ГОЛИКОВА Е.А.

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

Индивидуальное домашнее задание

для студентов физических специальностей ФТИ

Вариант 1.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R_i) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q^{j}_{\bullet k}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода
$A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}_{\bullet\bullet k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_i) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^{ij}_{\bullet\bullet i}\right)$;2) $\left(P^{i}_{\bullet j}\, Q_i\right)$; 3) $\left(P^{k}_{\bullet j}\, Q_i\, T^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}_{\bullet\bullet\bullet k}) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^{i}_{\bullet k}\right)$, в) $\left(T_{j}^{\bullet k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$, заданного в некотором ортонормированном базисе ε компонентами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 9 \end{smallmatrix}\right)$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел (T_{jk}). Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 2$, $(T_{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Вариант 2.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R^i) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q^{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_i) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^{ij} P^{k}_{\bullet j}\right)$;2) $\left(P^{i}_{\bullet j}\, Q_i\right)$; 3) $\left(P^{k}_{\bullet j}\, Q_i\, T^{ij}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами

$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) $\left(T^{ij}\right)$, б) $\left(T_{j}^{\bullet k}\right)$, в) (T_{ij}), если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора $\hat{\boldsymbol{Q}}$, заданного компонентами в некотором ортонормированном базисе ε
$\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_{ij}) = \left(\begin{smallmatrix} 11 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & 10 \\ -11 & 10 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q_{i}^{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^{ij}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 3$, $\left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Вариант 3.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R^i) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\cdot jk}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_i) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^i_{\cdot ji}\right)$;2) $\left(P^{ij}\, Q_i\right)$; 3) $\left(P^{ij}\, Q_k\, T^k_{\cdot ji}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}_{\cdots k}) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 12 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} -11 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -3 & 10 \\ 0 & -13 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = 2\boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^i_{\cdot k}\right)$, в) $\left(T_j^{\cdot k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$, заданного в некотором ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты ,если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\cdot j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^i_{\cdot j}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 1$, $\left(T^i_{\cdot j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$

Вариант 4.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R_i) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q^{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода
$A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^i_{\bullet k} P^k_{\bullet j}\right)$;2) $\left(P^i_{\bullet j}\, Q_i\right)$; 3) $\left(P^k_{\bullet j}\, Q_i\, T^i_{\bullet k}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}) = \left(\begin{smallmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^{ij}\right)$, в) $\left(T_{j}^{\bullet k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^i_{\bullet k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$, заданного в некотором ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел (T_{jk}). Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 2$, $(T_{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Вариант 5.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R^i) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q^i_{\bullet k}) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon\to\varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T_{ij}^{\bullet\bullet k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^i_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q^i\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T_{ji}^{\bullet\bullet i}\right)$;2) $\left(P^i_{\bullet j}\, Q^j\right)$; 3) $\left(P^k_{\bullet j}\, Q^j\, T_{ki}^{\bullet\bullet l}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P_{qrs}^{\bullet\bullet\bullet k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) $\left(T^{ij}\right)$, б) $\left(T^i_{\bullet k}\right)$, в) $\left(T_j^{\bullet k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $(T_{ij}) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в некотором ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^{ij}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon\to\varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 3$, $\left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Вариант 6.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R_i) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q^{jk}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q^i\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^i_{\bullet k} P^k_{\bullet j}\right)$;2) $\left(P^i_{\bullet j}\, Q^j\right)$; 3) $\left(P^k_{\bullet j}\, Q^j\, T^i_{\bullet k}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^i_{\bullet k}\right)$, в) $\left(T_j^{\bullet k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^i_{\bullet j}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 1$, $\left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 7.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R^i) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q^{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}_{\bullet\bullet k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix} \right)$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_i) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^{ij}_{\bullet\bullet i}\right)$;2) $\left(P^{ij} Q_i\right)$; 3) $\left(P^{kl} Q_i T^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)$.

3. В некотором ε базисе тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}_{\bullet\bullet\bullet k}) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix} \right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^{ij}\right)$, в) $\left(T^{\bullet k}_{j}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^{i}_{\bullet k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в некотором ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2\sqrt(3) \\ 1 & 1 & -2 \\ 2\sqrt(3) & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел (T_{jk}). Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 2$, $(T_{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Вариант 8.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}}=\hat{\boldsymbol{Q}}\otimes\hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon)=(R_i)=\left(\begin{smallmatrix}-1\\-2\end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon)=(Q_{jk})=\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon'=\varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon\to\varepsilon'}=\left(\begin{smallmatrix}-2&3\\3&-5\end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon)=\left(T^i_{\bullet j}\right)=\left(\begin{smallmatrix}3&5&0\\0&0&-1\\0&-1&1\end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon)=(P_{ij})=\left(\begin{smallmatrix}2&0&2\\1&-2&3\\-1&2&1\end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon)=\left(Q^i\right)=\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\3\end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^i_{\bullet k}P_{ij}\right)$;2) $\left(T^i_{\bullet j}\,Q^j\right)$; 3) $\left(P_{kj}\,Q^j\,T^i_{\bullet i}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами

$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon)=(P_{qrs})=\begin{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}0&3&2\\-3&0&1\\-2&-1&0\end{smallmatrix}\right)\\\left(\begin{smallmatrix}0&3&4\\-3&0&-1\\-4&1&0\end{smallmatrix}\right)\\\left(\begin{smallmatrix}0&-1&-1\\1&0&-1\\1&1&0\end{smallmatrix}\right)\end{pmatrix}$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) $\left(T^{ij}\right)$, б) $\left(T^i_{\bullet k}\right)$, в) $\left(T_j^{\bullet k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ есть $(T_{ij})=\left(\begin{smallmatrix}2&4\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора,заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon)=\left(T^{ij}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&2&-1\\2&1&-2\\1&2&-2\end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon)=\left(T^i_{\bullet j}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&0&1\\-1&0&0\\1&-1&1\end{smallmatrix}\right)$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^i_{\bullet j}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon\to\varepsilon'}\equiv A$, если: $M=1$, $\left(T^i_{\bullet j}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $A=\left(\begin{smallmatrix}2&-1\\-5&3\end{smallmatrix}\right)$

Вариант 9.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R^i) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 6 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon\to\varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{i\bullet j}_{\bullet k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 7 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q^{i}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^{i\bullet j}_{\bullet i}\right)$;2) $\left(P^{i}_{\bullet j}\, Q^{j}\right)$; 3) $\left(P^{k}_{\bullet j}\, Q^{j}\, T^{i\bullet l}_{\bullet k}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}_{\bullet\bullet\bullet k}) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^{i}_{\bullet k}\right)$, в) $\left(T^{\bullet k}_{j}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^{ij}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon\to\varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 3$, $\left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Вариант 10.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R_i) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_k^{\boldsymbol{\cdot} j}) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\boldsymbol{\cdot} j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^i_{\boldsymbol{\cdot} j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q^i\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^i_{\boldsymbol{\cdot} k} P^k_{\boldsymbol{\cdot} j}\right)$;2) $\left(P^i_{\boldsymbol{\cdot} j}\, Q^j\right)$; 3) $\left(P^k_{\boldsymbol{\cdot} j}\, Q^j\, T^i_{\boldsymbol{\cdot} k}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами

$$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^{ij}\right)$, в) $\left(T_j^{\boldsymbol{\cdot} k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^i_{\boldsymbol{\cdot} k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\boldsymbol{\cdot} j}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел (T_{jk}). Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 2$, $(T_{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Вариант 11.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R^i) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ijk}\right) = \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^i_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_i) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^{ijk} Q_i\right)$;2) $\left(P^i_{\bullet i}\right)$; 3) $\left(P^l_{\bullet j} Q_i T^{ijk}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}_{\bullet\bullet\bullet k}) = \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix}$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) $\left(T^{ij}\right)$, б) $\left(T^i_{\bullet k}\right)$, в) $\left(T_j^{\bullet k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $(T_{ij}) = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 9 \end{smallmatrix}\right)$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^i_{\bullet j}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 1$, $\left(T^i_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$

Вариант 12.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R^i) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q^{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q^i\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^i_{\bullet k} P^k_{\bullet j}\right)$;2) $\left(P^i_{\bullet j}\, Q^j\right)$; 3) $\left(P^k_{\bullet j}\, Q^j\, T^i_{\bullet k}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами

$$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{i}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^i_{\bullet k}\right)$, в) $\left(T_j^{\bullet k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^i_{\bullet j}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 1$, $\left(T^i_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$

Вариант 13.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R_i) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = (T_{ijk}) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q^i\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T_{ijk}\, Q^i\right)$;2) $\left(P^{ij}\, T_{ikl}\right)$; 3) $\left(P^{kj}\, Q^i\, T_{ijk}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P_{qrs}^{\cdot\cdot\cdot k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^{ij}\right)$, в) $\left(T_{j}^{\cdot k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^{i}_{\cdot k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -10 \\ -5 & -2 & 10 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{i}_{\cdot j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел (T_{jk}). Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 2$, $(T_{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Вариант 14.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R^i) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q^{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\cdot j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^i_{\cdot j}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_i) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^i_{\cdot k} P^k_{\cdot j}\right)$;2) $\left(P^i_{\cdot j}\, Q_i\right)$; 3) $\left(P^i_{\cdot j}\, Q_i\, T^k_{\cdot k}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами

$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = -2\boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) $\left(T^{ij}\right)$, б) $\left(T^i_{\cdot k}\right)$, в) $\left(T_j^{\cdot k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $(T_{ij}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q_i^{\cdot j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^i_{\cdot j}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 1$, $\left(T^i_{\cdot j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

Вариант 15.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R_i) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q^{j}_{\bullet k}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}_{\bullet\bullet k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_i) = \left(\begin{smallmatrix} 10 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^{ij}_{\bullet\bullet i}\right)$;2) $\left(P^{i}_{\bullet j}\, Q_i\right)$; 3) $\left(P^{k}_{\bullet j}\, Q_i\, T^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}_{\bullet\bullet\bullet k}) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^{i}_{\bullet k}\right)$, в) $\left(T_{j}^{\bullet k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = (T_{ij}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q_{i}^{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^{ij}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 3$, $\left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Вариант 16.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R^i) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q^{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^i_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q^i\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^i_{\bullet k} P^k_{\bullet j}\right)$;2) $\left(P^i_{\bullet j}\, Q^j\right)$; 3) $\left(P^k_{\bullet j}\, Q^j\, T^i_{\bullet k}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P_{qrs}) = \left(\begin{matrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \end{matrix}\right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^{ij}\right)$, в) $\left(T_{j}^{\bullet k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^i_{\bullet k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = (T_{ij}) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q_{i}^{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел (T_{jk}). Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 2$, $(T_{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Вариант 17.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R^i) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_{jk}) = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{i}_{\bullet jk}\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_i) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^{i}_{\bullet ki}\right)$;2) $\left(P^{ij} Q_i\right)$; 3) $\left(P^{kj} Q_i T^{i}_{\bullet jk}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}_{\bullet\bullet\bullet k}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -11 & 13 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) $\left(T^{ij}\right)$, б) $\left(T^{i}_{\bullet k}\right)$, в) $\left(T_{j}^{\bullet k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -1 \\ 7 & 10 & 16 \\ -5 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q_{i}^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^{i}_{\bullet j}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 1$, $\left(T^{i}_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 18.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R_i) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\boldsymbol{\cdot} j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^i_{\boldsymbol{\cdot} j}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q^i\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^i_{\boldsymbol{\cdot} k} P^k_{\boldsymbol{\cdot} j}\right)$;2) $\left(P^i_{\boldsymbol{\cdot} j}\, Q^j\right)$; 3) $\left(P^k_{\boldsymbol{\cdot} j}\, Q^j\, T^i_{\boldsymbol{\cdot} k}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}) = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^i_{\boldsymbol{\cdot} k}\right)$, в) $\left(T_j^{\boldsymbol{\cdot} k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \\ 8 & 2 & 17 \end{pmatrix}$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q_i^{\boldsymbol{\cdot} j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^i_{\boldsymbol{\cdot} j}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 1$, $\left(T^i_{\boldsymbol{\cdot} j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Вариант 19.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R^i) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q^{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ijk}\right) = \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 4 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^{i}_{\boldsymbol{\cdot} j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -5 & -3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_i) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^{ijk} Q_k\right)$;2) $\left(P^{i}_{\boldsymbol{\cdot} j} Q_i\right)$; 3) $\left(P^{l}_{\boldsymbol{\cdot} j} Q_i T^{ijk}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}_{\boldsymbol{\cdot\cdot\cdot} k}) = \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix}$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) $\left(T^{ij}\right)$, б) $\left(T^{i}_{\boldsymbol{\cdot} k}\right)$, в) $\left(T^{\boldsymbol{\cdot} k}_{j}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $(T_{ij}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = (T_{ij}) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -6 \\ 3 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q^{\boldsymbol{\cdot} j}_{i}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел (T_{jk}). Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 2$, $(T_{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Вариант 20.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R^i) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q^{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon\to\varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\boldsymbol{\cdot}j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q^i\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^i_{\boldsymbol{\cdot}k} P_{ij}\right)$;2) $\left(T^i_{\boldsymbol{\cdot}j}\, Q^j\right)$; 3) $\left(P_{kj}\, Q^j\, T^i_{\boldsymbol{\cdot}i}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^{ij}\right)$, в) $\left(T_{j}^{\boldsymbol{\cdot}k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^i_{\boldsymbol{\cdot}k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 7 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора; найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q_{i}^{\boldsymbol{\cdot}j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^{ij}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon\to\varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 3$, $\left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Вариант 21.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R_i) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_{k}^{\bullet j}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -5 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^{ij}_{\bullet\bullet k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} 7 & 0 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q^i\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^{ij}_{\bullet\bullet i}\right)$;2) $\left(P^{i}_{\bullet j}\, Q^j\right)$; 3) $\left(P^{i}_{\bullet j}\, Q^k\, T^{lj}_{\bullet\bullet k}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}_{\bullet\bullet\bullet k}) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 3 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^{i}_{\bullet k}\right)$, в) $\left(T_{j}^{\bullet k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = (T_{ij}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q_{i}^{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^{i}_{\bullet j}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 1$, $\left(T^{i}_{\bullet j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

Вариант 22.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R^i) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q^{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^i_{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q^i\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^i_{\bullet k} P^k_{\bullet j}\right)$;2) $\left(P^i_{\bullet j}\, Q^j\right)$; 3) $\left(P^k_{\bullet j}\, Q^j\, T^i_{\bullet k}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^{ij}\right)$, в) $\left(T_j^{\bullet k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^i_{\bullet k}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q_i^{\bullet j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел (T_{jk}). Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 2$, $(T_{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Вариант 23.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R_i) = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q^{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = (T_{ijk}) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_i) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T_{ijk}\, P^{ij}\right)$;2) $\left(P^{ij}\, Q_i\right)$; 3) $\left(P^{kj}\, Q_j\, T_{ilk}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P^{qrs}_{\cdot\cdot\cdot k}) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) $\left(T^{ij}\right)$, б) $\left(T^{i}_{\cdot k}\right)$, в) $\left(T^{\cdot k}_{j}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $(T_{ij}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = (T_{ij}) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{Q}} = \left(Q^{\cdot j}_{i}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^{i}_{\cdot j}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon \to \varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 1$, $\left(T^{i}_{\cdot j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$

Вариант 24.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{Q}} \otimes \hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon) = (R^i) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_{jk}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon' = \varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon\to\varepsilon'} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = \left(T^i_{\boldsymbol{\cdot} j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \left(P^i_{\boldsymbol{\cdot} j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = (Q_i) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^i_{\boldsymbol{\cdot} k} P^k_{\boldsymbol{\cdot} j}\right)$;2) $\left(P^i_{\boldsymbol{\cdot} j}\, Q_i\right)$; 3) $\left(P^j_{\boldsymbol{\cdot} j}\, Q_i\, T^i_{\boldsymbol{\cdot} k}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = (P_{qrs}) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -3 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1 = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) (T_{ij}), б) $\left(T^i_{\boldsymbol{\cdot} k}\right)$, в) $\left(T_j^{\boldsymbol{\cdot} k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ есть $\left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon) = (T_{ij}) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора; найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon) = \left(Q_i^{\boldsymbol{\cdot} j}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел $\left(T^{ij}\right)$. Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon\to\varepsilon'} \equiv A$, если: $M = 3$, $\left(T^{ij}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Вариант 25.

1. Пусть тензор $\hat{\boldsymbol{P}}=\hat{\boldsymbol{Q}}\otimes\hat{\boldsymbol{R}}$, а тензоры $\hat{\boldsymbol{Q}}$ и $\hat{\boldsymbol{R}}$ имеют в базисе ε компоненты $\hat{\boldsymbol{R}}(\varepsilon)=(R_i)=\left(\begin{smallmatrix}-1\\-2\end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon)=(Q_{jk})=\left(\begin{smallmatrix}2&0\\1&-2\end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{P}}$ в базисе ε и в базисе $\varepsilon'=\varepsilon A$, где матрица перехода $A_{\varepsilon\to\varepsilon'}=\left(\begin{smallmatrix}1&-4\\-1&5\end{smallmatrix}\right)$.

2. Тензоры $\hat{\boldsymbol{T}}$,$\hat{\boldsymbol{P}}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}$ в некотором базисе ε заданы матрицами
$\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon)=\left(T^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\\\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon)=\left(P^{i}_{\bullet j}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0&2\\1&1\end{smallmatrix}\right)$, $\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon)=(Q_i)=\left(\begin{smallmatrix}10\\-2\end{smallmatrix}\right)$.

Найти матрицы сверток: 1) $\left(T^{ij}_{\bullet\bullet i}\right)$;2) $\left(P^{i}_{\bullet j}\,Q_i\right)$; 3) $\left(P^{k}_{\bullet j}\,Q_i\,T^{ij}_{\bullet\bullet k}\right)$.

3. В некотором базисе ε тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ задан компонентами
$\hat{\boldsymbol{P}}(\varepsilon)=\left(P_{qrs}^{\bullet\bullet\bullet k}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\left(\begin{smallmatrix}2&3\\0&1\end{smallmatrix}\right)&\left(\begin{smallmatrix}-1&3\\-2&0\end{smallmatrix}\right)\\\left(\begin{smallmatrix}-3&0\\0&-3\end{smallmatrix}\right)&\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&3\end{smallmatrix}\right)\end{smallmatrix}\right)$. Найти компоненты тензоров $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{T}}$, полученных транспонированием $\hat{\boldsymbol{P}}$ по индексам (1, 2), (1, 3), (2, 3) соответственно. Является ли тензор $\hat{\boldsymbol{P}}$ симметричным (антисимметричным) по какой-либо паре индексов?

4. Пусть $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ – ортонормированный базис в пространстве E^2.Для базиса $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j},\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ найти взаимный базис; матрицы метрических тензоров; ко- и контравариантные координаты вектора $\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$; матрицы тензоров: а) $\left(T^{ij}\right)$, б) $\left(T^{i}_{\bullet k}\right)$, в) $\left(T_{j}^{\bullet k}\right)$, если компоненты тензора $\hat{\boldsymbol{T}}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ есть $(T_{ij})=\left(\begin{smallmatrix}2&-1\\2&1\end{smallmatrix}\right)$.

5. Построить геометрическое изображение (тензорную поверхность и дуальный вектор) для тензора, заданного в ортонормированном базисе ε координатами $\hat{\boldsymbol{T}}(\varepsilon)=(T_{ij})=\left(\begin{smallmatrix}2&-1&-5\\3&2&-1\\5&1&-5\end{smallmatrix}\right)$.

6. Представить тензор в виде суммы шарового тензора и девиатора, найти его инварианты, если в некотором базисе ε
$\hat{\boldsymbol{Q}}(\varepsilon)=\left(Q_{i}^{\bullet j}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&-1&0\end{smallmatrix}\right)$.

7. Псевдотензор $\hat{\boldsymbol{T}}$ веса M в базисе ε представлен массивом чисел (T_{jk}). Найти соответствующий массив чисел в новом базисе ε', связанном со старым матрицей перехода $A_{\varepsilon\to\varepsilon'}\equiv A$, если: $M=2$, $(T_{jk})=\left(\begin{smallmatrix}-2&2\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $A=\left(\begin{smallmatrix}-2&-1\\-5&-3\end{smallmatrix}\right)$.