   7.2. Свойства изображений……...…51
   7.3. Восстановление оригинала по его изображению……..…59
   7.4. Применение операционного исчисления…….....63
   7.5. Библиографический список……..……..…70

Учебное издание

Ревекка Максовна Минькова

Функции комплексного переменного и операционное исчисление

Редактор *И.В. Коршунова*
Компьютерная верстка *Р.М. Миньковой*

Подписано в печать	Формат 60×84 1/16	
Бумага типографская	Плоская печать	Усл. печ.л.
Уч.-изд. л.	Тираж	Заказ

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, Екатеринбург, Мира, 19