ГОЛИКОВА Е.А.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Индивидуальное домашнее задание

для студентов физических специальностей ФТИ

Вариант 1

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\boldsymbol{D}}$, действующее на произвольный элемент $\boldsymbol{f}(t)$ линейного пространства многочленов степени не выше, чем 2 $\boldsymbol{\mathcal{P}}_2 = \{\ \boldsymbol{f}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{f} = f'' + tf' - 2f$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\boldsymbol{D}}$ в базисах $\varepsilon = \big\{\boldsymbol{e}_1(t) = 1,\ \boldsymbol{e}_2(t) = t,\ \boldsymbol{e}_3(t) = t^2\big\}$ и $\varepsilon' = \big\{\boldsymbol{e'}_1(t) = 1 + t^2,\ \boldsymbol{e'}_2(t) = t,\ \boldsymbol{e'}_3(t) = 1\big\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ проецирует векторы плоскости xOy на ось Oy, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно прямой $y = -x$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_4 y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:
$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $\big(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{x},\ \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y}\big)$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 3+3i & -2-5i \\ 1+2i & -3i \end{pmatrix}$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ — ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 2\lambda x_2 x_4$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:
а) $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}\,xy - \frac{1}{2}y^2 + \sqrt{3}\,x + y - 3 = 0$;
б) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz + 4yz + 18\sqrt{2}\,x - 18\sqrt{2}\,z - 405 = 0$.

Вариант 2

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\boldsymbol{D}}$, действующее на произвольный элемент $\boldsymbol{f}(t)$ линейного пространства тригонометрических многочленов $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \{\ \boldsymbol{f}(t) = a_0 + a_1 \sin t + a_2 \cos t \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{f} = f'' + f$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\boldsymbol{D}}$ в базисах $\varepsilon = \big\{\boldsymbol{e}_1(t) = 1,\ \boldsymbol{e}_2(t) = \sin t,\ \boldsymbol{e}_3(t) = \cos t\big\}$ и $\varepsilon' = \big\{\boldsymbol{e'}_1(t) = 2 - \cos t,\ \boldsymbol{e'}_2(t) = \cos t,$ $\boldsymbol{e'}_3(t) = 1 + \sin t\big\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ поворачивает векторы пространства на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси Oz по часовой стрелке (если смотреть с конца вектора $\vec{\boldsymbol{k}}$), а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ растягивает каждый вектор в 3 раза. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}},\ \vec{\boldsymbol{k}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если: а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:
$\boldsymbol{a}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{a}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{a}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ i & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 2+3i & -2-5i \\ 1+2i & -1-3i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Является ли $\hat{\boldsymbol{A}}$ эрмитовым?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:
а) $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 6\sqrt{2}\,x + 3\sqrt{2}\,y = 0$;
б) $11x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy + 20yz - 16xz - 18x + 36z = 27$.

Вариант 3

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\boldsymbol{D}}$, действующее на произвольный элемент $\boldsymbol{f}(t)$ линейного пространства квазимногочленов
$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \{\ \boldsymbol{f}(t) = e^{3t}(a_0 + a_1t + a_2t^2) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{f} = f'$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\boldsymbol{D}}$ в базисах $\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1(t) = e^{3t}, \boldsymbol{e}_2(t) = e^{3t}t, \boldsymbol{e}_3(t) = e^{3t}t^2\}$ и $\varepsilon' = \{\boldsymbol{e'}_1(t) = e^{3t}(t - t^2)$,
$\boldsymbol{e'}_2(t) = -2e^{3t}, \boldsymbol{e'}_3(t) = e^{3t}(1 + t^2)\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно оси Oy, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ проецирует их на прямую $y = -\sqrt{3}\,x$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; б) $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:
$\boldsymbol{a}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{a}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{a}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 2+6i & -2-10i \\ 1+4i & -1-6i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Является ли $\hat{\boldsymbol{A}}$ эрмитовым?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 6x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 + \lambda x_4^2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2\lambda x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:
а) $-4\,x^2+2\sqrt{8}\,xy-2\,y^2+\sqrt{3}\,x+\sqrt{6}\,y+3=0$;
б) $x^2-2\,y^2+4\,z^2+4\,xy+4\sqrt{5}\,x+2\sqrt{5}\,y-23{,}5=0$.

Вариант 4

1. Показать, что оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$, действующий на векторы $\boldsymbol{x}$ арифметического пространства $\boldsymbol{\mathcal{R}}^3=\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-x_2+x_3\\-3x_1\\2x_1+x_2\end{pmatrix}$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах
$\varepsilon=\left\{\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\,\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\,\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ и $\varepsilon'=\left\{\boldsymbol{e'}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e'}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e'}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно прямой $y=\sqrt{3}x$, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ поворачивает их вокруг начала координат на угол $-\frac{\pi}{3}$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}}+\hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\,\vec{\boldsymbol{j}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}0&4&4\\0&2&0\\-1&2&4\end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4=\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\mid x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x,y)=2x_1y_1+x_2y_2+3x_3y_3-x_1y_2-x_2y_1+x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:
$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\,\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\,\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1,\,\boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A=\left(\begin{smallmatrix}i&1\\2&1\end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\,\hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A=\left(\begin{smallmatrix}-i&i\\-1-2i&1+i\end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\,\boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=$ $=3x_1^2+\lambda x_2^2+3x_3^2+\lambda x_4^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:
а) $2\,x^2+2\sqrt{6}\,xy-3\,y^2-2\sqrt{7}\,x+2\sqrt{42}\,y-21{,}25=0$;
б) $2\,x^2+2\,y^2+3\,z^2+4\,xy+2\,xz+2\,yz+6\sqrt{2}\,x-6\sqrt{2}\,y-24=0$.

Вариант 5

1. Показать, что оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$, действующий на векторы $\boldsymbol{x}$ матричного пространства $\boldsymbol{\mathcal{M}}=\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0&x_1&x_2\\0&0&x_3\\0&0&0\end{pmatrix}|x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0&0&x_1+x_2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, является линейным. Описать ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах
$\varepsilon=\left\{\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\,\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\,\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}$ и $\varepsilon'=\left\{\boldsymbol{e'}_1=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\right.$
$\left.\boldsymbol{e'}_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e'}_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ проецирует векторы пространства на прямую $\frac{x}{\sqrt{2}}=y=z$, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ действует на них следующим образом: $\hat{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{x}}=[-\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{x}}]$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}}+\hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\,\vec{\boldsymbol{j}},\,\vec{\boldsymbol{k}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если: а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1-4i & 1+2i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 3x_4^2 + 2\lambda x_1x_3 - 2x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:
а) $-4x^2 + 4xy - 4y^2 + 8\sqrt{2}\,x - 4\sqrt{2}\,y + 16 = 0$;
б) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 2\sqrt{5}\,x + 4\sqrt{5}\,y - 20 = 0$.

Вариант 6

1. Показать, что оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$, действующий на векторы $\boldsymbol{x}$ арифметического пространства $\boldsymbol{\mathcal{R}}^3 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах
$\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ и $\varepsilon' = \{\boldsymbol{e'}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e'}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e'}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ проецирует векторы плоскости xOy на прямую $x = 4y$, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ зеркально отражает их относительно прямой $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если: а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -2i & 1+i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_4$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $3\,x^2 - 2\sqrt{12}\,xy + 4\,y^2 + 12\sqrt{7}\,x + 6\sqrt{21}\,y + 42 = 0$;

б) $2\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,z^2 + 2\,xy + 2\,yz + 2\,xz + 8\sqrt{3}\,x + 8\sqrt{3}\,y + 8\sqrt{3}\,z = 0$.

Вариант 7

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\boldsymbol{D}}$, действующее на произвольный элемент $\boldsymbol{f}(t)$ линейного пространства многочленов степени не выше, чем 2 $\boldsymbol{\mathcal{P}}_2 = \{\ \boldsymbol{f}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{f} = 2f'' + f' - f$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\boldsymbol{D}}$ в базисах $\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1(t) = 1,\ \boldsymbol{e}_2(t) = t,\ \boldsymbol{e}_3(t) = t^2\}$ и $\varepsilon' = \{\boldsymbol{e'}_1(t) = 1 + 2t^2,\ \boldsymbol{e'}_2(t) = t,\ \boldsymbol{e'}_3(t) = 1\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ поворачивает векторы пространства вокруг оси Ox на угол $\frac{\pi}{4}$ (если смотреть с конца вектора $\vec{\boldsymbol{i}}$), а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ проецирует векторы пространства на плоскость yOz. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}},\ \vec{\boldsymbol{k}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ и $(\boldsymbol{x},\ \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 4-2i & -1+4i \\ 2-i & -1+2i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ — ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2\lambda x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2\lambda x_2x_4$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $2x^2 - 4\,xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$;

б) $3x^2 + y^2 - z^2 + 4\sqrt{3}\,xz + 10\sqrt{3}\,x + 10z + 5 = 0$.

Вариант 8

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\boldsymbol{D}}$, действующее на произвольный элемент $\boldsymbol{f}(t)$ линейного пространства тригонометрических многочленов $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \{\ \boldsymbol{f}(t) = a_0 + a_1 \sin t + a_2 \cos t \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{f} = f' + 3f$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\boldsymbol{D}}$ в базисах $\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1(t) = 1, \boldsymbol{e}_2(t) = \sin t, \boldsymbol{e}_3(t) = \cos t\}$ и $\varepsilon' = \{\boldsymbol{e'}_1(t) = 2, \boldsymbol{e'}_2(t) = \cos t, \boldsymbol{e'}_3(t) = 1 + \sin t\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно прямой $y = \sqrt{3}\,x$, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ проецирует векторы плоскости на прямую $y = 2x$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:
$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $\big(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y}\big)$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1+i & 2+i \\ 3+i & 1-i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\big\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\big\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:
а) $4\,xy - 3\,y^2 - 4x + 10y = 6$;
б) $x^2 + y^2 - 2\,z^2 + 4\,xy + 4\sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}\,y + 4z - 4 = 0$.

Вариант 9

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\boldsymbol{D}}$, действующее на произвольный элемент $\boldsymbol{f}(t)$ линейного пространства квазимногочленов
$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \{\ \boldsymbol{f}(t) = e^{3t}(a_0 + a_1t + a_2t^2) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{f} = f'' + f'$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\boldsymbol{D}}$ в базисах
$\varepsilon = \big\{\boldsymbol{e}_1(t) = e^{3t}, \boldsymbol{e}_2(t) = e^{3t}t, \boldsymbol{e}_3(t) = e^{3t}t^2\big\}$ и $\varepsilon' = \big\{\boldsymbol{e'}_1(t) = e^{3t}(t - t^2), \boldsymbol{e'}_2(t) = -e^{3t}$, $\boldsymbol{e'}_3(t) = e^{3t}(2 + t^2)\big\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ поворачивает векторы пространства вокруг оси Oy на угол $\frac{\pi}{3}$ (если смотреть с конца вектора $\vec{\boldsymbol{j}}$), а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ растягивает все векторы в 5 раз. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 3x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:
$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $\big(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y}\big)$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 1+i \\ 3+2i & 1-2i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\big\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2\big\}$, причём $\big\{\boldsymbol{e}_1, \ \boldsymbol{e}_2\big\}$ — ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 6x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 + \lambda x_4^2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2\lambda x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $9x^2 - 24\,xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0$;

б) $2x^2 - 2\,xy + y^2 - 2\,yz + 2z^2 - 6\sqrt{3}\,y + 3 = 0$.

Вариант 10

1. Показать, что оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$, действующий на векторы $\boldsymbol{x}$ арифметического пространства $\boldsymbol{\mathcal{R}}^3 = \{\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} 2x_2+x_3 \\ 4x_1 \\ x_1+x_2 \end{smallmatrix}\right)$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах
$\varepsilon = \left\{\boldsymbol{e}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{e}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{e}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ и $\varepsilon' = \left\{\boldsymbol{e'}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{e'}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{e'}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ проецирует векторы пространства на плоскость $z = 3y$, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ поворачивает их вокруг оси Oy на угол $\frac{\pi}{2}$ (если смотреть с конца вектора $\vec{\boldsymbol{j}}$). Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}},\ \vec{\boldsymbol{k}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; б) $A = \left(\begin{smallmatrix} -10 & 16 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:
$\boldsymbol{a}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{a}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{a}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $\big(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{x},\ \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y}\big)$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1-i & 2+i \\ 1-2i & i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе
$\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -3x_1^2 + \lambda x_2^2 + 3x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$;

б) $2\,x^2 + 2\,y^2 + 5\,z^2 + 2\,xy + 6\sqrt{2}\,x - 10\,z + 2 = 0$.

Вариант 11

1. Показать, что оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$, действующий на векторы $\boldsymbol{x}$ матричного пространства $\boldsymbol{\mathcal{M}} = \{\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \\ x_3 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, является линейным. Описать ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах
$\varepsilon = \left\{\boldsymbol{e}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{e}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{e}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ и $\varepsilon' = \left\{\boldsymbol{e'}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\right.$
$\left.\boldsymbol{e'}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{e'}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$, действует на каждый вектор пространства $\vec{\boldsymbol{x}}$ следующим образом: $\hat{\boldsymbol{A}}\vec{\boldsymbol{x}} = \Big[\vec{\boldsymbol{a}} \times [\vec{\boldsymbol{x}} \times \vec{\boldsymbol{b}}]\Big]$, где $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{k}}$, $\vec{\boldsymbol{b}} = -\vec{\boldsymbol{j}}$. Оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ поворачивает векторы пространства на угол $-\frac{\pi}{2}$ вокруг оси Oy (если смолтреть с конца вектора $\vec{\boldsymbol{j}}$). Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}},\ \vec{\boldsymbol{k}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 5x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:
$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ и $(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -i & 2+i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 3x_4^2 + 2\lambda x_1x_3 - 2x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:
а) $x^2 - 2\,xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + 5\,z^2 + 4\,xy + 2x + 10y - 17 = 0$.

Вариант 12

1. Показать, что оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$, действующий на векторы $\boldsymbol{x}$ арифметического пространства $\boldsymbol{\mathcal{R}}^3 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах
$\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ и $\varepsilon' = \{\boldsymbol{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ растягивает векторы пространства вдоль осей Ox и Oz в 3 раза, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ поворачивает их вокруг оси Oy на угол $\frac{\pi}{4}$ (если смотреть с конца вектора $\vec{\boldsymbol{j}}$). Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 1-i & 1+2i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, -2\boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = -2x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_4$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:
а) $5x^2 + 12\,xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;
б) $x^2 + 4\,y^2 + 5\,z^2 + 4\,xy - 12\,x + 6y + 10\,z + 5 = 0$.

Вариант 13

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\boldsymbol{D}}$, действующее на произвольный элемент $\boldsymbol{f}(t)$ линейного пространства многочленов степени не выше, чем 2 $\boldsymbol{\mathcal{P}}_2 = \{\ \boldsymbol{f}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{f} = t^2 f'' + t f' - f$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\boldsymbol{D}}$ в базисах $\varepsilon = \big\{\boldsymbol{e}_1(t) = 1,\, \boldsymbol{e}_2(t) = t,\, \boldsymbol{e}_3(t) = t^2\big\}$ и $\varepsilon' = \big\{\boldsymbol{e'}_1(t) = 1 + t^2,\, \boldsymbol{e'}_2(t) = t + t^2,\, \boldsymbol{e'}_3(t) = 1\big\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ проецирует все векторы плоскости xOy на ось Oy, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ зеркально отражает все векторы плоскости xOy относительно прямой $y = -\sqrt{3}\,x$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\big\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}}\big\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:
$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\big\{\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2\big\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $\big(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{x},\, \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y}\big)$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 3+4i & -2+5i \\ 1+i & -3i \end{pmatrix}$ в базисе $\big\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\, 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\big\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = -5x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2\lambda x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2\lambda x_2x_4$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:
а) $8x^2 + 34\,xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0$;
б) $2x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 4xy - 6xz - 12yz - 60 = 0$.

Вариант 14

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\boldsymbol{D}}$, действующее на произвольный элемент $\boldsymbol{f}(x,y)$ линейного пространства однородных многочленов степени два $\boldsymbol{\mathcal{H}}_2 = \{\ \boldsymbol{f}(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{f} = x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\boldsymbol{D}}$ в базисах $\varepsilon = \big\{\boldsymbol{e}_1(x,y) = x^2,\, \boldsymbol{e}_2(x,y) = xy,\, \boldsymbol{e}_3(x,y) = y^2\big\}$ и $\varepsilon' = \big\{\boldsymbol{e'}_1(x,y) = 2xy - y^2,$ $\boldsymbol{e'}_2(x,y) = x^2,\, \boldsymbol{e'}_3(x,y) = x^2 + xy\big\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ поворачивает все векторы пространства на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг оси Oz по часовой стрелке (если смотреть с конца вектора $\vec{\boldsymbol{k}}$), а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ растягивает каждый вектор в 2 раза. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\big\{\vec{\boldsymbol{i}},\, \vec{\boldsymbol{j}},\, \vec{\boldsymbol{k}}\big\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если: а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4=\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x,y)=2x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3+x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1,\,\boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\,\hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A=\begin{pmatrix} 2+i & 2-5i \\ 1+i & -1-3i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\,\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=$ $=-x_1^2+x_2^2+2x_3^2+\lambda x_4^2+2\lambda x_1x_3+2x_2x_3$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $25x^2-30\,xy+9y^2+68x+19=0$;

б) $2x^2+2y^2+5z^2+4\,xy-2\,yz-2\,xz+12\sqrt{2}\,x-12\sqrt{2}\,y=0$.

Вариант 15

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\boldsymbol{D}}$, действующее на произвольный элемент $\boldsymbol{f}(t)$ линейного пространства тригонометрических многочленов $\boldsymbol{\mathcal{T}}=\{\ \boldsymbol{f}(t)=a_0+a_1\sin t+a_2\cos t \mid a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{f}=3f''+f'$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\boldsymbol{D}}$ в базисах $\varepsilon=\{\boldsymbol{e}_1(t)=1,\,\boldsymbol{e}_2(t)=\sin t,\,\boldsymbol{e}_3(t)=\cos t\}$ и $\varepsilon'=\{\boldsymbol{e'}_1(t)=\sin t-\cos t,\,\boldsymbol{e'}_2(t)=-2,$ $\boldsymbol{e'}_3(t)=1+\cos t\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно оси Oy, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ проецирует их на прямую $y=-\frac{x}{2}$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}}+2\hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если: а) $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4=\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x,y)=2x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3-x_2y_3-x_3y_2+x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1,\,\boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\,\hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A=\begin{pmatrix} 2+7i & -2-4i \\ 1+3i & -1-6i \end{pmatrix}$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\,\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ — ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=$ $=-6x_1^2+\lambda x_2^2+x_3^2+\lambda x_4^2-4x_1x_3+2x_1x_4+2\lambda x_2x_3$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $8x^2+6\,xy+6x+3y+1=0$;

б) $2x^2+5y^2+2z^2-2\,xy+4\,xz-2\,yz+12\sqrt{2}\,x-12\sqrt{2}\,y=0$.

Вариант 16

1. Показать, что оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$, действующий на векторы $\boldsymbol{x}$ арифметического пространства $\boldsymbol{\mathcal{R}}^3=\{\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right)\mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}-x_1+x_3\\3x_2\\2x_2+3x_3\end{smallmatrix}\right)$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах
$\varepsilon=\{\boldsymbol{e}_1=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{e}_2=\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{e}_3=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\}$ и $\varepsilon'=\{\boldsymbol{e'}_1=\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{e'}_2=\left(\begin{smallmatrix}0\\-2\\0\end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{e'}_3=\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ на каждый вектор пространства $\vec{\boldsymbol{x}}$ действует следующим образом: $\hat{\boldsymbol{A}}\vec{\boldsymbol{x}}=\left[\vec{\boldsymbol{a}}\times\left[\vec{\boldsymbol{x}}\times\vec{\boldsymbol{b}}\right]\right]$, где $\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{j}}+\vec{\boldsymbol{k}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}=\vec{\boldsymbol{i}}+\vec{\boldsymbol{k}}$, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ поворачивает их вокруг оси Ox на угол $-\frac{\pi}{6}$ (если смотреть с конца вектора $\vec{\boldsymbol{i}}$). Найти матрицы операторов $3\hat{\boldsymbol{A}}-\hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}},\vec{\boldsymbol{k}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A=\left(\begin{smallmatrix}4&2&6\\0&-2&0\\-3&-2&-5\end{smallmatrix}\right)$; б) $A=\left(\begin{smallmatrix}-2&2&-2\\0&5&-6\\0&3&-4\end{smallmatrix}\right)$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4=\{\boldsymbol{x}=\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{smallmatrix}\right)\mid x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x,y)=2x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_1y_3-x_3y_1+x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:
$\boldsymbol{a}_1=\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\2\\1\end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{a}_2=\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\0\end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{a}_3=\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A=\left(\begin{smallmatrix}i&1\\2&1\end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A=\left(\begin{smallmatrix}-3i&2+i\\1-2i&1+i\end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\ -\boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=$ $=-3x_1^2+\lambda x_2^2+3x_3^2+\lambda x_4^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $4x^2+12\,xy+9y^2-8x-12y-5=0$;

б) $5x^2+2y^2+2z^2-2\,xy-2\,xz+4\,yz+48\sqrt{2}\,y-48\sqrt{2}\,z=0$.

Вариант 17

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\boldsymbol{D}}$, действующее на произвольный элемент $\boldsymbol{f}(x,y)$ линейного пространства однородных многочленов степени два $\boldsymbol{\mathcal{H}}_2=\{\ \boldsymbol{f}(x,y)=a_0x^2+a_1xy+a_2y^2\mid a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{f}=x\frac{\partial f}{\partial x}$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\boldsymbol{D}}$ в базисах $\varepsilon=\{\boldsymbol{e}_1(x,y)=x^2,\ \boldsymbol{e}_2(x,y)=xy,\ \boldsymbol{e}_3(x,y)=y^2\}$ и $\varepsilon'=\{\boldsymbol{e'}_1(x,y)=-xy+y^2,$
$\boldsymbol{e'}_2(x,y)=x^2+y^2,\ \boldsymbol{e'}_3(x,y)=xy\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ проецирует векторы пространства на прямую $x = \frac{y}{\sqrt{2}} = z$, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ действует на них следующим образом: $\hat{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{x}} = [\vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{x}}]$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + 4\hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}},\ \vec{\boldsymbol{k}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если: а) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -2-i & 2-i \\ 1+3i & 1+2i \end{pmatrix}$ в базисе $\{4\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (4-\lambda)x_1^2 + (4-\lambda)x_2^2 - (2+\lambda)x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$ является отрицательно определённой?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $225x^2 - 240\,xy + 64y^2 + 30x - 16y + 1 = 0$;

б) $18x^2 + 10y^2 + 10z^2 + 6\,xy - 6\,xz + 18\,yz - 57 = 0$.

Вариант 18

1. Показать, что оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$, действующий на векторы $\boldsymbol{x}$ арифметического пространства $\boldsymbol{\mathcal{R}}^3 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_2+x_3 \\ x_1+x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах $\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ и $\varepsilon' = \{\boldsymbol{e'}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e'}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e'}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ проецирует векторы плоскости xOy на прямую $x = 2y$, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ действует следующим образом: $\hat{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{x}} = 3\vec{\boldsymbol{a}}(\vec{\boldsymbol{a}},\ \vec{\boldsymbol{x}})$, где $\vec{\boldsymbol{a}} = 2\vec{\boldsymbol{j}} - \vec{\boldsymbol{k}}$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + 3\hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если: а) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 8 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1-i & 2+i \\ -2i & 1-3i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = -x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 - \lambda x_3^2 + 2x_2x_3$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $x^2 + 2\,xy + y^2 - 5x - 5y + 4 = 0$;

б) $2\,x^2 + 2\,y^2 + 17\,z^2 - 2\,xy - 8\,yz + 8\,xz - 38 = 0$.

Вариант 19

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\boldsymbol{D}}$, действующее на произвольный элемент $\boldsymbol{f}(t)$ линейного пространства многочленов степени не выше, чем 2 $\boldsymbol{\mathcal{P}}_2 = \{\ \boldsymbol{f}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{f} = f'' - 2f'$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\boldsymbol{D}}$ в базисах $\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1(t) = 1,\, \boldsymbol{e}_2(t) = t,\, \boldsymbol{e}_3(t) = t^2\}$ и $\varepsilon' = \{\boldsymbol{e'}_1(t) = 1 + 2t^2,\, \boldsymbol{e'}_2(t) = 1,\, \boldsymbol{e'}_3(t) = t\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ проецирует векторы плоскости xOy на ось Ox, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ зеркально отражает их относительно прямой $y = -2x$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} - \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\, \vec{\boldsymbol{j}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_3y_2 - x_2y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:
$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\, \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 3+i & -2-i \\ 1+2i & 3-3i \end{pmatrix}$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ — ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $5x^2 - 6\,xy + 5y^2 + 2x - 14y + 13 = 0$;

б) $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz - 4yz - 25\sqrt{2}\,y - 25\sqrt{2}\,z = 0$.

Вариант 20

1. Показать, что оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$, действующий на векторы $\boldsymbol{x}$ матричного пространства $\boldsymbol{\mathcal{M}} = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix} | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2+x_3 & 0 \end{pmatrix}$, является линейным. Описать ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах

$\varepsilon = \Big\{\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}\Big\}$ и $\varepsilon' = \Big\{\boldsymbol{e'}_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\-1&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix},$
$\boldsymbol{e'}_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e'}_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}\Big\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ поворачивает все векторы пространства на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг оси Oz (если смотреть с конца вектора $\vec{\boldsymbol{k}}$), а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ растягивает каждый вектор в 2 раза. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}},\ \vec{\boldsymbol{k}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если: а) $A = \begin{pmatrix} 4&-1&1\\2&1&-1\\2&-1&1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 10&-16&0\\6&-10&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1&1\\i&2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\ \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y})$, если $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2+3i & -2+2i\\ 1+2i & 1-3i \end{pmatrix}$ в базисе $\{2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = -9x_1^2 + 6\lambda x_1x_2 - x_2^2$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:
а) $x^2 - 2\,xy + y^2 + 8x - 8y + 22 = 0$;
б) $x^2 - 2\,y^2 + z^2 + 4\,xy + 4\,yz - 10\,xz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$.

Вариант 21

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\boldsymbol{D}}$, действующее на произвольный элемент $\boldsymbol{f}(t)$ линейного пространства тригонометрических многочленов $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \{\ \boldsymbol{f}(t) = a_0 + a_1 \sin t + a_2 \cos t \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{f} = f'' + f' - f$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\boldsymbol{D}}$ в базисах $\varepsilon = \{\boldsymbol{e}_1(t) = 1,\ \boldsymbol{e}_2(t) = \sin t,\ \boldsymbol{e}_3(t) = \cos t\}$ и $\varepsilon' = \{\boldsymbol{e'}_1(t) = \sin t - \cos t,\ \boldsymbol{e'}_2(t) = 3,$
$\boldsymbol{e'}_3(t) = 1 - 3\cos t\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно оси Oy, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ проецирует их на прямую $y = 2\sqrt{3}\,x$. Найти матрицы операторов $\boldsymbol{2}\hat{\boldsymbol{A}} + 3\hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если: а) $A = \begin{pmatrix} -3&1&1\\0&1&0\\-2&2&0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1&-2&1\\1&-4&1\\1&-2&-1 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 5x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $\big(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{x},\, \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y}\big)$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 2+5i & -2-6i \\ 1+4i & 6i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ — ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda+3)x_2^2$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $15x^2 + 24\,xy + 15y^2 + 30x - 24y + 20 = 0$;

б) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2\,xy - 4\,xz + 2\,yz + 2x - 10y - 2z = 1$.

Вариант 22

1. Показать, что оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$, действующий на векторы $\boldsymbol{x}$ арифметического пространства $\boldsymbol{\mathcal{R}}^3 = \{\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_2+2x_3 \\ 2x_1 \\ 2x_1-x_2 \end{pmatrix}$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах
$\varepsilon = \left\{\boldsymbol{e}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right),\, \boldsymbol{e}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right),\, \boldsymbol{e}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ и $\varepsilon' = \left\{\boldsymbol{e'}_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{e'}_2 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{e'}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно прямой $y = 3x$, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ поворачивает их вокруг начала координат на угол $-\frac{\pi}{4}$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; б) $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x,y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\boldsymbol{a}_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),\, \boldsymbol{a}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right),\, \boldsymbol{a}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 3i & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $\big(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{x},\, \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y}\big)$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} -2i & 3+i \\ -1+2i & 1+i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\, 3\boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = (4-\lambda)x_1^2 + (4-\lambda)x_2^2 - (2+\lambda)x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $15x^2 - 16\,xy - 15y^2 - 62x - 44y - 13 = 0$;

б) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2\,xy + 6\,xz + 2\,yz - 2x + 6y + 2z = 0$.

Вариант 23

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\boldsymbol{D}}$, действующее на произвольный элемент $\boldsymbol{f}(x,y)$ линейного пространства однородных многочленов степени два $\boldsymbol{\mathcal{H}}_2 = \{\ \boldsymbol{f}(x,y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{f} = 2x\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x} + y\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial y}$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\boldsymbol{D}}$ в базисах

$\varepsilon = \left\{ \boldsymbol{e}_1(x,y) = x^2,\ \boldsymbol{e}_2(x,y) = xy,\ \boldsymbol{e}_3(x,y) = y^2 \right\}$ и $\varepsilon' = \left\{ \boldsymbol{e'}_1(x,y) = -xy + y^2,\right.$ $\left.\boldsymbol{e'}_2(x,y) = x^2,\ \boldsymbol{e'}_3(x,y) = xy \right\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ проецирует векторы пространства на прямую $x = y = -\frac{z}{\sqrt{2}}$, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ действует на них так: $\hat{\boldsymbol{B}}\vec{\boldsymbol{x}} = \left[\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{x}}\right]$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + 5\hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\left\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}},\ \vec{\boldsymbol{k}}\right\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если: а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 4x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\left\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\right\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $\left(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\right) = \left(\boldsymbol{x},\ \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y}\right)$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 4-2i & i \\ 1-4i & 1+i \end{pmatrix}$ в базисе $\left\{3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2\right\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = $ $= x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 - \lambda x_3^2 + 2x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $17x^2 - 2\,xy + y^2 - 3x - y - 3 = 0$;

б) $4\,x^2 + y^2 + 4\,z^2 - 4\,xy + 4\,yz - 8\,xz + 28x - 2y + 16z + 45 = 0$.

Вариант 24

1. Показать, что оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$, действующий на векторы $\boldsymbol{x}$ арифметического пространства $\boldsymbol{\mathcal{R}}^3 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1+x_3 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix}$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах
$\varepsilon = \left\{\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ и $\varepsilon' = \left\{\boldsymbol{e'}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e'}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e'}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ проецирует векторы плоскости xOy на прямую $x = 5y$, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ зеркально отражает их относительно прямой $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\left\{\vec{\boldsymbol{i}},\ \vec{\boldsymbol{j}}\right\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если: а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ -3 & -8 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_3y_2 + x_2y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:
$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\left\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\right\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $\left(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\right) = \left(\boldsymbol{x},\ \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y}\right)$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1-i & 7+i \\ -2+i & 1+i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $4x^2 + 28\,xy + 49y^2 - 3x - 15y + 2 = 0$;

б) $2\,x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2 + 4\,xy + 2\,yz + 2\,xz + 4x + 6y + 2z + 3 = 0$.

Вариант 25

1. Показать, что оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$, действующий на векторы $\boldsymbol{x}$ арифметического пространства $\boldsymbol{\mathcal{R}}^3 = \{\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_2+x_3 \\ x_1+x_3 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах
$\varepsilon = \left\{\boldsymbol{e}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{e}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{e}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ и $\varepsilon' = \left\{\boldsymbol{e}'_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{e}'_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),\ \boldsymbol{e}'_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$.

2. Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ проецирует векторы плоскости xOy на прямую $x = y$, а оператор $\hat{\boldsymbol{B}}$ зеркально отражает их относительно прямой $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$. Найти матрицы операторов $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $\{\vec{\boldsymbol{i}},\, \vec{\boldsymbol{j}}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\boldsymbol{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; б) $A = \left(\begin{smallmatrix} 8 & 10 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

4. На арифметическом пространстве $\boldsymbol{\mathcal{R}}^4 = \{\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 7x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:
$\boldsymbol{a}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{a}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \boldsymbol{a}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

5. В ОНБ $\{\boldsymbol{e}_1,\, \boldsymbol{e}_2\}$ оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Проверить равенство: $\big(\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{x},\, \hat{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{y}\big)$, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\boldsymbol{A}}$ соответствует матрица $A = \left(\begin{smallmatrix} 1-i & 3+i \\ -2+i & 1-i \end{smallmatrix}\right)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\, 2\boldsymbol{e}_2\}$, причём $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\boldsymbol{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 9x_1^2 + 6\lambda x_1x_2 - x_2^2$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $4x^2 - 12\,xy + 8y^2 - 15x + 25y + 14 = 0$;

б) $2\,x^2 + 2\,y^2 - 5\,z^2 + 2\,xy - 2x - 4y + 4z + 2 = 0$.