

ГОЛИКОВА Е.А.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Индивидуальное домашнее задание

для студентов физических специальностей ФТИ

ВАРИАНТ 1

1. Показать, что дифференциальное преобразование \hat{D} , действующее на произвольный элемент $\mathbf{f}(t)$ линейного пространства многочленов степени не выше, чем 2 $\mathcal{P}_2 = \{ \mathbf{f}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ по правилу: $\hat{D}\mathbf{f} = \mathbf{f}'' + t\mathbf{f}' - 2\mathbf{f}$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора \hat{D} в базисах $\varepsilon = \{ \mathbf{e}_1(t) = 1, \mathbf{e}_2(t) = t, \mathbf{e}_3(t) = t^2 \}$ и $\varepsilon' = \{ \mathbf{e}'_1(t) = 1 + t^2, \mathbf{e}'_2(t) = t, \mathbf{e}'_3(t) = 1 \}$.

2. Оператор \hat{A} проецирует векторы плоскости xOy на ось Oy , а оператор \hat{B} зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно прямой $y = -x$. Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{ \vec{i}, \vec{j} \}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$ задано скалярное произведение: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_4 y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{i} \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 3+3i & -2-5i \\ 1+2i & -3i \end{pmatrix}$ в базисе $\{ 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \}$, причём $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \}$ — ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 2\lambda x_2 x_4$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадррики:

а) $\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy - \frac{1}{2}y^2 + \sqrt{3}x + y - 3 = 0$;

б) $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz + 4yz + 18\sqrt{2}x - 18\sqrt{2}z - 405 = 0$.

ВАРИАНТ 2

1. Показать, что дифференциальное преобразование \hat{D} , действующее на произвольный элемент $\mathbf{f}(t)$ линейного пространства тригонометрических многочленов $\mathcal{T} = \{ \mathbf{f}(t) = a_0 + a_1 \sin t + a_2 \cos t \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ по правилу: $\hat{D}\mathbf{f} = \mathbf{f}'' + \mathbf{f}$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора \hat{D} в базисах $\varepsilon = \{ \mathbf{e}_1(t) = 1, \mathbf{e}_2(t) = \sin t, \mathbf{e}_3(t) = \cos t \}$ и $\varepsilon' = \{ \mathbf{e}'_1(t) = 2 - \cos t, \mathbf{e}'_2(t) = \cos t, \mathbf{e}'_3(t) = 1 + \sin t \}$.

2. Оператор \hat{A} поворачивает векторы пространства на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси Oz по часовой стрелке (если смотреть с конца вектора \vec{k}), а оператор \hat{B} растягивает каждый вектор в 3 раза. Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору $\hat{\mathbf{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{\mathbf{A}}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\mathbf{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2+3i & -2-5i \\ 1+2i & -1-3i \end{pmatrix}$ в базисе $\{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Является ли $\hat{\mathbf{A}}$ эрмитовым?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 6\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0$;

б) $11x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy + 20yz - 16xz - 18x + 36z = 27$.

ВАРИАНТ 3

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\mathbf{D}}$, действующее на произвольный элемент $\mathbf{f}(t)$ линейного пространства квазимногочленов

$\mathcal{E} = \{\mathbf{f}(t) = e^{3t}(a_0 + a_1t + a_2t^2) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\mathbf{D}}\mathbf{f} = \mathbf{f}'$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\mathbf{D}}$ в базисах $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1(t) = e^{3t}, \mathbf{e}_2(t) = e^{3t}t, \mathbf{e}_3(t) = e^{3t}t^2\}$ и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1(t) = e^{3t}(t - t^2), \mathbf{e}'_2(t) = -2e^{3t}, \mathbf{e}'_3(t) = e^{3t}(1 + t^2)\}$.

2. Оператор $\hat{\mathbf{A}}$ зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно оси Oy , а оператор $\hat{\mathbf{B}}$ проецирует их на прямую $y = -\sqrt{3}x$. Найти матрицы операторов $\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}$ и $\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора $\hat{\mathbf{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору $\hat{\mathbf{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{\mathbf{A}}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\mathbf{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2+6i & -2-10i \\ 1+4i & -1-6i \end{pmatrix}$ в базисе $\{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Является ли $\hat{\mathbf{A}}$ эрмитовым?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 6x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 + \lambda x_4^2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2\lambda x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

- а) $-4x^2 + 2\sqrt{8}xy - 2y^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{6}y + 3 = 0$;
 б) $x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 4\sqrt{5}x + 2\sqrt{5}y - 23,5 = 0$.

ВАРИАНТ 4

1. Показать, что оператор \hat{A} , действующий на векторы \mathbf{x} арифметического пространства $\mathcal{R}^3 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_2+x_3 \\ -3x_1 \\ 2x_1+x_2 \end{pmatrix}$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

2. Оператор \hat{A} зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно прямой $y = \sqrt{3}x$, а оператор \hat{B} поворачивает их вокруг начала координат на угол $-\frac{\pi}{3}$. Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:
 а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -i & i \\ -1-2i & 1+i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 3x_1^2 + \lambda x_2^2 + 3x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

- а) $2x^2 + 2\sqrt{6}xy - 3y^2 - 2\sqrt{7}x + 2\sqrt{42}y - 21,25 = 0$;
 б) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz + 6\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y - 24 = 0$.

ВАРИАНТ 5

1. Показать, что оператор \hat{A} , действующий на векторы \mathbf{x} матричного пространства $\mathcal{M} = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, является линейным. Описать ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах

$$\varepsilon = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$
 и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

2. Оператор \hat{A} проецирует векторы пространства на прямую $\frac{x}{\sqrt{2}} = y = z$, а оператор \hat{B} действует на них следующим образом: $\hat{B}\vec{x} = [-\vec{k} \times \vec{x}]$. Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:
 а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1-4i & 1+2i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 3x_4^2 + 2\lambda x_1x_3 - 2x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадррики:

а) $-4x^2 + 4xy - 4y^2 + 8\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 16 = 0$;

б) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 20 = 0$.

ВАРИАНТ 6

1. Показать, что оператор \hat{A} , действующий на векторы \mathbf{x} арифметического пространства $\mathcal{R}^3 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, линейен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

2. Оператор \hat{A} проектирует векторы плоскости xOy на прямую $x = 4y$, а оператор \hat{B} зеркально отражает их относительно прямой $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$. Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:
 а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -2i & 1+i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_4$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $3x^2 - 2\sqrt{12}xy + 4y^2 + 12\sqrt{7}x + 6\sqrt{21}y + 42 = 0$;

б) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2xz + 8\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}y + 8\sqrt{3}z = 0$.

ВАРИАНТ 7

1. Показать, что дифференциальное преобразование \hat{D} , действующее на произвольный элемент $\mathbf{f}(t)$ линейного пространства многочленов степени не выше, чем 2 $\mathcal{P}_2 = \{ \mathbf{f}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ по правилу: $\hat{D}\mathbf{f} = 2f'' + f' - f$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора \hat{D} в базисах $\varepsilon = \{ \mathbf{e}_1(t) = 1, \mathbf{e}_2(t) = t, \mathbf{e}_3(t) = t^2 \}$ и $\varepsilon' = \{ \mathbf{e}'_1(t) = 1 + 2t^2, \mathbf{e}'_2(t) = t, \mathbf{e}'_3(t) = 1 \}$.

2. Оператор \hat{A} поворачивает векторы пространства вокруг оси Ox на угол $\frac{\pi}{4}$ (если смотреть с конца вектора \vec{i}), а оператор \hat{B} проецирует векторы пространства на плоскость yOz . Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$ задано скалярное произведение: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $(\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 4-2i & -1+4i \\ 2-i & -1+2i \end{pmatrix}$ в базисе $\{ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \}$, причём $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \}$ — ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2\lambda x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2\lambda x_2x_4$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$;

б) $3x^2 + y^2 - z^2 + 4\sqrt{3}xz + 10\sqrt{3}x + 10z + 5 = 0$.

ВАРИАНТ 8

1. Показать, что дифференциальное преобразование \hat{D} , действующее на произвольный элемент $\mathbf{f}(t)$ линейного пространства тригонометрических многочленов $\mathcal{T} = \{ \mathbf{f}(t) = a_0 + a_1 \sin t + a_2 \cos t \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ по правилу: $\hat{D}\mathbf{f} = f' + 3f$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора \hat{D} в базисах $\varepsilon = \{ \mathbf{e}_1(t) = 1, \mathbf{e}_2(t) = \sin t, \mathbf{e}_3(t) = \cos t \}$ и $\varepsilon' = \{ \mathbf{e}'_1(t) = 2, \mathbf{e}'_2(t) = \cos t, \mathbf{e}'_3(t) = 1 + \sin t \}$.

2. Оператор \hat{A} зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно прямой $y = \sqrt{3}x$, а оператор \hat{B} проецирует векторы плоскости на прямую $y = 2x$. Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{ \vec{i}, \vec{j} \}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору $\hat{\mathbf{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{\mathbf{A}}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\mathbf{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2+i \\ 3+i & 1-i \end{pmatrix}$ в базисе $\{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\mathbf{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $4xy - 3y^2 - 4x + 10y = 6$;

б) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4xy + 4\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 4z - 4 = 0$.

ВАРИАНТ 9

1. Показать, что дифференциальное преобразование $\hat{\mathbf{D}}$, действующее на произвольный элемент $\mathbf{f}(t)$ линейного пространства квазимногочленов

$\mathcal{E} = \{\mathbf{f}(t) = e^{3t}(a_0 + a_1t + a_2t^2) \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{\mathbf{D}}\mathbf{f} = \mathbf{f}'' + \mathbf{f}'$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора $\hat{\mathbf{D}}$ в базисах

$$\varepsilon = \{\mathbf{e}_1(t) = e^{3t}, \mathbf{e}_2(t) = e^{3t}t, \mathbf{e}_3(t) = e^{3t}t^2\} \text{ и } \varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1(t) = e^{3t}(t - t^2), \mathbf{e}'_2(t) = -e^{3t}, \mathbf{e}'_3(t) = e^{3t}(2 + t^2)\}.$$

2. Оператор $\hat{\mathbf{A}}$ поворачивает векторы пространства вокруг оси Oy на угол $\frac{\pi}{3}$ (если смотреть с конца вектора \vec{j}), а оператор $\hat{\mathbf{B}}$ растягивает все векторы в 5 раз. Найти матрицы операторов $\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}$ и $\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

3. Диагонализовать матрицу оператора $\hat{\mathbf{A}}$ или показать, что это невозможно, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 3x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору $\hat{\mathbf{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{\mathbf{A}}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\mathbf{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 3+2i & 1-2i \end{pmatrix}$ в базисе $\{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2\}$, причём $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\mathbf{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 6x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 + \lambda x_4^2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2\lambda x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

- а) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0$;
 б) $2x^2 - 2xy + y^2 - 2yz + 2z^2 - 6\sqrt{3}y + 3 = 0$.

ВАРИАНТ 10

1. Показать, что оператор \hat{A} , действующий на векторы \mathbf{x} арифметического пространства $\mathcal{R}^3 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

2. Оператор \hat{A} проецирует векторы пространства на плоскость $z = 3y$, а оператор \hat{B} поворачивает их вокруг оси Oy на угол $\frac{\pi}{2}$ (если смотреть с конца вектора \vec{j}). Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:
 а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -10 & 16 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1-i & 2+i \\ 1-2i & i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -3x_1^2 + \lambda x_2^2 + 3x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

- а) $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$;
 б) $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 6\sqrt{2}x - 10z + 2 = 0$.

ВАРИАНТ 11

1. Показать, что оператор \hat{A} , действующий на векторы \mathbf{x} матричного пространства $\mathcal{M} = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \\ x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \\ x_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, является линейным. Описать ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

2. Оператор \hat{A} , действует на каждый вектор пространства \vec{x} следующим образом: $\hat{A}\vec{x} = [\vec{a} \times [\vec{x} \times \vec{b}]]$, где $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{j}$. Оператор \hat{B} поворачивает векторы пространства на угол $-\frac{\pi}{2}$ вокруг оси Oy (если смолтредить с конца вектора \vec{j}). Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:
 а) $A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 5x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $(\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -i & 2+i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 3x_4^2 + 2\lambda x_1x_3 - 2x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадррики:

а) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

б) $x^2 + y^2 + 5z^2 + 4xy + 2x + 10y - 17 = 0$.

ВАРИАНТ 12

1. Показать, что оператор \hat{A} , действующий на векторы \mathbf{x} арифметического пространства $\mathcal{R}^3 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах

$$\varepsilon = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \text{ и } \varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

2. Оператор \hat{A} растягивает векторы пространства вдоль осей Ox и Oz в 3 раза, а оператор \hat{B} поворачивает их вокруг оси Oy на угол $\frac{\pi}{4}$ (если смотреть с конца вектора \vec{j}). Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:
 а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 1-i & 1+2i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, -2\mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -2x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_4$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

б) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y + 10z + 5 = 0$.

ВАРИАНТ 13

1. Показать, что дифференциальное преобразование \hat{D} , действующее на произвольный элемент $\mathbf{f}(t)$ линейного пространства многочленов степени не выше, чем 2 $\mathcal{P}_2 = \{ \mathbf{f}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ по правилу: $\hat{D}\mathbf{f} = t^2\mathbf{f}'' + t\mathbf{f}' - \mathbf{f}$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора \hat{D} в базисах $\varepsilon = \{ \mathbf{e}_1(t) = 1, \mathbf{e}_2(t) = t, \mathbf{e}_3(t) = t^2 \}$ и $\varepsilon' = \{ \mathbf{e}'_1(t) = 1 + t^2, \mathbf{e}'_2(t) = t + t^2, \mathbf{e}'_3(t) = 1 \}$.

2. Оператор \hat{A} проецирует все векторы плоскости xOy на ось Oy , а оператор \hat{B} зеркально отражает все векторы плоскости xOy относительно прямой $y = -\sqrt{3}x$. Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{ \vec{i}, \vec{j} \}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \}$ задано скалярное произведение: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 3+4i & -2+5i \\ 1+i & -3i \end{pmatrix}$ в базисе $\{ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -5x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 + 2\lambda x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2\lambda x_2x_4$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0$;

б) $2x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 4xy - 6xz - 12yz - 60 = 0$.

ВАРИАНТ 14

1. Показать, что дифференциальное преобразование \hat{D} , действующее на произвольный элемент $\mathbf{f}(x, y)$ линейного пространства однородных многочленов степени два $\mathcal{H}_2 = \{ \mathbf{f}(x, y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ по правилу: $\hat{D}\mathbf{f} = x\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} - y\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора \hat{D} в базисах $\varepsilon = \{ \mathbf{e}_1(x, y) = x^2, \mathbf{e}_2(x, y) = xy, \mathbf{e}_3(x, y) = y^2 \}$ и $\varepsilon' = \{ \mathbf{e}'_1(x, y) = 2xy - y^2, \mathbf{e}'_2(x, y) = x^2, \mathbf{e}'_3(x, y) = x^2 + xy \}$.

2. Оператор \hat{A} поворачивает все векторы пространства на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг оси Oz по часовой стрелке (если смотреть с конца вектора \vec{k}), а оператор \hat{B} растягивает каждый вектор в 2 раза. Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:
 а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2+i & 2-5i \\ 1+i & -1-3i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадратики:

а) $25x^2 - 30xy + 9y^2 + 68x + 19 = 0$;

б) $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy - 2yz - 2xz + 12\sqrt{2}x - 12\sqrt{2}y = 0$.

ВАРИАНТ 15

1. Показать, что дифференциальное преобразование \hat{D} , действующее на произвольный элемент $\mathbf{f}(t)$ линейного пространства тригонометрических многочленов $\mathcal{T} = \{\mathbf{f}(t) = a_0 + a_1 \sin t + a_2 \cos t \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{D}\mathbf{f} = 3f'' + f'$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора \hat{D} в базисах $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1(t) = 1, \mathbf{e}_2(t) = \sin t, \mathbf{e}_3(t) = \cos t\}$ и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1(t) = \sin t - \cos t, \mathbf{e}'_2(t) = -2, \mathbf{e}'_3(t) = 1 + \cos t\}$.

2. Оператор \hat{A} зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно оси Oy , а оператор \hat{B} проецирует их на прямую $y = -\frac{x}{2}$. Найти матрицы операторов $\hat{A} + 2\hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:
 а) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2+7i & -2-4i \\ 1+3i & -1-6i \end{pmatrix}$ в базисе $\{2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\}$, причём $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -6x_1^2 + \lambda x_2^2 + x_3^2 + \lambda x_4^2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2\lambda x_2x_3$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0$;

б) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz - 2yz + 12\sqrt{2}x - 12\sqrt{2}y = 0$.

ВАРИАНТ 16

1. Показать, что оператор \hat{A} , действующий на векторы \mathbf{x} арифметического пространства $\mathcal{R}^3 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1+x_3 \\ 3x_2 \\ 2x_2+3x_3 \end{pmatrix}$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

2. Оператор \hat{A} на каждый вектор пространства $\vec{\mathbf{x}}$ действует следующим образом: $\hat{A}\vec{\mathbf{x}} = [\vec{\mathbf{a}} \times [\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{b}}]]$, где $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{k}}$, а оператор \hat{B} поворачивает их вокруг оси Ox на угол $-\frac{\pi}{6}$ (если смотреть с конца вектора $\vec{\mathbf{i}}$). Найти матрицы операторов $3\hat{A} - \hat{B}, \hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -3i & 2+i \\ 1-2i & 1+i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -3x_1^2 + \lambda x_2^2 + 3x_3^2 + \lambda x_4^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0$;

б) $5x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 4yz + 48\sqrt{2}y - 48\sqrt{2}z = 0$.

ВАРИАНТ 17

1. Показать, что дифференциальное преобразование \hat{D} , действующее на произвольный элемент $\mathbf{f}(x, y)$ линейного пространства однородных многочленов степени два $\mathcal{H}_2 = \{\mathbf{f}(x, y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{D}\mathbf{f} = x\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора \hat{D} в базисах $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1(x, y) = x^2, \mathbf{e}_2(x, y) = xy, \mathbf{e}_3(x, y) = y^2\}$ и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1(x, y) = -xy + y^2, \mathbf{e}'_2(x, y) = x^2 + y^2, \mathbf{e}'_3(x, y) = xy\}$.

2. Оператор \hat{A} проецирует векторы пространства на прямую $x = \frac{y}{\sqrt{2}} = z$, а оператор \hat{B} действует на них следующим образом: $\hat{B}\vec{x} = [\vec{j} \times \vec{x}]$. Найти матрицы операторов $\hat{A} + 4\hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -2-i & 2-i \\ 1+3i & 1+2i \end{pmatrix}$ в базисе $\{4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (4 - \lambda)x_1^2 + (4 - \lambda)x_2^2 - (2 + \lambda)x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$ является отрицательно определённой?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $225x^2 - 240xy + 64y^2 + 30x - 16y + 1 = 0$;

б) $18x^2 + 10y^2 + 10z^2 + 6xy - 6xz + 18yz - 57 = 0$.

ВАРИАНТ 18

1. Показать, что оператор \hat{A} , действующий на векторы \mathbf{x} арифметического пространства $\mathcal{R}^3 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

2. Оператор \hat{A} проецирует векторы плоскости xOy на прямую $x = 2y$, а оператор \hat{B} действует следующим образом: $\hat{B}\vec{x} = 3\vec{a}(\vec{a}, \vec{x})$, где $\vec{a} = 2\vec{j} - \vec{k}$. Найти матрицы операторов $\hat{A} + 3\hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 8 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1-i & 2+i \\ -2i & 1-3i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -x_1^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 4x_2^2 - \lambda x_3^2 + 2x_2 x_3$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадратики:

а) $x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 4 = 0$;

б) $2x^2 + 2y^2 + 17z^2 - 2xy - 8yz + 8xz - 38 = 0$.

ВАРИАНТ 19

1. Показать, что дифференциальное преобразование \hat{D} , действующее на произвольный элемент $\mathbf{f}(t)$ линейного пространства многочленов степени не выше, чем 2 $\mathcal{P}_2 = \{\mathbf{f}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{D}\mathbf{f} = \mathbf{f}'' - 2\mathbf{f}'$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора \hat{D} в базисах $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1(t) = 1, \mathbf{e}_2(t) = t, \mathbf{e}_3(t) = t^2\}$ и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1(t) = 1 + 2t^2, \mathbf{e}'_2(t) = 1, \mathbf{e}'_3(t) = t\}$.

2. Оператор \hat{A} проецирует векторы плоскости xOy на ось Ox , а оператор \hat{B} зеркально отражает их относительно прямой $y = -2x$. Найти матрицы операторов $\hat{A} - \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_3 + x_4 y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^* \mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 3+i & -2-i \\ 1+2i & 3-3i \end{pmatrix}$ в базисе $\{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\}$, причём $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадратики:

а) $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x - 14y + 13 = 0$;

б) $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz - 4yz - 25\sqrt{2}y - 25\sqrt{2}z = 0$.

ВАРИАНТ 20

1. Показать, что оператор \hat{A} , действующий на векторы \mathbf{x} матричного пространства $\mathcal{M} = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 + x_3 & 0 \end{pmatrix}$, является линейным. Описать ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах

$$\varepsilon = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ и } \varepsilon' = \left\{ \mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Оператор \hat{A} поворачивает все векторы пространства на угол $\frac{\pi}{6}$ вокруг оси Oz (если смотреть с конца вектора \vec{k}), а оператор \hat{B} растягивает каждый вектор в 2 раза. Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 10 & -16 & 0 \\ 6 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2+3i & -2+2i \\ 1+2i & 1-3i \end{pmatrix}$ в базисе $\{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -9x_1^2 + 6\lambda x_1x_2 - x_2^2$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $x^2 - 2xy + y^2 + 8x - 8y + 22 = 0$;

б) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10xz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$.

ВАРИАНТ 21

1. Показать, что дифференциальное преобразование \hat{D} , действующее на произвольный элемент $\mathbf{f}(t)$ линейного пространства тригонометрических многочленов $\mathcal{T} = \left\{ \mathbf{f}(t) = a_0 + a_1 \sin t + a_2 \cos t \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$ по правилу: $\hat{D}\mathbf{f} = \mathbf{f}'' + \mathbf{f}' - \mathbf{f}$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора \hat{D} в базисах $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1(t) = 1, \mathbf{e}_2(t) = \sin t, \mathbf{e}_3(t) = \cos t\}$ и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1(t) = \sin t - \cos t, \mathbf{e}'_2(t) = 3, \mathbf{e}'_3(t) = 1 - 3 \cos t\}$.

2. Оператор \hat{A} зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно оси Oy , а оператор \hat{B} проецирует их на прямую $y = 2\sqrt{3}x$. Найти матрицы операторов $2\hat{A} + 3\hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 5x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{e_1, e_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^*y)$, если $x = e_1 + e_2$, $y = e_1 - e_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2+5i & -2-6i \\ 1+4i & 6i \end{pmatrix}$ в базисе $\{e_1 + 2e_2, e_1 + e_2\}$, причём $\{e_1, e_2\}$ — ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(x, x) = \lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda + 3)x_2^2$ отрицательно определена?

8. Построить в естественном базисе квадратики:

а) $15x^2 + 24xy + 15y^2 + 30x - 24y + 20 = 0$;

б) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z = 1$.

ВАРИАНТ 22

1. Показать, что оператор \hat{A} , действующий на векторы x арифметического пространства $\mathcal{R}^3 = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{A}x = \begin{pmatrix} x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах

$$\varepsilon = \{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \text{ и } \varepsilon' = \{e'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

2. Оператор \hat{A} зеркально отражает векторы плоскости xOy относительно прямой $y = 3x$, а оператор \hat{B} поворачивает их вокруг начала координат на угол $-\frac{\pi}{4}$. Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{e_1, e_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 3i & 1 \\ 2 & i \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^*y)$, если $x = e_1 + e_2$, $y = e_1 + 2e_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} -2i & 3+i \\ -1+2i & 1+i \end{pmatrix}$ в базисе $\{e_1 + e_2, 3e_2\}$, причём e_1 и e_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(x, x) = (4 - \lambda)x_1^2 + (4 - \lambda)x_2^2 - (2 + \lambda)x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадратики:

а) $15x^2 - 16xy - 15y^2 - 62x - 44y - 13 = 0$;

б) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$.

ВАРИАНТ 23

1. Показать, что дифференциальное преобразование \hat{D} , действующее на произвольный элемент $f(x, y)$ линейного пространства однородных многочленов степени два

$\mathcal{H}_2 = \{f(x, y) = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ по правилу: $\hat{D}f = 2x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$, является линейным. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора \hat{D} в базисах

$\varepsilon = \{\mathbf{e}_1(x, y) = x^2, \mathbf{e}_2(x, y) = xy, \mathbf{e}_3(x, y) = y^2\}$ и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1(x, y) = -xy + y^2, \mathbf{e}'_2(x, y) = x^2, \mathbf{e}'_3(x, y) = xy\}$.

2. Оператор $\hat{\mathbf{A}}$ проецирует векторы пространства на прямую $x = y = -\frac{z}{\sqrt{2}}$, а оператор $\hat{\mathbf{B}}$ действует на них так: $\hat{\mathbf{B}}\vec{x} = [\vec{i} \times \vec{x}]$. Найти матрицы операторов $\hat{\mathbf{A}} + 5\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}$ и $\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора $\hat{\mathbf{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 4x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов: $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору $\hat{\mathbf{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{\mathbf{A}}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору $\hat{\mathbf{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 4-2i & i \\ 1-4i & 1+i \end{pmatrix}$ в базисе $\{3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли $\hat{\mathbf{A}}$?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 - \lambda x_3^2 + 2x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадрики:

а) $17x^2 - 2xy + y^2 - 3x - y - 3 = 0$;

б) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8xz + 28x - 2y + 16z + 45 = 0$.

ВАРИАНТ 24

1. Показать, что оператор $\hat{\mathbf{A}}$, действующий на векторы \mathbf{x} арифметического пространства $\mathcal{R}^3 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1+x_3 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix}$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

2. Оператор $\hat{\mathbf{A}}$ проецирует векторы плоскости xOy на прямую $x = 5y$, а оператор $\hat{\mathbf{B}}$ зеркально отражает их относительно прямой $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Найти матрицы операторов $\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}$ и $\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора $\hat{\mathbf{A}}$ или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ -3 & -8 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_3y_2 + x_2y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору $\hat{\mathbf{A}}$ соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{\mathbf{A}}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1-i & 7+i \\ -2+i & 1+i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадратики:

а) $4x^2 + 28xy + 49y^2 - 3x - 15y + 2 = 0$;

б) $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2xz + 4x + 6y + 2z + 3 = 0$.

ВАРИАНТ 25

1. Показать, что оператор \hat{A} , действующий на векторы \mathbf{x} арифметического пространства $\mathcal{R}^3 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ следующим образом: $\hat{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$, линеен. Описать его ядро и образ. Найти матрицы оператора в базисах $\varepsilon = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ и $\varepsilon' = \{\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

2. Оператор \hat{A} проецирует векторы плоскости xOy на прямую $x = y$, а оператор \hat{B} зеркально отражает их относительно прямой $y = -\frac{x}{\sqrt{2}}$. Найти матрицы операторов $\hat{A} + \hat{B}$, $\hat{A}\hat{B}$ и $\hat{B}\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

3. Диагонализировать матрицу оператора \hat{A} или показать, что это невозможно, если:
а) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4. На арифметическом пространстве $\mathcal{R}^4 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ задано скалярное произведение: $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 7x_3y_3 + x_4y_4$. Проверить корректность определения. Преобразовать к ортонормированной следующую систему векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. В ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Проверить равенство: $(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}^*\mathbf{y})$, если $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

6. Линейному оператору \hat{A} соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1-i & 3+i \\ -2+i & 1-i \end{pmatrix}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_2\}$, причём \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 образуют ОНБ. Эрмитов ли \hat{A} ?

7. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 9x_1^2 + 6\lambda x_1x_2 - x_2^2$ положительно определена?

8. Построить в естественном базисе квадратики:

а) $4x^2 - 12xy + 8y^2 - 15x + 25y + 14 = 0$;

б) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y + 4z + 2 = 0$.