Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Р. М. Минькова

Математический анализ

*Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по программе бакалавриата и специалитета
по направлениям подготовки
140800.62 – Ядерные физика и технологии;
141401.65 – Ядерные реакторы и материалы;
141405.65 – Технологии разделения изотопов и ядерное топливо;
140801.65 – Электроника и автоматика физических установок;
210100.62 – Электроника и наноэлектроника;
201000.62 –Биотехнические системы и технологии;
200100.62 –Приборостроение;
221700.62 – Стандартизация и метрология;
230100.62 – Информатика и вычислительная техника;
230400.62 –Информационные системы и технологии
240100.62 –Химическая технология
150100.62 –Материаловедение и технология материалов
222000.62 –Инноватика*

Екатеринбург
УрФУ
2013

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
М62

Рецензенты:
кафедра прикладной математики Уральского государственного экономического университета
(зав. кафедрой, доц., канд. физ.-мат. наук Ю.Б. Мельников);
старший научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН, проф., д-р физ.-мат. наук Е.Ф. Леликова;

Научный редактор − доц., канд. физ.-мат. наук Н.В. Чуксина

М62 **Минькова, Р.М.**
Математический анализ: учебное пособие / Р.М. Минькова.
Екатеринбург: УрФУ, 2013. 93 с.

ISBN

Рассмотрены фундаментальные понятия математического анализа – понятие предела, понятия производной и дифференциала функций одной переменной, общие теоремы анализа, исследование функций и построение их графиков, неопределенный, определенный и несобственный интегралы.

Учебник предназначен для студентов физико-технологического института и соответствует федеральному государственному образовательному стандарту третьего поколения.

Библиогр.: 9 назв. Рис. 54.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161я73

ISBN

© Уральский федеральный университет, 2013

Оглавление

Глава 1. Предел и непрерывность функции одной переменной

1. Окрестности конечной точки и бесконечности……5
2. Определение предела ……6
   2.1. Предел функции ……6
   2.2. Предел последовательности……7
   2.3. Односторонние пределы функции……8
3. Теоремы о функциях, имеющих конечный предел……9
4. Бесконечно малые функции……12
   4.1. Определение и основные свойства……12
   4.2. Отношение бесконечно малых. Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$……13
   4.3. Первый замечательный предел……14
   4.4. Сравнение бесконечно малых……5
5. Бесконечно большие функции……16
   5.1. Определение и основные свойства……16
   5.2. Неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty \cdot 0]$, $[\infty - \infty]$……17
   5.3. Второй замечательный предел. Неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$……19
6. Непрерывные функции……20
   6.1. Функции, непрерывные в точке……20
   6.2. Точки разрыва функции и их классификация……21
   6.3. Функции, непрерывные на отрезке……23

Глава 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

7. Производная и дифференциал функции……24
   7.1. Определение производной……24
   7.2. Геометрический и физический смысл производной……25
   7.3. Дифференцируемые функции. Дифференциал……27
   7.4. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью……28
   7.5. Производная и дифференциал суммы, произведения, частного..28
   7.6. Производная сложной функции……29
   7.7. Логарифмическое дифференцирование……30
   7.8. Производная обратной функции……31
   7.9. Гиперболические функции и их производ.ные……31
   7.10. Таблица производных……32
   7.11. Производные высших порядков……33
   7.12. Функции, заданные параметрически, и их производные……33
   7.13. Дифференциалы высших порядков……34
8. Теоремы о среднем……35
   8.1. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши……35
   8.2. Правило Лопиталя……37
   8.3. Формула Тейлора……39
9. Исследование функций с помощью производной……43

9.1. Монотонность функции……...……....43
9.2. Экстремумы функции…..……....……..…..44
9.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке…....47
9.4. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба……...47
9.5. Асимптоты графика функции……..……..…...50
9.6. Схема исследования функции и построение ее графика…..…..51
10. Вектор – функция……53
10.1. Понятие вектор – функции……..……..53
10.2. Предел и непрерывность вектор – функции…..……..54
10.3. Производная вектор – функции……..……..54
10.4. Геометрические приложения вектор – функции….....……55
Глава 3. **Неопределенный интеграл**
11. Неопределенный интеграл и его свойства…….……56
11.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла…...…56
11.2. Свойства неопределенного интеграла……...…58
11.3. Таблица основных интегралов……59
12. Основные методы интегрирования…….....……...60
12.1. Метод подведения под знак дифференциала……...……60
12.2. Метод замены переменной……..…...……62
12.3. Метод интегрирования по частям……....……..64
13. Интегрирование некоторых классов функций……..……66
13.1. Интегрирование тригонометрических функций….....……..66
13.2. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен…68
13.3. Интегрирование дробно-рациональных функций….....……70
13.4. Интегрирование по справочникам……..….....72
13.5. Интегралы, невыражающиеся через элементарные .функции…72
Глава 3. **Определенный интеграл**
14. Понятие определенного интеграла и его свойства…….....72
14.1. Задача о массе стержня.....73
14.2. Понятие определенного интеграла……73
14.3. Свойства определенного интеграла.....74
14.4. Определенный интеграл с переменным верхним пределом…....77
15. Вычисление определенного интеграла……..……78
15.1. Формула Ньютона-Лейбница.....78
15.2. Интегрирование по частям.....79
15.3. Интегрирование заменой переменной.....80
16. Геометрические приложения определенного интеграла…..…….....82
16.1. Площадь плоской фигуры……....……..…82
16.2. Объем тела вращения…….……..…..…84
17. Несобственные интегралы……..86
17.1. Несобственные интегралы первого рода.……..86
17.2. Несобственные интегралы второго рода.……..89
17.3. Гамма-функция……90
Библиографический список……..92

Глава 1. Предел и непрерывность функции одной переменной

Понятие предела является одним из важнейших понятий математического анализа. Основные понятия математического анализа, такие как производная, интеграл, связаны с предельным переходом.

Для сокращения записи мы будем использовать символы $\forall$ - любой и $\exists$ - существует. Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает « из предложения α следует предложение β ». Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает, что α и β эквивалентны.

Для изучения пределов используется понятие окрестности конечной точки и бесконечности.

1. Окрестности конечной точки и бесконечности

1). δ *–окрестность конечной точки* x_0 обозначим $S_\delta(x_0)$ и определим как множество действительных чисел $x \in R$ таких, что $|x - x_0| < \delta$ (рис.1):

$$S_\delta(x_0) = \{x \in R : \ |x - x_0| < \delta\}.$$

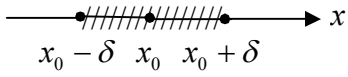


Рис.1

2). δ *–окрестность бесконечности* обозначим $S_\delta(\infty)$ и определим как множество действительных чисел $x \in R$ таких, что $|x| > \delta$ (рис.2). Итак,

$$S_\delta(\infty) = \{x \in R : \ |x| > \delta\} \ .$$

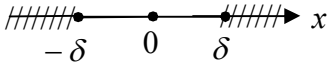


Рис.2

3). δ *–окрестность плюс бесконечности* определим (рис.3) как

$$S_\delta(+\infty) = \{x \in R : \ x > \delta\}.$$

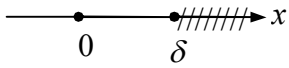


Рис.3

4). δ *–окрестность минус бесконечности* определим (рис 4) как

$$S_\delta(-\infty) = \{x \in R : \ x < -\delta\}.$$

Рис.4

5). Введём понятие *выколотой окрестности* $\overset{\circ}{S}_\delta(x_0)$ точки x_0, которая получается из окрестности $S_\delta(x_0)$ удалением точки x_0:

$$\overset{\circ}{S}_\delta(x_0) = S_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \{x \in R : \ 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

Дополнительно будем полагать, что

$$\overset{\circ}{S}_\delta(\infty) = S_\delta(\infty) \ , \quad \overset{\circ}{S}_\delta(+\infty) = S_\delta(+\infty) \ , \quad \overset{\circ}{S}_\delta(-\infty) = S_\delta(-\infty) \ .$$

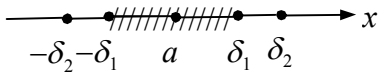


Рис.5

6). Рассмотрим *пересечение окрестностей.*

Для конечной точки a имеем:

$$S_{\delta_1}(a) \bigcap S_{\delta_2}(a) = S_\delta(a), \quad \text{где } \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \ \text{(рис. 5).}$$

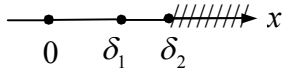


Рис.6

В случае, если $a = \infty$, или $a = +\infty$, или $a = -\infty$ имеем:

$$S_{\delta_1}(a) \bigcap S_{\delta_2}(a) = S_\delta(a), \ \text{где } \delta = \max\{\delta_1, \delta_2\} \ \text{(рис. 6 для } a = +\infty).$$

Аналогичным образом определяется и пересечение выколотых окрестностей.

2. Определение предела

2.1. Предел функции

Рассмотрим функцию $f(x)$ и предположим, что аргумент x стремится к числу a $(x \to a)$. Если для всех x, *достаточно близких к* a, соответствующие значения функции $f(x)$ *как угодно близки* к числу b, то число b называют пределом функции $f(x)$ при $x \to a$; записывают это следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{или} \quad f(x) \to b \quad \text{при} \quad x \to a.$$

Требуется сделать ряд уточнений.

1). Выражение «значения $f(x)$ *как угодно близки* к b» означает, что значения $f(x)$ попадают в *произвольную* ε*-окрестность* точки b, то есть $f(x) \in S_\varepsilon(b)$ для любого $\varepsilon > 0$.

2). Выражение «x *достаточно близких* к a» означает, что значения аргумента x взяты из *достаточно малой* δ*-окрестности* a, то есть *найдётся* $\delta > 0$ такое, что $x \in S_\delta(a)$, причём для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся своё $\delta > 0$, т.е. δ зависит от ε.

3). Функция $f(x)$ может быть не определена в точке a, поэтому рассматриваются значения x близкие к a, но не равные a, то есть рассматриваются x из *выколотой окрестности* точки a. Например, функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ не определена при $x = 3$, но в выколотой окрестности точки $x = 3$ (при $x \neq 3$) имеем

$$f(x) = \frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x-3} = x + 3 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x+3) = 6.$$

С учетом этих уточнений дадим точное определение предела функции.

Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого положительного числа ε найдётся положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что значения функции $f(x)$ принадлежат ε-окрестности точки b для всех x из выколотой δ-окрестности точки a.

Это определение распространяется и на случаи, когда a и (или) b – "несобственные числа" $+\infty, -\infty, \infty$. В дальнейшем это определение будем записывать кратко с помощью символов следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \text{ если для } \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ такое, что } f(x) \in S_\varepsilon(b) \text{ для } \forall x \in \overset{\circ}{S}_\delta(a).$$

Рассмотрим более подробно несколько случаев.

1). Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, a и b – конечные числа (рис.7). Тогда

$f(x) \in S_\varepsilon(b)$ означает, что $|f(x) - b| < \varepsilon$;

$x \in \overset{\circ}{S}_\delta(a)$ означает, что $0 < |x - a| < \delta$

и определение предела принимает вид:

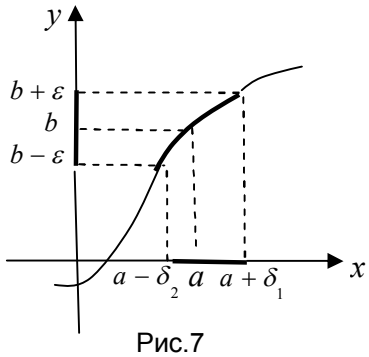


Рис.7

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, если для $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0$ такое, что $|f(x)-b|<\varepsilon$, как только $0<|x-a|<\delta$.

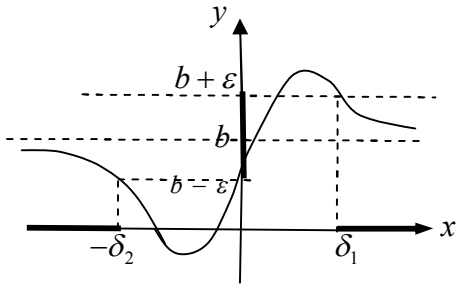


Рис.8

2). Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, b − конечное число (рис.8).

Тогда $f(x)\in S_\varepsilon(b)$ означает, что $|f(x)-b|<\varepsilon$;

$x\in S_\delta(\infty)$ означает, что $|x|>\delta$

и определение предела принимает вид:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, если для $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0$ такое, что $|f(x)-b|<\varepsilon$, как только $|x|>\delta$.

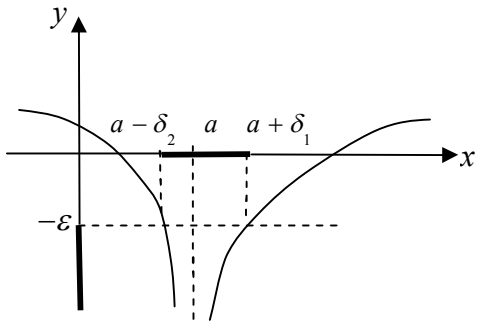


Рис.9

3). Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, a – конечное число (рис.9).

Тогда $f(x)\in S_\varepsilon(-\infty)$ означает, что $f(x)<-\varepsilon$;

$x\in \overset{\circ}{S}_\delta(a)$ означает, что $0<|x-a|<\delta$

и определение предела принимает вид:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, если для $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0$ такое, что $f(x)<-\varepsilon$, как только $0<|x-a|<\delta$.

Другие возможные случаи (например $a=-\infty$, b − конечное число; $a=b=+\infty$) рассматриваются аналогично.

2.2. Предел последовательности

Числовая последовательность – это значения u_n функции натурального аргумента $f(n)$, расположенные в порядке возрастания аргумента

$$u_1=f(1),\quad u_2=f(2),\ \ldots,\ u_n=f(n),\ \ldots$$

Другое обозначение последовательности: $\{u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots\}=\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Примеры последовательностей:

$$1)\ \left\{-1,\frac{1}{2},\frac{-1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty},\quad 2)\ \left\{\frac{3}{4},\frac{5}{9},\frac{7}{14},\ldots\right\}=\left\{\frac{2n+1}{5n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Предел последовательности можно рассматривать как частный случай предела функции, а именно функции натурального аргумента $f(n)=u_n$ при $n\to+\infty$ (обычно пишут $n\to\infty$), т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=b$, если для $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0$ такое, что $u_n\in S_\varepsilon(b)$ для $\forall n>N$.

Если предел последовательности существует и конечен, то последовательность называют сходящейся. Если предел последовательности не существует или бес-

конечен, то её называют расходящейся. Например, последовательность $u_n = (-1)^n$ является расходящейся, так как члены последовательности с чётными номерами $u_{2n} = 1$, а члены последовательности с нечётными номерами $u_{2n+1} = -1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, и, значит, не существует числа, к которому бы неограниченно приближались все члены последовательности по мере возрастания n.

Предел функции связан с пределом последовательности следующим образом.

Теорема 2.1. Предел функции $f(x)$ равен b при $x \to a$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности x_n, сходящейся к a и $x_n \neq a$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к b:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad f(x_n) \to b \text{ для } \forall x_n \to a, \quad x_n \neq a.$$

Доказательство этой теоремы опустим. Эта теорема даёт возможность установить, что некоторые функции не имеют предела в той или иной точке.

Пример 2.1. Имеет ли функция $\sin x$ предел при $x \to \infty$?

Решение. Рассмотрим две последовательности $x_n = 2\pi n$ и $x_n' = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Эти последовательности стремятся к ∞ при $n \to +\infty$, но соответствующие последовательности значений функции $f(x_n) = \sin 2\pi n = 0$, $f(x_n') = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ имеют различные пределы 0 и 1, следовательно, функция $\sin x$ не имеет предела при $n \to +\infty$.

2.3. Односторонние пределы функции

Пусть a – конечное число. В определении предела функции аргумент x стремится к a любым способом: колеблясь около a, оставаясь меньше a или больше a. Иногда важен способ приближения x к a: слева $(x < a)$ или справа $(x > a)$. Тогда вводят понятие левостороннего предела $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и правостороннего предела $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ следующим образом:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b, \text{ если для } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ такое, что } f(x) \in S_\varepsilon(b) \text{ для } \forall x \in \overset{\circ}{S}_\delta(a), \quad x < a;$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b, \text{ если для } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ такое, что } f(x) \in S_\varepsilon(b) \text{ для } \forall x \in \overset{\circ}{S}_\delta(a), \quad x > a.$$

Сформулируем очевидное утверждение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = b.$$

Пример 2.2. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \frac{|x|}{x}$ при $x \to 0$.

Решение. При $x > 0$ имеем: $f(x) = \frac{x}{x} = 1$ и, значит, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 1$.

При $x < 0$ имеем: $f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$ и, значит, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -1$.

Так как левосторонний и правосторонний пределы функции различны, то предел функции $f(x) = \frac{|x|}{x}$ при $x \to 0$ не существует.

3. Теоремы о функциях, имеющих конечный предел

Пусть a – число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Теорема 3.1 (о единственности предела).
Если существует конечный предел функции при $x \to a$, то он единственен.

Доказательство опустим.

Теорема 3.2 (об ограниченности функции, имеющей конечный предел).
Если функция имеет конечный предел при $x \to a$, то она ограничена в некоторой выколотой окрестности точки a.

Доказательство. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ Отсюда

$$|f(x)| = |(f(x) - b) + b| \le |f(x) - b| + |b| < \varepsilon + |b| \text{ для } \forall x \in \overset{\circ}{S}_\delta(a).$$

Неравенство $|f(x)| < \varepsilon + |b|$ означает, что функция $f(x)$ ограничена числом $\varepsilon + |b|$ в выколотой окрестности $\overset{\circ}{S}_\delta(a)$.

Замечания

1). Обратная теорема неверна, то есть из ограниченности функции в окрестности точки a не следует существование предела при $x \to a$. Например, функция $\sin x$ ограничена в окрестности ∞, но при $x \to \infty$ не имеет предела.

2). Если последовательность $\{u_n\}$ имеет конечный предел при $n \to \infty$, то она ограничена.

3). Из ограниченности последовательности $\{u_n\}$ не следует существование предела. Но при дополнительном требовании – монотонности, ограниченная последовательность будет иметь конечный предел, т.е. верна следующая теорема.

Теорема 3.3 (о пределе монотонной ограниченной последовательности).
Пусть последовательность $\{u_n\}$ *возрастает и ограничена сверху* (или убывает и ограничена снизу). Тогда она имеет конечный предел при $n \to \infty$.

Поясним понятие ограниченности, ограниченности сверху и снизу:

последовательность $\{u_n\}$ ограничена, если $|u_n| \le M$ или $m \le u_n \le M$ для $\forall n$

последовательность $\{u_n\}$ ограничена сверху, если $u_n \le M$ для $\forall n$

последовательность $\{u_n\}$ ограничена снизу, если $m \le u_n$ для $\forall n$

Доказательство теоремы опустим.

Теорема 3.4 (о сохранении неравенства).
Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) > c$, то $f(x) > c$ в некоторой выколотой окрестности точки a.
Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) < c$, то $f(x) < c$ в некоторой выколотой окрестности точки a.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $b > c$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0$ (в частности, для $\varepsilon = b - c > 0$) $\exists \delta > 0$: $|f(x) - b| < \varepsilon$ или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ для $\forall x \in \overset{\circ}{S}_\delta(a)$. Так как $b - \varepsilon = c$, то $f(x) > b - \varepsilon = c$ для $\forall x \in \overset{\circ}{S}_\delta(a)$, что и требовалось доказать.

Теорема 3.5 (о предельном переходе в неравенстве).
Пусть существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
Если $f(x) \ge c$ в некоторой выколотой окрестности точки a, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) \ge c$.
Если $f(x) \le c$ в некоторой выколотой окрестности точки a, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) \le c$.

Доказательство проведём от противного и для первого утверждения. Предположим, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) < c$. Тогда из теоремы 3.4 следует, что $f(x) < c$ в некоторой выколотой окрестности точки a, что противоречит условию теоремы.

Теорема 3.6 (о промежуточной функции).
Пусть $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = b$ и $f_1(x) \le g(x) \le f_2(x)$ в некоторой выколотой окрестности точки a. Тогда $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$.

Доказательство. Воспользуемся определением предела функции:

$\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = b \Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_1 > 0$: $|f_1(x) - b| < \varepsilon$ или $b - \varepsilon < f_1(x) < b + \varepsilon$ для $\forall x \in \overset{\circ}{S}_{\delta_1}(a)$,

$\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = b \Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_2 > 0$: $|f_2(x) - b| < \varepsilon$ или $b - \varepsilon < f_2(x) < b + \varepsilon$ для $\forall x \in \overset{\circ}{S}_{\delta_2}(a)$.

По условию $f_1(x) \le g(x) \le f_2(x)$ в некоторой окрестности $\overset{\circ}{S}_{\delta_3}(a)$. Пересечение трёх окрестностей $\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(a) \bigcap \overset{\circ}{S}_{\delta_2}(a) \bigcap \overset{\circ}{S}_{\delta_3}(a)$ будет также окрестностью точки a, обо-

значим её $\overset{\circ}{S}_\delta(a)$. Для $\forall\, x \in \overset{\circ}{S}_\delta(a)$ выполняются все записанные выше неравенства. Поэтому справедлива следующая цепочка неравенств

$$b-\varepsilon < f_1(x) \le g(x) \le f_2(x) < b+\varepsilon \ .$$

Тогда $b-\varepsilon < g(x) < b+\varepsilon$ или $|\,g(x)-b\,| < \varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$ и для $\forall\, x \in \overset{\circ}{S}_\delta(a)$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Теорема 3.7 (о пределе суммы, произведения, частного).

Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Тогда

1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

3) $\lim\limits_{x\to a}[k\cdot g(x)] = k\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$,

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} g(x) \ne 0$.

Доказательство проведем для одного из утверждений, например для первого. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, причем эти пределы конечны.

Требуется доказать, что $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = b+c$.

Воспользуемся определением предела функции:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow$ для $\forall\varepsilon > 0$, а значит, и для $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists\delta_1 > 0$: $|f(x)-b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для $\forall x \in \overset{\circ}{S}_{\delta_1}(a)$;

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = c \Rightarrow$ для $\forall\varepsilon > 0$, а значит, и для $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists\delta_2 > 0$: $|g(x)-c| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$ для $\forall x \in \overset{\circ}{S}_{\delta_2}(a)\cdot$

Два неравенства $|f(x)-b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $|g(x)-c| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполняются одновременно в общей части двух окрестностей $\overset{\circ}{S}_\delta(a) = \overset{\circ}{S}_{\delta_1}(a) \bigcap \overset{\circ}{S}_{\delta_2}(a)$. Поэтому для $\forall x \in \overset{\circ}{S}_\delta(a)$ следует:

$$|\,(f(x)+g(x)) - (b+c)\,| \le |f(x)-b| + |\,g(x)-c\,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Это и означает, что $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = b+c$.

Замечание. Утверждения 1 и 2 теоремы 3.7 верны также для любого *конечного* числа функций.

Для формулировки теоремы о пределе элементарной функции отметим, что элементарная функция получается из основных элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической, тригонометрической, обратных тригонометрических) с помощью арифметических операций и суперпозиции.

Теорема 3.9 (о пределе элементарной функции).

Пусть элементарная функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Доказательство этой теоремы не приводим.

Пример 3.2. Вычислить предел функции $g(x)=\dfrac{x^4-x^3\lg x+\sin\pi x+5}{x^2-2^x+2}$ при $x\to 1$.

Решение: Функция $g(x)$ является элементарной и определена при $x=1$. Поэтому

$$\lim_{x\to 1} g(x)=g(1) \quad \text{или} \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3\lg x+\sin\pi x+5}{x^2-2^x+2}=\frac{1-\lg 1+\sin\pi+5}{1-2+2}=6.$$

4. Бесконечно малые функции

4.1. Определение и основные свойства

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0.$

Рассмотрим ряд свойств бесконечно малых функций.

Теорема 4.1 (о связи функции с ее конечным пределом).
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ ($b-$ конечное) тогда и только тогда, когда $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)-$бесконечно малая функция при $x\to a$.

Доказательство. 1). Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b.$ Рассмотрим функцию $\alpha(x)=f(x)-b.$ Тогда

$$f(x)=b+\alpha(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a}\alpha(x)=\lim_{x\to a}[f(x)-b]=\lim_{x\to a} f(x)-b=b-b=0,$$

то есть $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x\to a$.

2). Пусть $f(x)=b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)-$бесконечно малая при $x\to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0.$ Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}[b+\alpha(x)]=b+\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=b+0=b.$

Теорема 4.2 (о произведении бесконечно малой функции на ограниченную).
Пусть функция $\alpha(x)$ − бесконечно малая при $x\to a$, а функция $f(x)$ − ограничена в некоторой выколотой окрестности точки a. Тогда произведение этих функций $\alpha(x)\cdot f(x)$ является бесконечно малой функцией при $x\to a.$

Доказательство. Функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(a)$, т.е. $|f(x)|\le M$ для $\forall x\in\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(a)$. Кроме того, функция $\alpha(x)-$бесконечно малая при $x\to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0.$ Поэтому для $\forall\varepsilon>0$, а значит, и для $\frac{\varepsilon}{M}>0$ найдется $\delta_2>0$ такое, что $|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$ для $\forall x\in\overset{\circ}{S}_{\delta_2}(a)$. Оба неравенства $|f(x)|\le M$ и $|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$ выполняются в окрестности $\overset{\circ}{S}\delta(a)=\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(a)\bigcap\overset{\circ}{S}_{\delta_2}(a)$. Поэтому

$$\left|\alpha(x)\cdot f(x)\right| = \left|\alpha(x)\right|\cdot\left|f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon \quad \text{для } \forall x \in \overset{\circ}{S}_{\delta}(a),$$

т.е. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot\alpha(x)] = 0$ и функция $\alpha(x)\cdot f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Пример 4.1. Будет ли бесконечно малой при $x \to 0$ функция $f(x) = x\cdot\sin\frac{1}{x}$?

Решение. Функция x является бесконечно малой при $x \to 0$, а функция $\sin\frac{1}{x}$ – ограниченной в выколотой окрестности точки $x = 0$. Поэтому по теореме 4.2 функция $f(x) = x\cdot\sin\frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to 0$.

Теорема 4.3 (о сумме, разности, произведении бесконечно малых). Сумма, разность, произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть функция бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство. Ограничимся случаем двух бесконечно малых функций. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a}\beta(x) = 0$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a}[\alpha(x)+\beta(x)] = \lim\limits_{x\to a}\alpha(x) + \lim\limits_{x\to a}\beta(x) = 0+0 = 0$,

$\lim\limits_{x\to a}[\alpha(x)\cdot\beta(x)] = \lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\beta(x) = 0\cdot 0 = 0$.

Это и означает, что функции $\alpha(x)+\beta(x)$ и $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ являются бесконечно малыми функциями при $x \to a$.

4.2. Отношение бесконечно малых. Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$

В отличие от суммы и произведения, отношение бесконечно малых функций может иметь любой предел или даже его не иметь. Например, для функций $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = x^2$, $\gamma = 3x$, являющихся бесконечно малыми при $x \to 0$, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0} x = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 3.$$

Поэтому отношение бесконечно малых функций называют неопределенностью вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Отыскание предела в случае неопределенности называют раскрытием неопределенности.

Пример 4.2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-4x+3}{x^2-6x+5}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби при $x = 1$ обращаются в ноль, поэтому имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия числитель и знаменатель разложим на множители, причем один из множителей уже известен – это $(x-1)$. Поделив на него многочлен, стоящий в числителе, получим и другой множитель.

Итак, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-4x+3}{x^2-6x+5} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-3)}{(x-1)(x-5)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-3}{x-5} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$.

Пример 4.3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель на $(\sqrt{1+x}+1)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.$$

4.3. Первый замечательный предел

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используется $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$. Он является неопределенностью $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Покажем, что
$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}. \qquad (4.1)$$

Это равенство называют ***первым замечательным пределом***.

Докажем равенство (4.1). Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. Так как $f(-x)=f(x)$, то функция $f(x)$ является четной, поэтому достаточно рассмотреть ее при $x>0$. Так как $x\to 0$, то достаточно взять $x<\pi/2$.

Построим круг радиусом R с центром в точке O (рис.10), угол BOA, равный x радиан, треугольники OAB, OAC и сектор OAB. Очевидно, что

$$S_{\Delta OAB}<S_{\text{сект.}OAB}<S_{\Delta OCA},\ \text{или}\ \ \frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R\cdot R\ \mathrm{tg}\,x,\ \text{или}\ \ \sin x<x<\mathrm{tg}\,x.$$

Поделив на $\sin x$ ($\sin x>0$, так как $x>0$), получим:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\quad\text{или}\quad\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, $\lim\limits_{x\to 0}1=1$, то по теореме 3.6 о пределе промежуточной функции имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

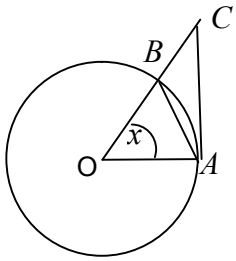


Рис.10

Следствие: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{x}=1.}$

Доказательство.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1\cdot$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left|\begin{matrix}\arcsin x=y\\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x}=\left|\begin{matrix}\mathrm{arctg}\,x=y\\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\mathrm{tg}\,y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\mathrm{tg}\,y}{y}}=1$$

4.4. Сравнение бесконечно малых

Бесконечно малые функции часто сравнивают между собой по «быстроте» стремления к нулю. Так, например, из двух функций $\alpha(x)=x$ и $\beta(x)=x^{10}$ – бесконечно малых при $x\to 0$, функция x^{10} стремится к нулю «быстрее», чем x. Уточним, какой смысл вкладывается в слово «быстрее».

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to a$.

1). Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ конечен и отличен от нуля, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми ***одного порядка*** и обозначают так: $\alpha(x)=O(\beta(x))$ при $x\to a$.

В частности, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют ***эквивалентными*** бесконечно малыми и обозначают так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$.

2). Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой ***более высокого порядка***, чем $\beta(x)$ и обозначают так: $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to a$.

3). Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$ и $\beta(x)$ будет бесконечно малой более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ при $x\to a$.

4). Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют ***несравнимыми*** бесконечно малыми при $x\to a$.

Пример 4.4. Функции x, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ являются эквивалентными бесконечно малыми при $x\to 0$, т.е.

$$\sin x\sim x,\quad \operatorname{tg} x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \operatorname{arctg} x\sim x\quad \text{при } x\to 0.$$

Это вытекает из первого замечательного предела и его следствия.

Пример 4.5. Сравнить при $x\to 0$ бесконечно малые $\alpha(x)=1-\cos 6x$ и $\beta(x)=x^2$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 3x}{(3x)^2/9}=18\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)^2=18.$

Следовательно, функции $1-\cos 6x$ и x^2 являются бесконечно малыми одного порядка при $x\to 0$.

Для нахождения пределов важна следующая теорема.

Теорема 4.4 (об эквивалентных бесконечно малых).

Пусть $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to a$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=1$.

Запишем равенство $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\dfrac{\beta_1(x)}{\beta(x)}$ и перейдем в нем к пределу:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Пример 4.6. Найти а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{\sin 3x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(5x-x^3)\cdot(1-\cos 2x)}{\arcsin^3(2x)}$.

Решение. Имеем неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для их раскрытия заменим бесконечно малые функции на эквивалентные:

а). Так как $\operatorname{arctg}5x\sim 5x$, $\sin 3x\sim 3x$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{\sin 3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x}=\dfrac{5}{3}$.

б) Так как $\operatorname{tg}(5x-x^3)\sim 5x-x^3$, $1-\cos 2x=2\sin^2 x\sim 2\cdot x^2$, $\arcsin^3 2x\sim(2x)^3$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\left(5x-x^3\right)\cdot\left(1-\cos 2x\right)}{\arcsin^3 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(5-x^2\right)\cdot 2x^2}{8x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{5-x^2}{4}=\frac{5}{4}.$$

5. Бесконечно большие функции

5.1. Определение и основные свойства

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

Различают случаи бесконечно больших функций, когда

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty \text{ или } \lim_{x\to a}f(x)=-\infty.$$

Рассмотрим некоторые свойства бесконечно больших функций.

Теорема 5.1 (о связи с бесконечно малой).

Если функция $f(x)$ – бесконечно большая при $x\to a$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая при $x\to a$.

Если функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$ и $\alpha(x)\neq 0$ в выколотой окрестности точки a, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая при $x\to a$.

Доказательство. Функция $f(x)$ бесконечно большая при $x\to a$, то есть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$. Тогда из определения предела следует, что для $\forall\varepsilon>0$, в частности, для $\varepsilon_1=\dfrac{1}{\varepsilon}$ $\exists\delta>0:$ $|f(x)|>\varepsilon_1=\dfrac{1}{\varepsilon}$ для $\forall x\in\overset{\circ}{S}_\delta(a)$. Поэтому $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|=\dfrac{1}{|f(x)|}<\varepsilon$ для $\forall x\in\overset{\circ}{S}_\delta(a)$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$, то есть функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x\to a$. Аналогично доказывается второе утверждение.

Теорема 5.2 (об арифметических операциях).

1) . Произведение двух бесконечно больших при $x \to a$ есть бесконечно большая при $x \to a$.
2) . Произведение бесконечно большой при $x \to a$ на функцию, имеющую ненулевой предел при $x \to a$, есть бесконечно большая при $x \to a$.
3) . Отношение бесконечно большой при $x \to a$ к бесконечно малой (отличной от нуля) при $x \to a$ есть бесконечно большая при $x \to a$.
4) . Сумма двух бесконечно больших одного знака при $x \to a$ есть бесконечно большая того же знака при $x \to a$.

Доказательство проведем для утверждений 1) и 3).

1). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие при $x \to a$. Тогда $\frac{1}{f(x)}$, $\frac{1}{g(x)}$ есть бесконечно малые при $x \to a$. Поэтому и их произведение $\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}$ является бесконечно малой при $x \to a$. Тогда из теоремы 5.1 следует, что функция $f(x) \cdot g(x)$ является бесконечно большой при $x \to a$.

3). Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая при $x \to a$, $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$. Тогда $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая и произведение двух бесконечно больших функций $f(x)$ и $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая при $x \to a$.

Пример 5.1. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x-1}$, б) $\lim\limits_{x \to \infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)$, $(a_0 \neq 0)$.

Решение. а). При $x \to 1$ функция $x-1$ является бесконечно малой, а функция $\frac{1}{x-1}$ – бесконечно большой. Произведение бесконечно большой функции $\frac{1}{x-1}$ на функцию x, имеющую ненулевой предел при $x \to 1$, есть бесконечно большая функция. Значит, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x-1} = \infty$.

б). Функция $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} \right)$ при $x \to \infty$ есть произведение бесконечно большой x^n и функции $a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$, имеющей при $x \to \infty$ ненулевой предел a_0. Поэтому функция $P_n(x)$ есть бесконечно большая при $x \to \infty$.

5.2. Неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty \cdot 0]$, $[\infty - \infty]$

Рассмотрим функции $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = kx$, $f_4(x) = x + k$. Эти функции являются бесконечно большими при $x \to \infty$, а функция $\alpha(x) = \frac{1}{f_1(x)}$ являются бесконечно малой при $x \to \infty$.

1). Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_3(x)}{f_1(x)}=k$, то предел отношения двух бесконечно больших функций может быть любым; его называют неопределенностью вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

2). Так как $\lim\limits_{x\to\infty}f_2(x)\cdot\alpha(x)=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty,\quad \lim\limits_{x\to\infty}f_3(x)\cdot\alpha(x)=k,$ то предел произведения бесконечно большой функции на бесконечно малую может быть любым; его называют неопределенностью вида $[\infty\cdot 0]$.

3). Так как $\lim\limits_{x\to\infty}[f_3(x)-f_1(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}(k-1)x=\infty\ (k\neq 1),\quad \lim\limits_{x\to\infty}[f_4(x)-f_1(x)]=k$, то предел разности двух бесконечно больших функций может быть любым; его называют неопределенностью вида $[\infty-\infty]$.

Рассмотрим примеры на раскрытие таких неопределенностей.

Пример 5.2. Найти предел отношения двух многочленов при $x\to\infty$.

Решение. В примере 5.1 было установлено, что многочлены являются бесконечно большими функциями при $x\to\infty$, значит, предел их отношения есть неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для раскрытия неопределенности сделаем преобразования:

$$\frac{P_n(x)}{Q_k(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\ldots+b_k}=\frac{x^n\cdot(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n})}{x^k\cdot(b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_k}{x^k})}\qquad\begin{pmatrix}a_0\neq 0\\ b_0\neq 0\end{pmatrix}.$$

Функция $\dfrac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_k}{x^k}}$ имеет ненулевой предел $\frac{a_0}{b_0}$. Функция $\frac{x^n}{x^k}$ есть бесконечно большая при $n>k$, бесконечно малая при $n<k$ и равна единице при $n=k$.

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\ldots+b_k}=\begin{cases}\infty, & n>k,\\ 0, & n<k,\\ a_0/b_0, & n=k,\end{cases}\qquad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^k}=\begin{cases}\infty, & n>k,\\ 0, & n<k,\\ a_0/b_0, & n=k.\end{cases}$

Следовательно,
$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^k+b_1x^{k-1}+\ldots+b_k}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^k}.}\qquad(5.1)$$

Аналогично, при отыскании предела отношения иррациональных функций младшие степени можно отбросить (пример 5.5).

Пример 5.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^{100}-x^{63}+75}{7x^{120}+5x^{70}-100}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^{100}}{7x^{120}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{7x^{20}}=0.$

Пример 5.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4-(n+3)^4}{(2n-1)^4+(n-5)^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)^4-n^4}{(2n)^4+n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15n^4}{17n^4}=\frac{15}{17}.$

Пример 5.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x-1}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x-1}+x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+2x-1)-x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2}+x}=1.$$

Пример 5.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)=[\infty+\infty]=\infty$.

Здесь функции $\sqrt{x^2+2x-1}$ и $(-x)$ есть бесконечно большие одного знака и их сумма является бесконечно большой.

5.3. Второй замечательный предел. Неопределенность $\left[1^\infty\right]$

В математике большую роль играют следующие пределы:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\qquad \lim_{y\to0}(1+y)^{1/y}=e.}\tag{5.2}$$

Здесь e – иррациональное число, $e\approx2,7182$. Более точное вычисление числа e будет приведено далее, при рассмотрении формулы Тейлора. Число e известно как основание натурального логарифма $\ln x=\log_e x$ и основание функции e^x.

Равенства (5.2) называют ***вторым замечательным пределом***. Второе из этих равенств получается из первого при замене $\dfrac{1}{x}$ на y. Вывод равенств (5.2) опустим.

Пример 5.7. Найти: а) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{1/x}$, б) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{1/x}$.

Решение. а) Обозначим $y=-x$. Тогда

$$\lim_{x\to0}(1-x)^{1/x}=\lim_{y\to0}(1+y)^{-1/y}=\lim_{y\to0}\left[(1+y)^{1/y}\right]^{-1}=e^{-1},$$

б) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+2x)^{1/2x}\right]^2=e^2$.

Замечания. 1). У функций $f(x)=(1-x)^{1/x}$, $g(x)=(1+2x)^{1/x}$ основания стремятся к единице при $x\to0$, а показатели степени – к бесконечности. Но пределы этих функций различны, поэтому их называют ***неопределенностью*** *вида* $\left[1^\infty\right]$.

2). Для раскрытия неопределенности вида $\left[1^\infty\right]$ удобно применять второй замечательный предел.

Пример 5.8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2+5}\right)^{x^2}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{2x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{2x^2}=1$, то имеем неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$.

Преобразуем дробь, выделив единицу: $\dfrac{2x^2+1}{2x^2+5}=\dfrac{\left(2x^2+5\right)-4}{2x^2+5}=1+\dfrac{-4}{2x^2+5}$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{2x^2+5}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-4}{2x^2+5}\right)^{\frac{2x^2+5}{-4}}\right]^{\frac{-4x^2}{2x^2+5}}=e^{-2}$.

Здесь мы воспользовались вторым замечательным пределом $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e$, где $y=\dfrac{-4}{2x^2+5}$, и тем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2}{2x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2}{2x^2}=-2$.

Пример 5.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\log_a(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}=\log_a e$.

В частности, при $a=e$ имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$. Поэтому $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$.

6. Непрерывные функции

6.1. Функции, непрерывные в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в конечной точке x_0 и её окрестности.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Рассмотрим свойства функций, непрерывных в точке.

Теорема 6.1 (о приращении непрерывной функции).
Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции в точке x_0.

Доказательство. Равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, определяющее непрерывную в точке x_0 функцию, эквивалентно равенству $\lim\limits_{x-x_0\to 0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$. Разность $x-x_0$ есть приращение аргумента Δx, а разность $f(x)-f(x_0)$ есть приращение функции $\Delta f(x_0)$. Следовательно, равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ эквивалентно равенству $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$, которое означает, что бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x_0)$.

Теорема 6.2 (о непрерывности суммы, произведения, частного).
Сумма, разность, произведение, суперпозиция конечного числа непрерывных в точке функций есть функция непрерывная в этой точке.

Частное непрерывных в точке функций есть функция, непрерывная в этой точке, если знаменатель в этой точке отличен от нуля.

Доказательство проведем, например, для частного двух функций $f(x)$ и $g(x)$, непрерывных в точке x_0. Воспользуемся теоремой о пределе частного, учитывая, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$. Получим:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)},\quad \text{если } g(x_0)\neq 0.$$

Это равенство означает, что функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0.

Для формулировки следующей теоремы напомним сведения об обратной функции:
а) для отыскания функции $x=f^{-1}(y)$, обратной к функции $y=f(x)$, нужно выразить x из уравнения $y=f(x)$,
б) если в обратной функции $x=f^{-1}(y)$ поменять x и y ролями, то графики функций $y=f^{-1}(x)$ и $y=f(x)$ будут симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

***Теорема 6.3* (*о непрерывности обратной функции*).**
Пусть функция $y=f(x)$ монотонна и непрерывна на интервале (a,b). Тогда существует обратная функция $x=f^{-1}(y)$, которая будет монотонной и непрерывной на интервале с концами $f(a)$, $f(b)$.

Доказательство этой теоремы не приводим.

Теорема 6.5 (о непрерывности элементарной функции).
Если элементарная функция определена в точке x_0 и её окрестности, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Из теоремы о пределе элементарной функции $f(x)$ следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, что и означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0.

6.2. Точки разрыва функции и их классификация

Из определения функции $f(x)$, непрерывной в точке x_0, следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Это равенство означает выполнение трех условий:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности,
2) функция $f(x)$ имеет предел при $x\to x_0$ или, что равносильно, существуют и равны односторонние пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$,
3) предел функции $f(x)$ при $x\to x_0$ равен значению функции в точке x_0.

Если нарушается хотя бы одно из этих условий, то точку x_0 называют ***точкой разрыва*** функции. Выделяют следующие типы точек разрыва.

1. Если в точке разрыва x_0 существуют *односторонние конечные пределы* функции, то x_0 называют точкой ***разрыва первого рода***. При этом,
   а) если односторонние пределы *совпадают,* то x_0 называют точкой ***устранимого разрыва*** первого рода,
   б) если односторонние пределы *не совпадают,* то x_0 называют точкой ***конечного разрыва*** первого рода (или точкой скачка).
2. Если в точке x_0 хотя бы один из односторонних пределов функции *не существует или бесконечен,* то x_0 называют точкой ***разрыва второго рода***.

На рис.11 изображены различные типы точек разрыва.

Точка x_1 – точка разрыва, так как $f(x)$ не определена в точке x_1; разрыв – устранимый, так как односторонние пределы совпадают. Для «устранения» разрыва в точке x_1 нужно доопределить функцию, положив $f(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} f(x)$.

В точке x_2 – устранимый разрыв первого рода, так как односторонние пределы совпадают, но $f(x_2) \neq \lim\limits_{x \to x_2} f(x)$. Для «устранения» разрыва нужно положить $f(x_2) = \lim\limits_{x \to x_2} f(x)$.

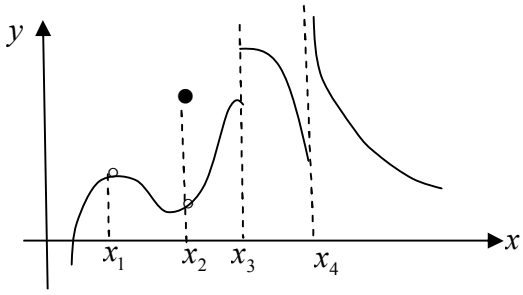


Рис.11

В точке x_3 – конечный разрыв первого рода (скачок), так как односторонние пределы $f(x_3 - 0)$, $f(x_3 + 0)$ конечны, но различны.

В точке x_4 – разрыв второго рода, так как правосторонний предел $f(x_4 + 0) = \infty$.

Пример 6.1. Установить тип точки разрыва функции $f(x) = 2^{1/x}$. Построить примерный график функции.

Решение. Функция $f(x) = 2^{1/x}$ не определена при $x = 0$, значит $x = 0$ является точкой разрыва функции. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$f(-0) = \lim_{x \to -0} 2^{1/x} = 0, \quad \text{так как } 1/x \to -\infty \text{ при } x \to -0,$$

$$f(+0) = \lim_{x \to +0} 2^{1/x} = \infty, \quad \text{так как } 1/x \to +\infty \text{ при } x \to +0.$$

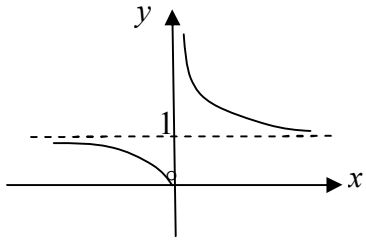


Рис.12

Так как правосторонний предел $f(+0)$ бесконечен, то $x = 0$ является точкой разрыва второго рода. Для построения графика функции (рис.12) воспользуемся тем, что $\lim\limits_{x \to \infty} 2^{1/x} = 2^0 = 1$.

Пример 6.2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \begin{cases} \ln\left(5 + x^2\right), & x \le 0, \\ \sin(7x^3 + \pi), & x > 0. \end{cases}$

Решение. Функции $\ln\left(5 + x^2\right)$ и $\sin(7x^3 + \pi)$ определены для любых x, являются элементарными, а значит, и непрерывными. Разрыв функции может быть только в точке «стыка» $x = 0$. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0}\left[\ln(5+x^2)\right] = \ln 5, \quad \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0}\sin\left(7x^3+\pi\right) = \sin\pi = 0.$$

Так как односторонние пределы конечны, но различны, то $x=0$ есть точка конечного разрыва первого рода. Скачок функции в этой точке равен $\ln 5$.

6.3. Функции, непрерывные на отрезке

Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если

$f(x)$ непрерывна в любой точке $x_0 \in (a,b)$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,

$f(x)$ непрерывна в точке a справа, т.е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$,

$f(x)$ непрерывна в точке b слева, т.е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)$.

Непрерывные на отрезке функции имеют ряд важных свойств. Сформулируем их в виде теоремы, не приводя доказательство.

Теорема 6.6. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда:

1) функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$,
2) функция $f(x)$ достигает на отрезке $[a,b]$ своего наибольшего и наименьшего значения,
3) функция $f(x)$ принимает на отрезке $[a,b]$ все промежуточные значения между наибольшим и наименьшим,
4) если на концах отрезка функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, то на интервале (a,b) найдется хотя бы одна точка c, в которой $f(x)=0$.

Эта теорема имеет наглядную иллюстрацию. На рис.13 приведен график непрерывной функции $f(x)$. Очевидно, что функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$; достигает наибольшего значения M в точке x_1, наименьшего значения m в точке x_2; для любого числа $K \in [m,M]$ найдется точка c такая, что $f(c)=K$. Так как значения $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то существует на интервале (a,b) точка x_3 такая, что $f(x_3)=0$.

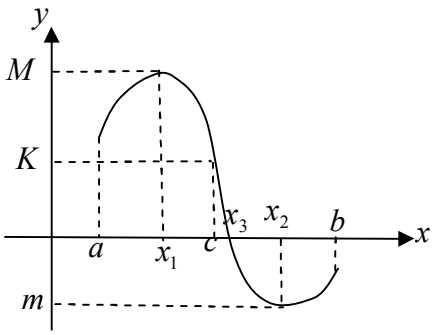


Рис.13

Замечание. Теорема перестает быть верной для функции, непрерывной на интервале, или функции, имеющей разрыв. Например, функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ непрерывна на интервале (0,1), но является на нем неограниченной, так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = \infty$. Кроме того, эта функция не достигает на интервале (0,1) наибольшего значения.

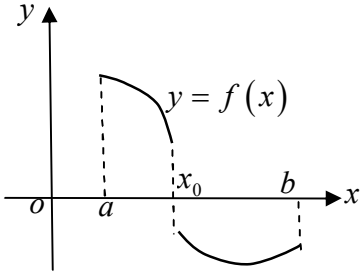


Рис.14

Другой пример: функция $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0 (ее график изображен на рис. 14) и, хотя значения $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, но ни в какой точке функция $f(x)$ не принимает нулевое значение.

Глава 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Дифференциальное исчисление функции одной переменной изучает одно из основных математических понятий – понятие производной и его применение, в частности, для исследования функций.

7. Производная и дифференциал функции

Понятие производной широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, других наук, в особенности при изучении скорости протекания различных процессов.

7.1. Определение производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, которое характеризует изменение функции $f(x)$ на отрезке $[x, x + \Delta x]$. Средняя скорость изменения функции на этом отрезке равна $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, а скорость изменения функции $f(x)$ в точке x есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Этот предел, если он существует, называется производной $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x. Итак, по определению

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Для функции $y = f(x)$ приняты и другие обозначения производной: $y'(x)$, y'_x.

Пример 7.1. Найти $f'(0)$, если $f(x) = \begin{cases} x + \arcsin\left(x^2 \sin\dfrac{\pi}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$.

Решение. Воспользуемся определением производной:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x + \arcsin\left((\Delta x)^2 \sin\dfrac{\pi}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\arcsin\left((\Delta x)^2 \sin\dfrac{\pi}{\Delta x}\right)}{\Delta x}.$$

Функция $(\Delta x)^2$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, функция $\sin\left(\dfrac{\pi}{\Delta x}\right)$ является ограниченной. Поэтому их произведение, обозначим его $\gamma(x)$, является бесконечно малым при $\Delta x \to 0$. В силу теоремы 4.4 функцию $\arcsin\gamma(x)$ под знаком

предела можно заменить на эквивалентную функцию $\gamma(x)$. Поэтому

$$f'(0)=1+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{\pi}{\Delta x}}{\Delta x}=1+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\cdot\sin\frac{\pi}{\Delta x}\right)=1+0=1.$$

Пример 7.2. Доказать, что $\boxed{(\sin x)'=\cos x}$, $\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$.

Решение. Воспользуемся определением производной и первым замечательным пределом:

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\cdot\frac{\Delta x}{2}}=1\cdot\cos x.$$

Итак, $(\sin x)'=\cos x$. Аналогично доказывается, что $(\cos x)'=-\sin x$.

Пример 7.3. Доказать, что $\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x},\quad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}}$.

Решение. Воспользуемся определением производной и тем, что $\ln(1+\gamma)\sim\gamma$ при $\gamma\to 0$ (см. пример 5.9):

$$(\ln x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\frac{1}{x}.$$

Так как $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$, то $(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$.

7.2.Геометрический и физический смысл производной

Рассмотрим на кривой $y=f(x)$ точки M_0, M и секущую M_0M (рис.15). При движении точки M по этой кривой к точке M_0 секущая M_0M займет свое предельное положение M_0T.

Касательной к кривой в точке M_0 называется прямая M_0T, являющаяся предельным положением секущей M_0M при стремлении точки M по кривой к точке M_0.

Возможны 3 случая.

1). Кривая имеет невертикальную касательную. Тогда

$$k_{сек}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

$$k_{кас}=\lim_{M\to M_0}k_{сек}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

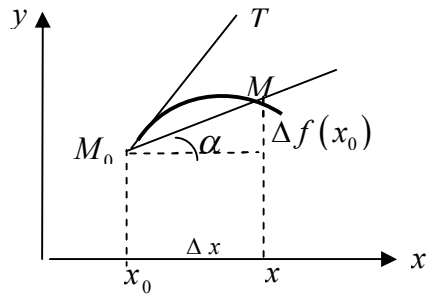


Рис. 15

Отсюда следует ***геометрический смысл*** производной.

Значение производной $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 с абсциссой x_0: $f'(x_0) = k_{кас.}$

2). Кривая имеет вертикальную касательную (рис. 16). Тогда угол наклона секущей стремится к $\frac{\pi}{2}$, $k_{сек} = \operatorname{tg}\alpha \to \infty$ при $M \to M_0$, $k_{кас} = \lim\limits_{M \to M_0} k_{сек} = \infty$ и $f'(x_0) = \infty$.

3). Кривая $y = f(x)$ не имеет касательную (рис.17), но имеет правостороннюю касательную l_1 с угловым коэффициентом $k_1 = f'(x_0 + 0)$ и левостороннюю касательную l_2 с угловым коэффициентом $k_2 = f'(x_0 - 0)$, при этом $k_1 \neq k_2$. Тогда $f'(x_0)$ не существует.

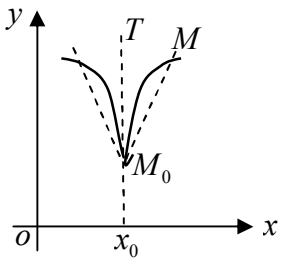


Рис.16

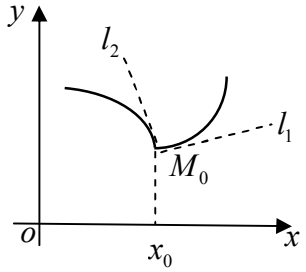


Рис.17

Введем понятие нормали к кривой.

Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной к кривой, называется ***нормалью*** к этой кривой.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$\boxed{y - y_0 = k_{кас.}(x - x_0), \quad k_{кас.} = f'(x_0)}.$$

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$\boxed{y - y_0 = k_{норм}(x - x_0), \quad k_{норм} = \frac{-1}{k_{кас}} = \frac{-1}{f'(x_0)}}.$$

Физический смысл производной заключается в том, что значение производной $f'(x)$ есть скорость изменения функции $f(x)$ в точке x. Поэтому

1) если задан закон движения материальной точки по прямой $S = S(t)$, то скорость движения $v = S'(t)$, а ускорение a есть «скорость изменения скорости», то есть $a = v'(t)$;

2) если $Q = Q(t)$ есть количество электричества, проходящего через поперечное сечение проводника за время t, то $Q'(t) = I$ есть сила тока;

3) если $N = N(t)$ есть количество вещества, вступающего в химическую реакцию за время t, то $N'(t)$ есть скорость химической реакции.

7.3. Дифференцируемые функции. Дифференциал

Функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке, если она имеет производную в этой точке.

Операция отыскания производной называется дифференцированием функции. Пусть функция дифференцируема, то есть имеет производную $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Тогда согласно теореме 4.1 о связи функции с ее пределом

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ есть функция бесконечно малая при $\Delta x\to 0$. Поэтому приращение дифференцируемой функции представимо в виде

$$\Delta f(x)=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Выражение $f'(x)\cdot\Delta x$ называют ***дифференциалом*** функции и обозначают $df(x)$:

$$df(x)=f'(x)\cdot\Delta x.$$

Отметим следующие моменты.

1). Дифференциал функции $df(x)=f'(x)\cdot\Delta x$ линеен относительно Δx и имеет при $\Delta x\to 0$ тот же порядок малости, что и Δx.

2). Слагаемое $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ в приращении $\Delta f(x)$ при $\Delta x\to 0$ является бесконечно малой $o(\Delta x)$ более высокого порядка, чем Δx.

3). Поэтому приращение дифференцируемой функции $f(x)$ представимо в виде

$$\boxed{\Delta f(x)=f'(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)=df(x)+o(\Delta x)}. \qquad (7.1)$$

4). Так как $df(x)=f'(x)\cdot\Delta x$, то для функции, равной x, имеем $d(x)=(x)'\cdot\Delta x=\Delta x$, то есть $\Delta x=dx$. Поэтому

$$\boxed{df(x)=f'(x)\,dx}, \qquad \boxed{f'(x)=\frac{df(x)}{dx}}. \qquad (7.2)$$

7.4. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью

Если функция дифференцируема, то она непрерывна.

Действительно, для дифференцируемой функции $\Delta f(x)=f'(x)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$. Отсюда следует, что бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x)$; значит, функция $f(x)$ непрерывна в точке x.

Непрерывная функция может не быть дифференцируемой.

Примером такой функции является функция $f(x)=|x|$. Эта функция непрерывна при $x=0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0=f(0)$. Но функция недифференцируема при $x=0$, так как

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}+1, & \Delta x>0,\\ -1, & \Delta x<0,\end{cases}$$

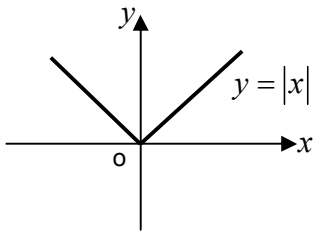


Рис.18

и, значит, $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$ не существует, т.е. функция $f(x)$ недифференцируема при $x=0$. Отметим, что существуют односторонние пределы $f'(+0)=1$, $f'(-0)=-1$.

С геометрической точки зрения это означает, что в точке $(0,0)$ существуют, но не совпадают правосторонняя касательная с угловым коэффициентом $k=1$ и левосторонняя касательная с угловым коэффициентом $k=-1$ (рис.18).

7.5. Производная и дифференциал суммы, произведения, частного

Находить производные непосредственно по определению неудобно и сложно. Для этого существуют ряд правил и формул.

Теорема 7.1. Пусть функции $u=u(x), v=v(x)$ – дифференцируемы. Тогда сумма, разность, произведение этих функций, а при $v(x)\neq 0$ и частное, дифференцируемы и

$$\boxed{(u\pm v)'=u'\pm v', \qquad (uv)'=u'v+uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)};$$

$$\boxed{d(u+v)=du+dv, \quad d(u\cdot v)=v\cdot du+u\cdot dv, \quad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot du-u\cdot dv}{v^2}\ (v\neq 0)}.$$

Выведем, например, формулы для производной и дифференциала произведения.

Так как $\Delta u(x)=u(x+\Delta x)-u(x)$, то $u(x+\Delta x)=u+\Delta u$, $v(x+\Delta x)=v+\Delta v$.

Найдем приращение функции $u(x)\cdot v(x)$:

$$\Delta(u(x)\cdot v(x))=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)=(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v)-u\cdot v=\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v.$$

Тогда
$$\frac{\Delta(u\cdot v)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Функция $u(x)$ дифференцируема и, следовательно, непрерывна. Поэтому $\Delta u(x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Переходя в равенстве к пределу при $\Delta x\to 0$, получим:

$$(uv)'=u'v+uv'+0\cdot v'=u'v+uv'.$$

Для дифференциала произведения имеем:

$$d(uv)=(uv)'dx=(u'v+uv')dx=v(u'dx)+u(v'dx)=v\,du+u\,dv.$$

Остальные формулы выводятся аналогично.

Следствие. $\quad (\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\mathrm{ctg}\,x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}.$

Действительно, по формуле для производной частного имеем:

$$(\mathrm{tgx})' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично выводится формула для производной $\operatorname{ctg} x$.

7.6.Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$, а $u = u(x)$. Тогда $y = f(u(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u, независимым аргументом x.

Теорема 7.2. Пусть функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x, функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u = u(x)$. Тогда сложная функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x и для ее производной справедлива формула:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Доказательство. Для дифференцируемой функции $y = f(u)$ в силу (7.1) имеем:

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \alpha(\Delta u), \qquad (7.3)$$

где $\alpha(\Delta u)$ – бесконечно малая функция при $\Delta u \to 0$.

Разделив равенство (7.3) на Δx, получим: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \alpha(\Delta u)$.

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u). \qquad (7.4)$$

Функция $u = u(x)$ дифференцируема, а значит, и непрерывна. Поэтому ее приращение $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда $\alpha(\Delta u) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и равенство (7.4) примет вид: $y'_x = y'_u \cdot u'_x + u'_x \cdot 0 = y'_u \cdot u'_x$.

Итак, для нахождения производной сложной функции надо производную функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

Пример 7.4. Найти производную функции $y = \ln^3 \sin x$.

Решение. Данную сложную функцию можно представить в виде $y = u^3$, где $u = \ln v$, $v = \sin x$. Поэтому

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 3u^2 \cdot \frac{1}{v} \cdot \cos x = 3\ln^2 \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = 3\operatorname{ctg} x \cdot \ln^2 \sin x.$$

В дальнейшем, при приобретении навыка, промежуточные аргументы $u, v, \ldots$ можно вводить «мысленно» и не писать их. Например,

$$\left(\mathrm{tg}^2 x^3\right)' = 2\,\mathrm{tg}\, x^3 \cdot \left(\mathrm{tg}\, x^3\right)' = 2\,\mathrm{tg}\, x^3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x^3} \cdot 3x^2.$$

7.7.Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной функции $y = f(x)$ удобно равенство $y = f(x)$ сначала прологарифмировать, а затем продифференцировать. Такой прием называют логарифмическим дифференцированием. Его полезно применять для дифференцирования произведения многих сомножителей или для дифференцирования частного, числитель и знаменатель которого содержит несколько множителей, или для дифференцирования степенно-показательных функций $u(x)^{v(x)}$. При этом следует учесть, что $(\ln y)'_x = (\ln y)'_y \cdot y'_x = \frac{1}{y} \cdot y'_x$.

Пример 7.5. Доказать, что $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$, $\left(x^a\right)' = a \cdot x^{a-1}$.

Решение. Для $y = a^x$ имеем:

$$\ln y = x \ln a \;\Rightarrow\; (\ln y)'_x = (x \ln a)'_x \;\Rightarrow\; \frac{1}{y} \cdot y'_x = \ln a \;\Rightarrow\; y'_x = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a .$$

Для $y = x^a$ имеем:

$$\ln y = a \cdot \ln x \;\Rightarrow\; (\ln y)'_x = (a \cdot \ln x)'_x \;\Rightarrow\; \frac{1}{y} \cdot y'_x = a \cdot \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; y'_x = \frac{a}{x} \cdot y = \frac{a}{x} \cdot x^a = a \cdot x^{a-1}.$$

Пример 7.6. Найти производную функции $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x-5)^2} \cdot e^{\sin x}}{(x+1)^4}$.

Решение. Находить y' как производную частного, слишком громоздко. Удобнее применить логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = \ln \frac{(x-5)^{2/3} \cdot e^{\sin x}}{(x+1)^4} = \ln(x-5)^{2/3} + \ln e^{\sin x} - \ln(x+1)^4 \;\Rightarrow\; \ln y = \frac{2}{3}\ln(x-5) + \sin x - 4\ln(x+1).$$

Продифференцируем последнее равенство по x: $\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-5} + \cos x - 4 \cdot \frac{1}{x+1}$.

Выразим y': $y' = y\left(\frac{2}{3(x-5)} + \cos x - \frac{4}{x+1}\right) = \frac{\sqrt[3]{(x-5)^2} \cdot e^{\sin x}}{(x+1)^4}\left(\frac{2}{3(x-5)} + \cos x - \frac{4}{x+1}\right)$.

Пример 7.7. Найти производную функции $y = x^{\operatorname{tg} x}$.

Решение. Так как основание и показатель степени переменны, то следует применить логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = \ln\left(x^{\operatorname{tg} x}\right) \;\Rightarrow\; \ln y = \operatorname{tg} x \cdot \ln x \;\Rightarrow\; (\ln y)'_x = (\operatorname{tg} x \cdot \ln x)'_x ,$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\operatorname{tg} x)' \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x},$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right).$$

7.8.Производная обратной функции

Теорема 7.3. Пусть функция $y = f(x)$ монотонна и дифференцируема на интервале (a,b), причем $y'(x) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема и ее производная вычисляется по формуле $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Доказательство. По определению производной $x'_y = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$. Функция $y = f(x)$ – дифференцируема и, значит, непрерывна. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ также является непрерывной по теореме 6.3. Поэтому ее приращение $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$ и

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{y'_x}.$$

Следствие. Формулы для производных обратных тригонометрических функций:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Выведем первую из этих формул. Рассмотрим функцию $x = \sin y, \quad y \in \left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Эта функция монотонна, дифференцируема и $x'_y = \cos y \neq 0$ на рассматриваемом интервале. Поэтому обратная функция $y = \arcsin x$ – дифференцируема, причем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Перед корнем взят знак плюс, так как $\cos y > 0$ при $y \in \left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Аналогично выводится формула для производной $\operatorname{arctg} x$. Кроме того,

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\arccos x)' = -(\arcsin x)', \ (\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)'.$$

7.9. Гиперболические функции и их производные

В математике, механике, электротехнике используются гиперболические синус, косинус, тангенс и котангенс, определяемые следующим образом:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Отметим следующие свойства гиперболических функций:

1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$,
2) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$,
3) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$,
4) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$, $\quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$,
5) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $\quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $\quad (\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $\quad (\operatorname{cth} x)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Проверим, например, первое и пятое свойства:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)}{4} = 1,$$

$$\left(\operatorname{sh} x\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Воспользовавшись первым свойством, можно записать уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в параметрическом виде: $x = a \operatorname{ch} t, \quad y = b \operatorname{sh} t$.

Таким образом, свойства гиперболических функций похожи на свойства тригонометрических функций; кроме того они определяют параметрические уравнения гиперболы. Отсюда происходит их название.

7.10. Таблица производных

Рассмотренные правила и формулы дифференцирования запишем в виде таблицы.

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$,
2. $(uv)' = u'v + uv'$, в частности, $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где с – число,
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{-c \cdot v'}{v^2}$, где с – число,
4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, где $y = y(u), \quad u = u(x)$,
5. $y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad (x'_y \neq 0)$.

Формулы дифференцирования

1. $\left(x^a\right)' = a \cdot x^{a-1}$, в частности, $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
2. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, в частности, $\left(e^x\right)' = e^x$;
3. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$, в частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
4. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$;
6. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
7. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$, $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1 + x^2}$;
8. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$; $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

7.11. Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ − дифференцируемая функция. Производная $y' = f'(x)$ также является функцией от x. Ее производная $\left(y'(x)\right)'$, если она существует, называется производной второго порядка и обозначается $y''(x)$, или $f''(x)$, или $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Аналогично $\left(y''(x)\right)' = y'''(x)$, $\left(y'''(x)\right)' = y^{(4)}(x), \ldots$ Итак,

$$\boxed{y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'}.$$

Пример 7.8. Найти формулу для производной n−го порядка функции $y = \sin x$.

Решение. $y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\quad y'' = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\cdot 2\right)$,

$$y''' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 2\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 3\right), \ldots, y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right).$$

7.12. Функции, заданные параметрически, и их производные

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана при помощи уравнений через вспомогательную переменную t, называемую параметром:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \tag{7.5}$$

Будем предполагать, что функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = t(x)$. Тогда равенства (7.5) определяют сложную функцию $y = y\left(t(x)\right)$ аргумента x, заданную параметрическими уравнениями (7.5).

Теорема 7.4. Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t), y(t)$ − дифференцируемые функции, причем $x'(t) \neq 0$. Тогда функция $y = y(x)$ − дифференцируема и $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Если функции $x(t), y(t)$ − дважды дифференцируемы, то существует производная второго порядка y''_{xx}, причем $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

Доказательство. Как уже отмечалось, равенства (7.5) определяют сложную функцию $y = y(t)$, где $t = t(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции и обратной функции $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Аналогично $y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = (y'_x)'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t}$.

Пример 7.9. Найти y'_x, y''_{xx} для функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

Решение. Используем полученные формулы:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3\sin^2 t \cdot \cos t}{3\cos^2 t \cdot (-\sin t)} = -\operatorname{tg} t, \qquad y''_{xx} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{-1}{\cos^2 t}}{3\cos^2 t \cdot (-\sin t)} = \frac{1}{3\cos^4 t \, \sin t}.$$

7.13. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = y(x)$ – дифференцируемая функция независимого аргумента x. Тогда дифференциал функции $dy(x) = y'(x)dx$, причем $dx = \Delta x$ не зависит от x. Дифференциал $dy(x)$ при фиксированном dx является функцией от x. Поэтому можно рассмотреть дифференциал от этой функции $d(dy(x))$, который называется дифференциалом второго порядка функции $y(x)$ и обозначается $d^2y(x)$. Аналогично определяются дифференциалы третьего и более высоких порядков.

Определение дифференциалов высших порядков

$\boxed{d^2y = d(dy), \quad d^3y = d\left(d^2y\right), \ldots, d^{(n)}y = d\left(d^{(n-1)}y\right)}$ при фиксированном dx.

Вычисление дифференциалов высших порядков

Выведем формулы для вычисления дифференциалов высших порядков:

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = d(y')dx = (y''dx)dx = y''(dx)^2, \text{ то есть}$$

$$\boxed{d^2y = y''(dx)^2}. \tag{7.6}$$

Аналогично вычисляется дифференциал любого n–го порядка:

$$\boxed{d^ny = y^{(n)}(x)(dx)^n}. \tag{7.7}$$

Дифференциалы сложной функции

Приведенные выше формулы справедливы только, если x – независимая переменная. Теперь рассмотрим случай, когда $y = f(x)$, где $x = x(t)$ – зависимая переменная. Тогда функция $y = f(x(t))$ – сложная функция аргумента t и для ее дифференциала получим $dy = y'_t\,dt = (y'_x \cdot x'_t)\,dt = y'_x \cdot (x'_t\,dt) = y'_x\,dx$. Таким образом,

Форма дифференциала первого порядка $dy = y'_x\,dx$ имеет один и тот же вид (то есть ***инвариантна)*** и в случае, когда x – зависимое переменное, и в случае, когда x – независимое переменное.

Если x – зависимое переменное, то в формуле $dy = y'_x\,dx$ множитель dx является функцией: $dx = x'(t)\,dt$. Поэтому для вычисления дифференциала второго порядка используем формулу $d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$. Тогда

$$d^2y = d(dy) = d(y'_x\,dx) = d(y'_x)dx + y'_x\,d(dx) = (y''_{xx}\,dx)dx + y'_x\,d^2x, \text{ то есть}$$

$$d^2y = y''_{xx}(dx)^2 + y'_x\,d^2x. \tag{7.8}$$

Эта форма записи d^2y отличается вторым слагаемым от формы записи (7.6) для случая независимой переменной x, то есть форма записи второго дифференциала ***неинвариантна***. Если же $x = at + b$ – линейная функция, то $d^2x = x''(t)\,dt = 0$ и формулы (7.6) и (7.8) совпадают.

Форма дифференциала второго порядка $d^2y(x)$ инвариантна, если x – линейная функция, и неинвариантна в остальных случаях.

8. Теоремы о среднем

8.1. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Рассмотрим ряд теорем, имеющих большое теоретическое и прикладное значение. В их формулировке фигурирует некоторая «средняя» точка, поэтому их называют теоремами о среднем.

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$, 2) дифференцируема на интервале (a,b),

3) на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$.

Тогда найдется хотя бы одна точка $c \in (a,b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(c) = 0$.

Доказательство. По свойству функций, непрерывных на отрезке, функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ принимает наибольшее значение M и наименьшее значение m.

Возможны два случая.

а). Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a,b]$ и, значит, ее производная $f'(x) = 0$ в любой точке отрезка $[a,b]$.

б). Если $M \neq m$, а по условию $f(a) = f(b)$, то функция $f(x)$ хотя бы одно из значений M или m принимает внутри отрезка $[a,b]$ в точке $c \in (a,b)$. Пусть, например, $f(c) = m$. Тогда $f(c) \le f(c + \Delta x)$ для любых достаточно малых Δx. Поэтому

$$\Delta f(c) = f(c + \Delta x) - f(c) \ge 0 \text{ и } \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \ge 0 \text{ при } \Delta x > 0, \quad \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \le 0 \text{ при } \Delta x < 0.$$

Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке c, то существует производная $f'(c)$, причем

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \ge 0.$$

С другой стороны,

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \le 0.$$

Отсюда следует, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля

Если выполнены условия теоремы, то на графике функции $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси ox. На рис.19 таких точек две $-C_1$ и C_2.

Следствие. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля и $f(a) = f(b) = 0$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a,b)$, в которой $f'(c) = 0$; то есть между двумя нулями функции найдется хотя бы один нуль производной.

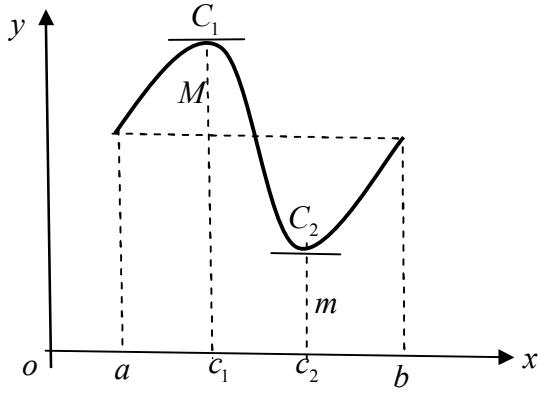


Рис.19

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$
1) непрерывна на отрезке $[a,b]$, 2) дифференцируема на интервале (a,b).
Тогда найдется хотя бы одна точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{или} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (8.1)$$

Формулу (8.1) называют ***формулой конечных приращений Лагранжа***.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $\Phi(x) = f(x) - \lambda x$. Подберем λ так, чтобы $\Phi(a) = \Phi(b)$. Тогда

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b, \quad \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Вспомогательная функция $\Phi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $\Phi(a) = \Phi(b)$. Поэтому по теореме Ролля найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что $\Phi'(c) = 0$. Тогда $\Phi'(c) = f'(c) - \lambda = 0$ и $f'(c) = \lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Отношение $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ равно угловому коэффициенту секущей AB (рис.20), а $f'(c)$ равно угловому коэффициенту касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой c. Поэтому из теоремы следует, что на кривой $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка C, в которой касательная к кривой параллельна секущей AB. На рис. 20 таких точек две: C_1, C_2.

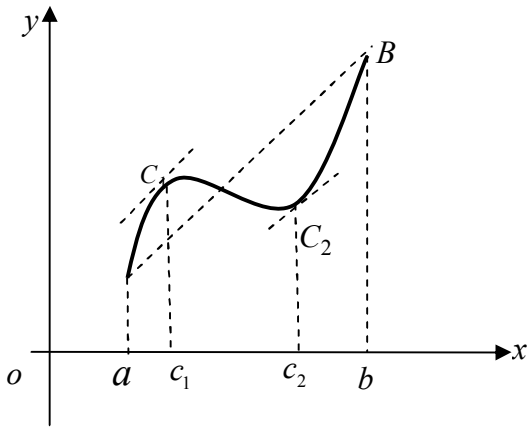


Рис.20

Следствие. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

Доказательство. Пусть $f'(x)=0$ на интервале (a,b). Рассмотрим две произвольные точки $x_1<x_2$ из интервала (a,b). Тогда по теореме Лагранжа $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$, где c – некоторая точка из промежутка (x_1,x_2). Так как $f'(c)=0$, то $f(x_2)-f(x_1)=0$. Поэтому $f(x_2)=f(x_1)$ для произвольных точек x_1,x_2 из (a,b), а значит, $f(x)$ постоянна на (a,b).

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$
1) непрерывны на отрезке $[a,b]$, 2) дифференцируемы на интервале (a,b),
3) $g'(x)\neq 0$ на (a,b). Тогда найдется хотя бы одна точка $c\in(a,b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы Лагранжа. Теорему Лагранжа можно рассматривать как частный случай теоремы Коши при $g(x)=x$.

8.2. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ с использованием производных.

Теорема Лопиталя. Пусть 1) в выколотой окрестности точки a функции $f(x)$, $g(x)$ – дифференцируемы и $g'(x)\neq 0$, 2) существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда, в случае неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, справедливо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство проведем для частного случая, когда точка a – конечна и $f(a)=g(a)=0$, т.е. неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Так как функции $f(x)$, $g(x)$ будут непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки a и $g'(x)\neq 0$, то можно применить теорему Коши:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Учитывая, что $f(a)=g(a)=0$, получим $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Перейдем в этом равенстве к пределу при $x\to a$, а значит, и при $c\to a$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Здесь мы использовали тот факт, что предел функции не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент.

Замечание. Если $f'(x)$ и $g'(x)$ – бесконечно малые или бесконечно большие при $x\to a$, то снова получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и можно повторно применить правило Лопиталя, если будут выполняться условия теоремы для функций $f'(x), g'(x)$.

Пример 8.1. При $a>0$ имеем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(x^a\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1/x}{a\cdot x^{a-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{a\cdot x^a}=0.$

Итак, при $x\to+\infty$ функция $\ln x$ растет медленнее, чем $x^a\ (a>0)$.

Пример 8.2. При $a>1$ имеем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(x^n\right)'}{\left(a^x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{a^x\ln a}.$

Если $n>1$, то снова получаем неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и снова применяем правило Лопиталя и т.д.: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x(\ln a)^2}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdots1}{a^x(\ln a)^n}=0.$

Итак, при $x\to+\infty$ функция x^n растет медленнее, чем $a^x\ (a>1)$.

Замечание. Неопределенности вида $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $\left[1^\infty\right]$, $\left[\infty^0\right]$ сводят к неопределенностям вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ путем тождественных преобразований и затем применяют правило Лопиталя.

Пример 8.3. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$.

Решение. а). Имеем неопределенность вида $[0\cdot\infty]$. Сведем ее к неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0}\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to+0}\frac{-\ln x}{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+0}\frac{-(\ln x)'}{\left(\operatorname{ctg}\sqrt{x}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{-1/x}{\frac{-1}{\sin^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2\sqrt{x}\cdot2\sqrt{x}}{x}=2\lim_{x\to+0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to+0}\sin\sqrt{x}=2\cdot1\cdot0=0.$$

Здесь мы воспользовались первым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$.

б). Имеем неопределенность вида $\left[\infty^0\right]$. Используем основное логарифмическое тождество: $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}=\left[\infty^0\right]=\lim\limits_{x\to+0}e^{\ln\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)}=e^0=1.$

Здесь мы воспользовались пределом, вычисленным в пункте а).

8.3. Формула Тейлора

Во многих прикладных задачах требуется заменить сложную функцию $f(x)$ многочленом $P_n(x)$, близким к $f(x)$ в окрестности точки x_0, в том смысле, что

$$\boxed{P_n(x_0)=f(x_0),\ \ P_n'(x_0)=f'(x_0)\ ,...,\ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)}. \qquad (8.2)$$

Введем ряд понятий.

1). Многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условию (8.2), называют ***многочленом Тейлора*** n-го порядка функции $f(x)$ в окрестности точки x_0.

2). Разность между функцией $f(x)$ и её многочленом Тейлора $P_n(x)$ обозначают $R_n(x)$: $\quad R_n(x)=f(x)-P_n(x)\ \Rightarrow\ f(x)=P_n(x)+R_n(x)$.

3). Формулу $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ называют ***формулой Тейлора*** n – го порядка для функции $f(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен Тейлора n – го порядка; $R_n(x)$ – ***остаточный член*** формулы Тейлора.

Теорема 8.1 (о виде многочлена Тейлора).
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз в окрестности точки x_0. Тогда многочлен Тейлора n – го порядка функции $f(x)$ имеет вид:

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (8.3)$$

Доказательство. Будем искать многочлен $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\ldots+a_n(x-x_0)^n.$$

Найдем производные этого многочлена

$$P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+...+n\,a_n(x-x_0)^{n-1},$$
$$P_n''(x)=2a_2+3\cdot2\,a_3(x-x_0)+4\cdot3a_4(x-x_0)^2+...+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot1\cdot a_n=n!\ a_n\ .$$

Вычислим эти производные в точке x_0 и воспользуемся равенствами (8.2):

$$P_n(x_0)=a_0;\quad P_n(x_0)=f(x_0)\ \Rightarrow\ a_0=f(x_0);$$
$$P_n'(x_0)=a_1;\quad P_n'(x_0)=f'(x_0)\Rightarrow\ a_1=f'(x_0);$$
$$P_n''(x_0)=2a_2;\ \ P_n''(x_0)=f''(x_0)\ \Rightarrow\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!};$$
$$P_n'''(x_0)=3\cdot2\cdot a_3;\ P_n'''(x_0)=f'''(x_0)\ \Rightarrow a_3=\frac{f'''(x_0)}{3!},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = n!a_n; \qquad P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставив коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$ в многочлен $P_n(x)$, получим формулу (8.3).

Используя вид многочлена Тейлора, запишем ***формулу Тейлора*** n ***– го порядка***:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)}. \qquad (8.4)$$

При $x_0 = 0$ формула Тейлора называется *формулой Маклорена* и имеет вид:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)} \qquad (8.5)$$

Рассмотрим вид остаточного члена $R_n(x)$ формулы Тейлора.

Теорема 8.2 (об остаточном члене в форме Пеано).
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз в окрестности точки x_0. Тогда остаточный член формулы Тейлора имеет вид:

$$R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right) \text{ при } x \to x_0 \quad . \qquad (8.6)$$

Доказательство. Из определения многочлена Тейлора (8.2) следует, что

$$f(x_0) - P_n(x_0) = 0, \quad f'(x_0) - P_n'(x_0) = 0, \ ..., \ f^{(n)}(x_0) - P_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Тогда для остаточного члена $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ получим:

$$R_n(x_0) = 0, \quad R_n'(x_0) = 0, \quad R_n''(x_0) = 0, \ \ldots, \ R_n^{(n)}(x_0) = 0. \qquad (8.7)$$

Учитывая это, вычислим $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}$, используя n раз правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n''(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} = ... = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$, то это означает, что $R_n(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $(x - x_0)^n$ при $x \to x_0$, то есть $R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$.

Рассмотрим другой вид остаточного члена формулы Тейлора, дающий более точную оценку.

Теорема 8.3 (об остаточном члене в форме Лагранжа).
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в окрестности точки x_0. Тогда остаточный член формулы Тейлора в этой окрестности можно записать в форме

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \ , \qquad (8.8)$$

где c – некоторая точка между x и x_0.

Доказательство этой теоремы не приводим.

Запишем формулу Тейлора для некоторых элементарных функций при $x_0 = 0$.

1). Пусть $f(x) = e^x$ и $x_0 = 0$. Вычислим производные функции e^x в точке x и в точке x_0: $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$. Используя формулы (8.5) и (8.6), получим:

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right).} \qquad (8.9)$$

В частности, при $n = 1$ и $n = 2$ имеем:

$$e^x = 1 + x + o(x), \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

2). Пусть $f(x) = \sin x$ и $x_0 = 0$. Ранее было показано, что

$f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n + x\right)$. Тогда $f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^{k-1}, & n = 2k-1. \end{cases}$

Используя формулы (8.5) и (8.6) при *n=2k,* получим:

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2k})}. \qquad (8.10)$$

В частности, при $k = 1$ и $k = 2$ имеем: $\sin x = x + o(x^2)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$.

3). Пусть $f(x) = \cos x$ и $x_0 = 0$. Представим $f(x)$ в виде $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Тогда $f^{(n)}(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2} + x\right)$ и $f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k-1 \\ (-1)^k, & n = 2k. \end{cases}$

Используя формулы (8.5) и (8.6) при $n = 2k+1$, получим:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})}. \qquad (8.11)$$

В частности, при $k = 1$ имеем: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

4). Пусть $f(x) = \ln(1+x)$ и $x_0 = 0$. Вычислим производные этой функции в точке x и в точке $x_0 = 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \ldots$$

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2!, \quad f^{(4)}(0) = -3!, \ldots, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Тогда $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Используя формулы (8.5) и (8.6), получим:

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)}. \qquad (8.12)$$

В частности, при $n = 1$ имеем: $\ln(1+x) = x + o(x)$. (8.13)

5). Пусть $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $x_0=0$ и α – действительное число. Тогда

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},\ldots;$

$f'(0)=\alpha,\ f''(0)=\alpha(\alpha-1),\ f'''(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2),\ldots,\ f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1)).$

Используя формулы (8.5) и (8.6), получим:

$$\boxed{(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o(x^n).}$$

В частности, при $n=1$ и при $n=2$ имеем:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+o(x), \tag{8.14}$$

$$(1+x)^{a}=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+o\left(x^2\right). \tag{8.15}$$

6). Пусть $f(x)=(a+x)^n$, n –натуральное число. Тогда

$f'(x)=n(a+x)^{n-1}$, $f''(x)=n(n-1)(a+x)^{n-2},\ldots,$ $f^{(n)}(x)=n(n-1)\cdots2\cdot1(a+x)^{n-n}=n!$.

Так как $f^{(n+1)}(x)=0$, то остаточный член $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ равен нулю.

Учитывая, что $f'(0)=n\,a^{n-1}$, $f''(0)=n(n-1)a^{n-2},\ldots$, $f^{(n)}(0)=n!$, из формулы (8.5) получим:

$$\boxed{(a+x)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+\ldots+x^n}. \tag{8.16}$$

Эту формулу называют «бином Ньютона».

Пример 8.4. Вычислить число e с точностью 0,01.

Решение. Воспользуемся формулой (8.9): $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+R_n(x)$.

При $x=1$ эта формула примет вид: $e^1=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}+R_n(1)$.

Запишем остаточный член $R_n(x)$ в форме Лагранжа по формуле (8.8), учитывая, что $x_0=0$, $f^{(n+1)}(x)=e^x$:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},\qquad R_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!},$$

причем точка c находится между $x=1$ и $x_0=0$, то есть $0<c<1$. Тогда $e^c<e^1<3$.

Подберем n так, чтобы $R_n(1)<0{,}01$. Так как $R_n(1)=\dfrac{e^c}{(n+1)!}<\dfrac{3}{(n+1)!}<0.01$, то $(n+1)!>300$. Это неравенство выполняется при $n=5$, так как

$$4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24,\qquad 5!=24\cdot5=120,\qquad 6!=120\cdot6=720.$$

Итак, с погрешностью 0,01

$$e\approx1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}\approx2{,}72.$$

Формулу Тейлора иногда удобно использовать для отыскания пределов.

Пример 8.5. Найти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$.

Решение. Имеем неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия воспользуемся формулами (8.11) при $k=2$ и формулой (8.9) при $n=2$, причем в формуле (8.9) заменим x на $\dfrac{-x^2}{2}$:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right),$$

$$e^{\frac{-x^2}{2}}=1+\left(\frac{-x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2+o\left(\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right).$$

Учитывая эти разложения, вычислим предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^4}{12}+o\left(x^4\right)}{x^4}=\frac{-1}{12}.$$

9. Исследование функций с помощью производной

Одним из приложений производной является применение производной к исследованию функции и построению графика функции. Мы рассмотрим такие характеристики функции, как монотонность, экстремум, выпуклость, а также асимптоты графика функции.

9.1. Монотонность функции

К монотонным функциям относятся функции, возрастающие или убывающие на промежутке. Напомним, что функция возрастает (соответственно убывает) на интервале (a,b), если для любых точек x_1, x_2 из этого интервала из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1)\le f(x_2)$ (соответственно $f(x_1)\ge f(x_2)$).

***Теорема 9.1* (*критерий монотонности*).**
Дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (соответственно убывает) на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда $f'(x)\ge 0$ (соответственно $f'(x)\le 0$) на интервале (a,b).

Доказательство. 1). Пусть функция $f(x)$ возрастает на (a,b).

Если $\Delta x>0$, то $f(x+\Delta x)\ge f(x)$, $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)\ge 0$ и $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}\ge 0$.

Если $\Delta x<0$, то $f(x+\Delta x)\le f(x)$, $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)\le 0$ и $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}\ge 0$.

Таким образом, $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0$ и для $\Delta x > 0$, и для $\Delta x < 0$. Тогда $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0$, причем $x -$ произвольная точка из интервала (a,b).

2). В обратную сторону, пусть $f'(x) \geq 0$ на интервале (a,b). Применим теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на произвольном отрезке

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2) \subset (a,b):$$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2).$$

Так как $f'(c) \geq 0, \quad x_2 - x_1 \geq 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Таким образом, $f(x_1) \leq f(x_2)$ для произвольных точек x_1, x_2 из (a,b) таких, что $x_1 < x_2$; значит, функция $f(x)$ возрастает на (a,b).

9.2. Экстремумы функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b), содержащем точку x_0. Напомним ряд определений.

1). Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции $f(x)$, если $f(x_0) > f(x)$ для всех x из некоторой выколотой окрестности точки x_0.
2). Точка x_0 называется ***точкой минимума*** функции $f(x)$, если $f(x_0) < f(x)$ для всех x из некоторой выколотой окрестности точки x_0.
3). Точки максимума и минимума функции называют ***точками экстремума*** функции.

Так как $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, то в окрестности точки x_0

$\Delta f(x_0) < 0$, если $x_0 -$ точка максимума;

$\Delta f(x_0) > 0$, если $x_0 -$ точка минимума.

На рис.21 точка максимума $- x_1$, точка минимума $- x_2$.

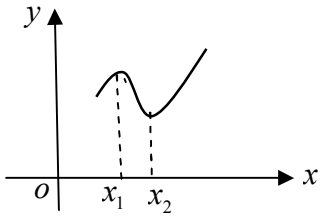


Рис.21

Для отыскания точек экстремума выведем необходимое условие экстремума и достаточные условия.

Теорема 9.2 (необходимое условие экстремума).
Пусть функция $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0. Тогда производная $f'(x)$ в точке x_0 равна нулю или не существует.

Доказательство от противного. Пусть производная $f'(x)$ в точке x_0 существует и не равна нулю, например, $f'(x_0) > 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) > 0$ и из свойства пределов следует, что $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Поэтому $\Delta f(x_0) > 0$, если $\Delta x > 0$, и $\Delta f(x_0) < 0$, если $\Delta x < 0$. Так как $\Delta f(x_0)$ меняет знак в окрестности точки x_0, то экстремума в точке x_0 функция не имеет, что противоречит условию теоремы.

Сделаем ряд замечаний.

1). Точки экстремума, в которых $f'(x)=0$, назовем точками ***гладкого экстремума***. В таких точках касательная к графику функции параллельна оси ox (рис.21).

2). Точки экстремума, в которых $f'(x)$ не существует, назовем *точками* ***острого экстремума***. В таких точках касательная к графику функции перпендикулярна оси ox (рис.22) или не существует (рис.23).

3). Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называют ***критическими точками*** функции.

4). Необходимый признак экстремума не является достаточным, то есть из того, что $f'(x_0)$ равна нулю или не существует, не следует, что $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0. Например, для функции $y=x^3$ ее производная $y'=3x^2$ равна нулю при $x=0$, но $x=0$ (рис.24) не является точкой экстремума функции.

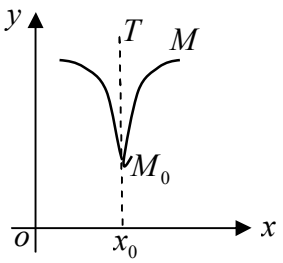


Рис.22

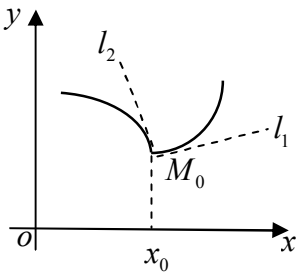


Рис.23

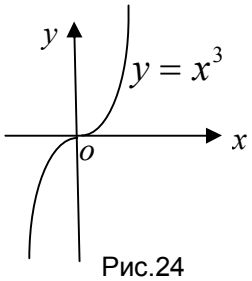


Рис.24

Для исследования критической точки на экстремум используют первое или второе достаточное условие экстремума.

Теорема 9.3 (первое достаточное условие экстремума).
Пусть функция $f(x)$ непрерывна в окрестности критической точки x_0 и дифференцируема в выколотой окрестности точки x_0. Если производная $f'(x)$ при переходе (слева направо) через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; если с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Доказательство. Пусть $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то есть $f'(x)>0$ на интервале $(x_0-\delta, x_0)$ и $f'(x)<0$ на интервале $(x_0, x_0+\delta)$. Тогда в силу теоремы 9.1 функция $f(x)$ возрастает на интервале $(x_0-\delta, x_0)$ и убывает на интервале $(x_0, x_0+\delta)$. Это и означает, что x_0 – точка максимума функции.

Пример 9.1. Исследовать на монотонность и экстремум функцию $y=3\sqrt[3]{x^2}-2x$; построить ее график.

Решение. Найдем производную $y' = 3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{-1}{3}} - 2 = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2$. Производная не существует при $x = 0$ и равна нулю при $x = 1$. Эти точки и есть критические точки функции. Они разбивают область определения функции − интервал $(-\infty, +\infty)$ на три интервала $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$. Исследуем знаки производной на этих интервалах, результаты оформим в виде таблицы.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	–	∞	+	0	–
y	↘	0 min	↗	1 max	↘

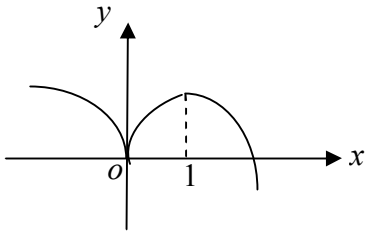


Рис.25

Так как $y' = \infty$ при $x = 0$, то в этой точке касательная перпендикулярна оси ox и экстремум – острый. Так как $y' = 0$ при $x = 1$, то в этой точке касательная параллельна оси ox и экстремум – гладкий.

При построении графика функции (рис.25) учтем еще, что $y = x\left(3/\sqrt[3]{x} - 2\right)$ и, значит, $y \to +\infty$ при $x \to -\infty$; $y \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

Теорема 9.4 (второе достаточное условие экстремума).
Пусть $f'(x_0) = 0$ и существует $f''(x)$ в точке x_0.
Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума для $f(x)$.
Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума для $f(x)$.

Доказательство. По формуле Тейлора второго порядка

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R_2(x).$$

Учитывая условия теоремы, получим:

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R_2(x).$$

Так как $R_2(x)$ бесконечно малая при $x \to x_0$, а $(x - x_0)^2 > 0$, то знак $\Delta f(x_0)$ совпадает со знаком $f''(x_0)$, а именно:

если $f''(x_0) < 0$, то $\Delta f(x_0) < 0$, значит, x_0 – точка максимума,
если $f''(x_0) > 0$, то $\Delta f(x_0) > 0$, значит, x_0 – точка минимума.

Пример 9.2. Исследовать на экстремум функцию $y = \sin x + \cos x$ для $x \in [0;\ 2\pi]$.

Решение. Найдем производную: $y' = \cos x - \sin x$. Она всюду существует и равна нулю, если $\cos x = \sin x$. Поэтому на отрезке $[0; 2\pi]$ получим две критические точки $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{5\pi}{4}$. Исследовать эти точки на экстремум проще не по знаку первой производной в окрестности точек, а по знаку второй производной

$y'' = -\sin x - \cos x$ в самих точках. Так как $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, $y''\left(\frac{5\pi}{4}\right) > 0$, то точка $x_1 = \frac{\pi}{4}$ есть точка максимума, а точка $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ есть точка минимума данной функции.

Замечания.

1. Рассмотренные достаточные признаки экстремума не всегда применимы. Иногда удобно исследовать функцию на экстремум, используя определение.

2. Иногда, для упрощения вычислений, удобно перейти от функции $f(x) > 0$ к функции $c \cdot f(x)$, или к функции $\sqrt{f(x)}$, или к функции $f^2(x)$. Все эти функции имеют экстремумы в одних и тех же точках.

9.3. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

На практике часто встречаются задачи, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение функции на отрезке. Напомним, что функция, непрерывная на отрезке, принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Эти значения она принимает либо в критических точках внутри отрезка, либо на концах отрезка. Поэтому для отыскания наибольшего и наименьшего значения непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ следует:

1) найти критические точки функции на интервале (a,b),
2) вычислить значения функции в этих критических точках (не исследуя их) и на концах отрезка,
3) из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 9.3. Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ на отрезке $[-1, 2]$.

Решение. Найдем критические точки функции: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$;
$f'(x) = 0$ в точке $x = 1$, принадлежащей отрезку $[-1, 2]$.
Вычислим значения функции в критической точке и на концах отрезка: $f(1) = -1$, $f(-1) = -9$, $f(2) = 0$. Поэтому наибольшее значение функции на отрезке $M = 0$, наименьшее значение $m = -9$.

9.4. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба

Пусть кривая $y = f(x)$, $x \in (a,b)$ имеет в каждой точке невертикальную касательную.

Кривая называется ***выпуклой*** (соответственно ***вогнутой***), если она расположена ниже (соответственно выше) любой своей касательной.
Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется ***точкой перегиба***.

На рис. 26 дуга AC кривой $y = f(x)$, $x \in (a,c)$ – выпуклая, дуга CB кривой $y = f(x)$, $x \in (c,b)$ – вогнутая, точка C – точка перегиба.

Теорема 9.5 (условие выпуклости).
Если $f''(x) \le 0$ на (a,b), то кривая $y = f(x)$, $x \in (a,b)$ выпукла.
Если $f''(x) \ge 0$ на (a,b), то кривая $y = f(x)$, $x \in (a,b)$ вогнута.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in (a,b)$. Вычислим ординату точки кривой $y_{кр.}$, используя формулу Тейлора первого порядка с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$y_{кр.} = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

где точка c находится между x и x_0.

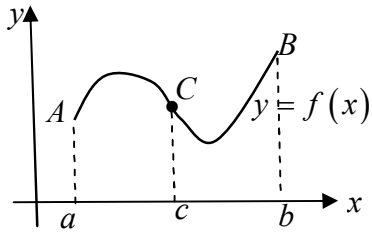


Рис.26

Из уравнения касательной

$$y_{кас.} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$y_{кр.} - y_{кас.} = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2.$$

Если $f''(x) \le 0$ на (a,b), то $y_{кр.} - y_{кас.} \le 0$, $y_{кр.} \le y_{кас.}$. Следовательно, кривая $y = f(x)$ является выпуклой. Аналогично доказывается, что при $f''(x) \ge 0$ кривая является вогнутой.

Теорема 9.6 (необходимое условие точки перегиба).
Пусть точка с абсциссой x_0 является точкой перегиба кривой $y = f(x)$. Тогда вторая производная $f''(x)$ в точке x_0 равна нулю или не существует.

Доказательство. Точка перегиба $(x_0, f(x_0))$ отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой. Пусть при $x < x_0$ кривая $y = f(x)$ выпукла, а при $x > x_0$ кривая $y = f(x)$ вогнута. Тогда

при $x < x_0$ имеем: $f''(x) \le 0$ и, значит, $f'(x)$ убывает;

при $x > x_0$ имеем: $f''(x) \ge 0$ и, значит, $f'(x)$ возрастает.

Это означает, что функция $f'(x)$ имеет минимум в точке x_0, следовательно, ее производная $(f'(x))' = f''(x)$ в этой точке или равна нулю, или не существует.

Замечание. Необходимое условие точки перегиба не является достаточным. Например, кривая $y = x^4$ является вогнутой, так как $y'' = 12x^2 \ge 0$ и, значит, не имеет точек перегиба, хотя $y'' = 0$ при $x = 0$.

Теорема 9.7 (достаточное условие точки перегиба).
Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то точка $(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба кривой $y = f(x)$.

Доказательство. Пусть $f''(x)<0$ при $x<x_0$ и $f''(x)>0$ при $x>x_0$. Тогда кривая $y=f(x)$ выпукла при $x<x_0$ и вогнута при $x>x_0$. Следовательно, точка с абсциссой x_0 является точкой перегиба этой кривой.

Итак, для исследования кривой $y=f(x)$ на выпуклость и отыскания точек перегиба нужно:

1) найти точки, в которых вторая производная $f''(x)$ равна нулю или не существует;
2) рассмотреть интервалы, на которые эти точки разделят область определения функции;
3) исследовать знак $f''(x)$ на этих интервалах.

Пример 9.5. Найти точки экстремума функции $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$. Исследовать график этой функции на выпуклость, найти точки перегиба. Построить график функции.

Решение. 1). Вычислим первую производную: $f'(x)=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$. Она равна нулю при $x=0$ и не существует (обращается в бесконечность) при $x=\pm1$. Знаменатель у производной $f'(x)$ положителен, а числитель меняет знак только при $x=0$, причем с – на +. Значит, $x=0$ точка минимума; $f(0)=-1$.

2). Для исследования на выпуклость найдем вторую производную:

$$f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}-x\cdot\frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}\cdot 2x}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}=\frac{-2\left(x^2+3\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^5}}.$$

Производная $f''(x)$ всюду отлична от нуля, но не существует при $x=-1,\ x=1$. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty;-1)$, $(-1,1)$, $(1;+\infty)$. Исследуем знаки второй производной на этих интервалах, результаты оформим в виде таблицы.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$y=f(x)$	выпукла	вогнута	выпукла

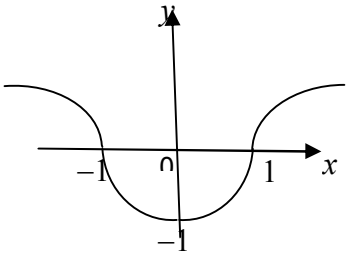


Рис 27

Точки с абсциссами $x=\pm1$ являются точками перегиба. Их ординаты $y=0$.

3). Для построения графика функции (рис.27) сначала нанесем точку минимума $(0;-1)$, затем точки перегиба $(-1;0),(+1;0)$ и учтем данные таблицы.

9.5. Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки , лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат.

Пример 9.6. Кривая $y = 1/x$ (рис.28) имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$.

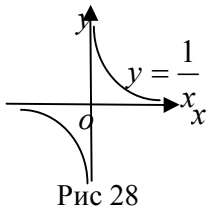


Рис 28

Отыскание вертикальных асимптот

Для отыскания вертикальных асимптот кривой $y = f(x)$ следует исследовать точки разрыва функции $f(x)$ и граничные точки ее области определения.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то прямая $x = x_0$ есть вертикальная асимптота.

Если только правосторонний предел $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, то прямая $x = x_0$ является правосторонней вертикальной асимптотой.

Пример 9.7. Имеют ли вертикальные асимптоты следующие кривые

$$\text{а) } y = \frac{e^x}{x-3}, \quad \text{б) } y = e^{-1/x}, \quad \text{в) } y = \ln x, \quad \text{г) } y = \frac{\sin x}{x} \ ?$$

Решение. а). Функция $y = \dfrac{e^x}{x-3}$ имеет точку разрыва $x = 3$. Так как $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{e^x}{x-3} = \infty$, то прямая $x = 3$ является вертикальной асимптотой.

б). Функция $y = e^{-1/x}$ имеет точку разрыва $x = 0$. Так как

$$\lim_{x \to -0} e^{-1/x} = \infty, \quad \lim_{x \to +0} e^{-1/x} = 0,$$

то прямая $x = 0$ является только левосторонней асимптотой.

в). Функция $y = \ln x$ определена на интервале $(0, +\infty)$ и не имеет точек разрыва. Исследуем граничную точку $x = 0$ области определения. Так как $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$, то прямая $x = 0$ является правосторонней асимптотой.

г). Функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ имеет точку разрыва $x = 0$, но $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Поэтому прямая $x = 0$ не является асимптотой.

Отыскание невертикальных асимптот

Теорема 9.8. Кривая $y = f(x)$ имеет невертикальную асимптоту $y = kx + b$ тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right].$$

Доказательство. 1). Пусть кривая $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = kx + b$. Тогда при $x \to \infty$ функция $f(x)$ отличается от $kx + b$ на бесконечно малую $\gamma(x)$, то есть $f(x) = kx + b + \gamma(x)$, где $\gamma(x)$ – бесконечно малая при $x \to \infty$. Из этого равенства имеем

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\gamma(x)}{x} \quad \text{и} \quad f(x) - kx = b + \gamma(x).$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k + \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{b}{x} + \frac{\gamma(x)}{x}\right) = k$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = b + \lim\limits_{x\to\infty}\gamma(x) = b$.

2). Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = b$. По свойству предела функция $f(x) - kx$ отличается от своего предела b на бесконечно малую $\gamma(x)$ при $x \to \infty$. Поэтому $\left[f(x) - kx\right] - b = \gamma(x)$ или $f(x) - (kx + b) \to 0$ при $x \to \infty$. Это и означает, что кривая $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = kx + b$.

Пример 9.8. Найти асимптоты кривой $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

Решение. Эта функция определена на всей числовой прямой, не имеет точек разрыва, а значит, не имеет и вертикальных асимптот. Для отыскания невертикальной асимптоты $y = kx + b$ вычислим $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot e^{-x}$. Рассмотрим отдельно случаи, когда $x \to +\infty$ и когда $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} x \cdot e^{-x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{-x} = [\infty \cdot \infty] = \infty.$$

Следовательно, при $x \to -\infty$ асимптоты нет. Продолжим отыскание асимптоты при $x \to +\infty$ и найдем b, учитывая что $k = 0$:

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^{-x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0.$$

Итак, $k = 0$, $b = 0$ при $x \to +\infty$. Поэтому прямая $y = kx + b$ или, в данном случае, $y = 0$ является асимптотой при $x \to +\infty$.

9.6. Схема исследования функции и построение ее графика

При построении графика функции в общем случае можно использовать следующую схему:

1). Найти область определения функции.
2). Проверить функцию на четность, нечетность, периодичность.
3). Найти асимптоты графика функции.
4). Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
5). Исследовать график функции на выпуклость и точки перегиба.
6). Найти (если возможно) точки пересечения с осями координат.

Не всегда нужно точно следовать этой схеме. Отметим следующие случаи:
а) иногда для построения графика функции достаточно пунктов 1-4 (краткая схема);
б) если функция определена при $x \ge 0$, то не надо проверять ее четность;
в) если функция определена на конечном интервале, то не надо искать ее невертикальные асимптоты;
г) если функция четная (или нечетная), то достаточно исследование провести для $x \ge 0$, а при построении графика функции учесть, что он симметричен относительно оси oy для четной функции (относительно начала координат для нечетной функции);
д) если функция периодическая, то достаточно исследование провести на промежутке с длиной, равной периоду.

Пример 9.9. Исследовать по краткой схеме функцию $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$ и построить ее график.

Решение. 1). Функция не определена при $x=1$. Область ее определения состоит из двух интервалов $(-\infty,1)$, $(1,+\infty)$.

2). Функция – общего вида (не является четной, нечетной), так как

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{1-(-x)}=\frac{x^2}{1+x}\ ,\quad f(-x)\ne f(x),\quad f(-x)\ne -f(x).$$

3). Найдем асимптоты графика функции.

Исследуем точку разрыва $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{1-x}=\infty$.

Поэтому прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

Найдем невертикальную асимптоту $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{1-x}+x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\left(x-x^2\right)}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}=-1.$$

Поэтому прямая $y=-x-1$ является невертикальной асимптотой.

4). Исследуем функцию на монотонность и экстремум:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(1-x)-(-1)\cdot x^2}{(1-x)^2}=\frac{x(2-x)}{(1-x)^2};$$

$f'(x)$ не существует в точке $x=1$, но эта точка не входит в область определения функции; $f'(x)=0$ при $x=0,\ x=2$; эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$. Исследуем знаки производной на этих интервалах; результаты оформим в виде таблицы.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min 0	$\nearrow$	$\nearrow$	max -4	$\searrow$

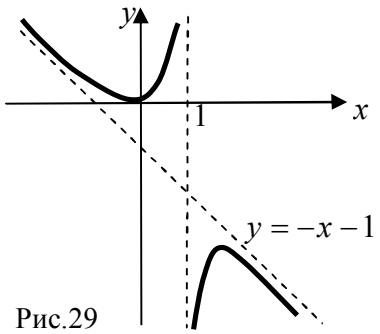


Рис.29

Построим асимптоты $x=1,\ y=-x-1$, точку минимума $(0;0)$, точку максимума $(2;-4)$ и график функции (рис.29).

Пример 9.10. Исследовать по краткой схеме функцию $f(x)=x^2e^{-x}$ и построить ее график.

Решение. 1). Область определения − интервал $(-\infty,+\infty)$.

2). Функция – общего вида (не является четной , нечетной), так как

$$f(-x)=(-x)^2e^x=x^2e^x;\quad f(-x)\neq f(x);\quad f(-x)\neq -f(x).$$

3). Асимптота графика функции $y=0$ при $x\to+\infty$ найдена в примере 9.8.

4). Исследуем функцию на монотонность и экстремум:

$$f'(x)=2x\cdot e^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}\left(2x-x^2\right);$$

$f'(x)=0$ при $x=0,\ x=2$. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$. Исследуем знаки производной на этих интервалах; учитывая, что $e^{-x}>0$; результаты оформим в виде таблицы.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ +\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	min 0	↗	max $4e^{-2}$	↘

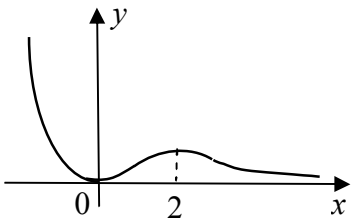


Рис.30

Построим асимптоту $y=0$ при $x\to+\infty$, точку минимума $(0;0)$, точку максимума $\left(2;4e^{-2}\right)$ и график функции (рис.30).

10. Вектор-функция

10.1. Понятие вектор-функции

Если каждому числу t из множества T по определенному закону поставлен в соответствие вектор $\vec{r}(t)$, то говорят, что на множестве T задана вектор-функция $\vec{r}=\vec{r}(t)$ скалярного аргумента t.

Пусть векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}(t)$ в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ имеют координаты:

$$\vec{r}=\{x,y,z\},\quad \vec{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}.$$

Тогда векторное равенство $\vec{r}=\vec{r}(t)$ равносильно трем скалярным равенствам: $x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$.

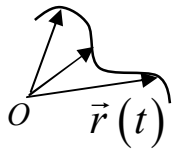


Рис.31

Вектор-функция изображается с помощью *годографа (*рис.31).

Годограф вектор-функции $\vec{r}(t)$ – это линия, проходящая через концы векторов $\vec{r}(t)$, отложенных из фиксированной точки O (*годос* – путь, *граф* – вычерчивать).

Например, годограф вектор-функции $\vec{r}(t)=\cos t\cdot\vec{i}+\sin t\cdot\vec{j}$ есть окружность радиуса, равного единице. Действительно, равенство $\vec{r}=\cos t\cdot\vec{i}+\sin t\cdot\vec{j}$ в координатной форме имеет вид: $x=\cos t,\ y=\sin t$ или $x^2+y^2=1$.

10.2. Предел и непрерывность вектор – функции

Если $\vec{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, то

$$\lim_{t\to a}\vec{r}(t)=\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to a}x(t)=b_1,\ \lim_{t\to a}y(t)=b_2,\ \lim_{t\to a}z(t)=b_3.$$

Вектор-функция $\vec{r}=\vec{r}(t)$ называется ***непрерывной*** в точке t_0, если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$.

Из определения непрерывности следует

1) вектор-функция $\vec{r}(t)$ – непрерывна в точке t_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{t\to t_0}\Delta\vec{r}(t_0)=0$,

где $\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$ – приращение вектор-функции;

2) вектор-функция $\vec{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ – непрерывна в точке t_0 $\Leftrightarrow$ $x(t),y(t),z(t)$ – непрерывны в этой точке.

10.3. Производная вектор-функции

Производные вектор-функции определяется аналогично производным скалярной функции.

$$\vec{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t},\qquad \vec{r}''(t)=\left(\vec{r}'(t)\right)',\quad \vec{r}'''(t)=\left(\vec{r}''(t)\right)'\ \ldots$$

Приняты и другие обозначения производных: $\dot{\vec{r}}(t)$, $\ddot{\vec{r}}(t)$, $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Физический смысл производной

Приращение вектор-функции $\Delta\vec{r}(t)=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$ есть изменение $\vec{r}(t)$ на отрезке $[t,t+\Delta t]$. Отношение $\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ есть средняя скорость изменения $\vec{r}(t)$ на этом отрезке.

Производная вектор-функции $\vec{r}'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$ есть мгновенная скорость изменения вектор-функции $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в точке t.

Если в вектор-функции $\vec{r}=\vec{r}(t)$ трактовать t как время, то годограф вектор-функции задает траекторию движущейся точки; вектор $\dot{\vec{r}}(t)$ задает скорость движущейся точки; вектор $\ddot{\vec{r}}(t)$ задает ускорение движущейся точки.

Геометрический смысл производной

Производная вектор-функции в точке есть вектор. Выясним его направление. Построим годограф вектор-функции и векторы $\vec{r}(t),\vec{r}(t+\Delta t)$. Вектор разности $\Delta\vec{r}(t)=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$ направлен *по секущей* к годографу (рис.32).

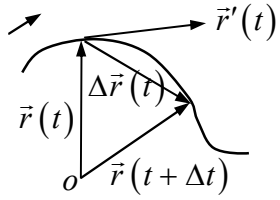


Рис.32

В пределе при $\Delta t \to 0$ вектор $\dfrac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$ превращается в вектор $\vec{r}'(t)$, а секущая – в касательную к годографу. На рис. 32 $\Delta t > 0$ и вектор $\vec{r}'(t)$ направлен по касательной к годографу в сторону возрастания аргумента t. Можно показать, что это утверждение будет справедливо и при $\Delta t < 0$. Итак,

Вектор $\vec{r}'(t)$ направлен по касательной к годографу вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в сторону возрастания аргумента t.

Правила дифференцирования

Правила дифференцирования скалярной функции и их вывод переносятся и на векторную функцию. Перечислим эти правила.

1) $\left[\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)\right]' = \vec{r}_1{}'(t) + \vec{r}_2{}'(t)$,

2) $\left[f(t) \cdot \vec{r}(t)\right]' = f'(t) \cdot \vec{r}(t) + f(t) \cdot \vec{r}'(t)$,

$\left[\lambda \cdot \vec{r}(t)\right]' = \lambda \cdot \vec{r}'(t)$, ($\lambda$ – число),

$\left[f(t) \cdot \vec{c}\right]' = f'(t) \cdot \vec{c}$, ($\vec{c}$ – постоянный вектор),

3) $\left[\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)\right]' = \vec{r}_1{}'(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2{}'(t)$,

4) $\left[\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)\right]' = \vec{r}_1{}'(t) \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2{}'(t)$,

5) для сложной функции $\vec{r} = \vec{r}(u(t))$ имеем: $r_t{}' = \vec{r}_u{}' \cdot u_t{}'$,

6) если $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, то $\vec{r}'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$.

Дифференциал вектор – функции

Дифференциал вектор – функции определяется и вычисляется аналогично дифференциалу скалярной функции:

$$d\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) \cdot dt.$$

Если $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, то $d\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) \cdot dt = \{x'(t), y'(t), z'(t)\} \cdot dt = \{dx, dy, dz\}$.

Итак, $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$.

10.4. Геометрические приложения вектор – функции

Если задана вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то ее годограф – линия L – имеет векторно-параметрическое уравнение $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (t – параметр), или координатно-параметрические уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Линия L с уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называется гладкой, если вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и ее производная $\vec{r}'(t)$ – непрерывны и $\vec{r}'(t) \neq 0$. Это означает, что в каждой точке кривая L имеет непрерывно – изменяющийся касательный вектор $\vec{r}'(t)$.

Пусть задана кривая L с уравнением $\vec{r}=\vec{r}(t)$ или $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка на этой кривой, t_0 – значение параметра t в точке P_0. Тогда вектор $\vec{r}'(t_0)=\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ является направляющим вектором касательной прямой к линии L в точке P_0 и канонические ***уравнения касательной*** прямой к линии L в точке P_0 имеют вид:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.}$$

Плоскость, проходящая через точку касания P_0 перпендикулярно касательной прямой к линии L (рис.33), называется *нормальной плоскостью* линии L в точке P_0. Вектор $\vec{r}'(t_0)=\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ коллинеарен касательной прямой и, значит, перпендикулярен нормальной плоскости. Поэтому ***уравнение нормальной плоскости*** к линии L в точке P_0 имеет вид:

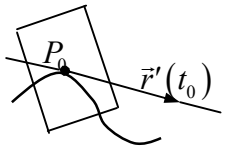


Рис.33

$$\boxed{x'(t_0)\cdot(x-x_0)+y'(t_0)\cdot(y-y_0)+z'(t_0)\cdot(z-z_0)=0.}$$

Пример 10.1. Составить уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к линии $x=2\cos t,\quad y=2\sin t,\quad z=3t$ в точке $P_0\left(1, \sqrt{3}, \pi\right)$.

Решение. Для точки P_0 найдем значение параметра t_0: $z=3t_0=\pi$, $t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

Найдем касательный вектор к линии в точке P_0:

$\vec{r}'(t_0)=\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}=\{-2\sin t_0, 2\cos t_0, 3\}=\left\{-\sqrt{3}, 1, 3\right\}$.

Запишем уравнение касательной прямой к линии в точке P_0

$$\frac{x-1}{-\sqrt{3}}=\frac{y-\sqrt{3}}{1}=\frac{z-\pi}{3}$$

и уравнение нормальной плоскости $-\sqrt{3}(x-1)+\left(y-\sqrt{3}\right)+3(z-\pi)=0$.

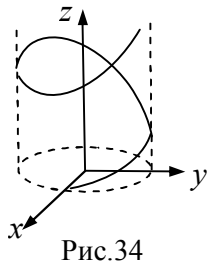


Рис.34

Отметим, что заданная линия есть винтовая линия: ее проекция на плоскость xoy есть окружность $x^2+y^2=4$, а третья координата $z=3t$ точки линии растет с ростом t (рис.34).

Глава 3. Неопределенный интеграл

Различные вопросы математики, естествознания, техники приводят к восстановлению функции по заданным ее производной или дифференциалу. Решение этой задачи основано на понятии первообразной и неопределенного интеграла.

11. Неопределенный интеграл и его свойства

11.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на промежутке X, если в каждой точке этого промежутка

$$F'(x)=f(x). \qquad (11.1)$$

Например, функция $F(x)=\sin x$ является первообразной для функции $f(x)=\cos x$ на всей числовой оси, так как $(\sin x)'=\cos x$.

Теорема 11.1. Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Тогда функции $F(x)+C$ (C – произвольная постоянная) и только они являются первообразными для $f(x)$.

Доказательство. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $F'(x)=f(x)$. Тогда $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$, т.е. функция $F(x)+C$ также является первообразной для $f(x)$. Покажем, что функциями вида $F(x)+C$ исчерпываются все первообразные для функции $f(x)$. Действительно, пусть $F(x), \Phi(x)$ – две первообразные для $f(x)$ на промежутке X. Тогда $F'(x)=f(x)$, $\Phi'(x)=f(x)$ на X. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=\Phi(x)-F(x)$. Для нее имеем:

$$g'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Следовательно, по следствию из теоремы Лагранжа (см. п. 8.1), функция $g(x)$ – постоянна на X, то есть $g(x)=C$. Поэтому $\Phi(x)-F(x)=g(x)=C$ или $\Phi(x)=F(x)+C$. Итак, все первообразные функции $f(x)$ имеют вид $F(x)+C$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.

Множество всех первообразных $F(x)+C$ функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** этой функции и обозначается $\int f(x)\,dx$.

Таким образом,

$$\boxed{\int f(x)\,dx=F(x)+C}, \qquad (11.2)$$

где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на промежутке X.

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, выражение $f(x)\,dx$ называется подынтегральным выражением, переменная x называется переменной интегрирования, число C – постоянной интегрирования.

Так как $F'(x)=f(x)$, то для того чтобы проверить, правильно ли вычислен интеграл, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Например, 1) $\int x^{\alpha}\,dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ при $\alpha\neq-1$, так как $\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'=x^{\alpha}$;

2) $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$ $(x\neq0)$, так как $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$;

действительно, при $x>0$ имеем $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

при $x<0$ имеем $(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}$.

11.2. Свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$$

3. Неопределенный интеграл от производной равен самой функции плюс произвольная константа:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C.$$

Это свойство иногда записывают по-другому:

$$\int d\,f(x) = f(x) + C.$$

4. Постоянный множитель k можно вынести за знак неопределенного интеграла:

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \qquad (k \neq 0).$$

5. Неопределенный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Это свойство справедливо также для любого конечного числа слагаемых.

6. Свойство инвариантности: вид формулы интегрирования останется неизменным (инвариантным), если независимую переменную x заменить любой дифференцируемой функцией $u(x)$, то есть

$$\text{если } \int f(x)\,dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(u)\,du = F(u) + C \quad .$$

Проверим эти свойства.

1-е свойство следует из определений неопределенного интеграла и первообразной:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x).$$

2-е свойство следует из предыдущего свойства, так как дифференциал функции равен ее производной, умноженной на дифференциал аргумента.

Самостоятельно проверьте 3-е, 4-е и 5-е свойства дифференцированием результата и получением при этом подынтегральной функции.

6-е свойство следует из того, что если $F(x)$– первообразная для $f(x)$, то $d\,F(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$. Тогда по свойству инвариантности первого дифференциала $d\,F(u) = f(u)\,du$ и $\int f(u)\,du = \int d\,F(u) = F(u) + C$.

Рассмотрим несколько примеров на применение этих свойств.

Выше было показано, что $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$. Тогда $\int x^3\,dx = \dfrac{x^4}{4} + C$ и по свойству инвариантности $\int \sin^3 x\,d(\sin x) = \dfrac{\sin^4 x}{4} + C$.

$$\int \frac{2x^5-\sqrt{x}}{x}dx=\int(2x^4-x^{-1/2})\,dx=2\int x^4dx-\int x^{-1/2}dx==2\left(\frac{x^5}{5}+C_1\right)-\left(\frac{x^{1/2}}{1/2}+C_2\right)=\frac{2}{5}x^5-2\sqrt{x}+C.$$

Здесь $C=2C_1-C_2$. В дальнейшем, когда будет встречаться сумма интегралов, будем сразу писать одну произвольную постоянную.

Задача интегрирования принципиально труднее задачи дифференцирования. В дифференциальном исчислении существуют правила дифференцирования суммы, произведения, частного, сложных и обратных функций. В интегральном исчислении правил для интегрирования произведения, частного, сложной и обратной функции нет. Имеются лишь отдельные приемы, позволяющие интегрировать некоторые классы функций. Они будут рассмотрены дальше. Но сначала приведем таблицу так называемых основных интегралов.

11.3. Таблица основных интегралов

1. $\int u^{\alpha}\,du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad(\alpha\neq-1);$	$\int du=u+C$.
2. $\int\frac{du}{u}=\ln\lvert u\rvert+C$.	
3. $\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C,\quad(a>0,\quad a\neq1),$	$\int e^u\,du=e^u+C.$
4. $\int\sin u\,du=-\cos u+C$,	$\int \operatorname{sh} u\,du=\operatorname{ch} u+C.$
5. $\int\cos u\,du=\sin u+C$,	$\int \operatorname{ch} u\,du=\operatorname{sh} u+C$.
6. $\int\frac{du}{\cos^2 u}=\operatorname{tg} u+C$.	
7. $\int\frac{du}{\sin^2 u}=-\operatorname{ctg} u+C$.	
8. $\int\frac{du}{\sin u}=\ln\left\lvert\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\rvert+C=\ln\left\lvert\frac{1}{\sin u}-\operatorname{ctg}u\right\rvert+C$.	
9. $\int\frac{du}{\cos u}=\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right\rvert+C=\ln\left\lvert\frac{1}{\cos u}+\operatorname{tg}u\right\rvert+C$.	
10. $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C,\quad(a\neq0)$.	
11. $\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert+C,\quad(a\neq0)$.	
12. $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C,\quad(a\neq0)$.	
13. $\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left\lvert u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right\rvert+C$.	

Эти формулы нетрудно проверить дифференцированием, т.е. установить, что производная результата интегрирования равна подынтегральной функции. Проверим, например, справедливость формулы (10):

$$\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}\right)' = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{u^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+u^2} = \frac{1}{a^2+u^2}.$$

Пример 11.1. $\int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$ (формула (10), п.12.3).

Пример 11.2. $\int (7\cos x - 2\sin x)\,dx = 7\int \cos x dx - 2\int \sin x dx = = 7\sin x + 2\cos x + C$.

Пример 11.3. $\int \frac{dt}{9-t^2} = -\int \frac{dt}{t^2-9} = -\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{18}\ln\left|\frac{t+3}{t-3}\right| + C$ (формула (11), п.12.3).

Пример 11.4.

$$\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx = = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C.$$

12. Основные методы интегрирования

12.1. Метод подведения под знак дифференциала

Этот метод применяется для вычисления интегралов вида $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$. Воспользуемся тем, что $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$. При этом говорят, что мы подвели функцию $\varphi(x)$ под знак дифференциала. Если еще сделать замену $u = \varphi(x)$, то мы получим интеграл более простой, чем первоначальный:

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = \int f(u)\,du}. \qquad (12.1)$$

После нахождения интеграла следует вернуться к переменной x, заменив u на $\varphi(x)$.

Отметим, что при подведении функции под знак дифференциала прежде всего используется определение дифференциала

$$\boxed{\varphi'(x)\,dx = d\,\varphi(x)} \qquad (12.2)$$

и два его свойства

$$\boxed{d\,\varphi(x) = d\,(\varphi(x) + C)}, \qquad (12.3)$$

$$\boxed{d\,\varphi(x) = \frac{1}{\lambda}d\,(\lambda\,\varphi(x))} \quad (\lambda \neq 0). \qquad (12.4)$$

Рассмотрим, как подвести под знак дифференциала некоторые функции:

$x^\alpha\,dx = \frac{(x^{\alpha+1})'}{\alpha+1}dx = \frac{dx^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ (\alpha \neq -1),$	$\frac{dx}{x} = (\ln x)'dx = d\,(\ln x),$
$\sin x\,dx = -(\cos x)'dx = -d\,(\cos x),$	$\cos x\,dx = (\sin x)'dx = d\,(\sin x),$
$\frac{dx}{\cos^2 x} = (\operatorname{tg} x)'dx = d\,(\operatorname{tg} x),$	$\frac{dx}{\sin^2 x} = -(\operatorname{ctg} x)'dx = -d\,(\operatorname{ctg} x),$
$\frac{dx}{1+x^2} = (\operatorname{arctg} x)'\,dx = d\,(\operatorname{arctg} x),$	$e^x\,dx = (e^x)'dx = d\,(e^x).$

Список таких формул можно продолжить. Важно понять, как они получаются.

Рассмотрим примеры на вычисление неопределенных интегралов методом подведения под знак дифференциала.

Пример 12.1. $\int \frac{dx}{(3x-1)^5} = \int \frac{\frac{1}{3}d(3x-1)}{(3x-1)^5} = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{-5} d(3x-1) =$

$$= \frac{1}{3}\int u^{-5}\, du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-4}}{-4} + C = \frac{(3x-1)^{-4}}{-12} + C.$$

Мы использовали свойства дифференциалов $dx = \frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}d(3x-1)$ и формулу (1), п. 11.3.

Пример 12.2. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2\ln x + 3}}$.

Воспользуемся правилом подведения под знак дифференциала

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x) = \frac{1}{2}d(2\ln x) = \frac{1}{2}d(2\ln x + 3)$$

и введем новую переменную $u = 2\ln x + 3$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2\ln x + 3}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2\ln x + 3)}{\sqrt{2\ln x + 3}} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{-1}{2}} du = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2\ln x + 3} + C.$$

В дальнейшем, когда появится навык, можно вводить новую переменную u только "мысленно".

Пример 12.3. Найти интеграл $I = \int e^{3\sin x}\cos x\, dx$.

Воспользуемся правилом подведения под знак дифференциала

$$\cos x\, dx = (\sin x)' dx = d(\sin x) = \frac{1}{3}d(3\sin x).$$

Тогда $I = \int e^{3\sin x}\cos x\, dx = \frac{1}{3}\int e^{3\sin x} d(3\sin x) = \frac{1}{3}e^{3\sin x} + C$. Здесь мы "мысленно" ввели переменную $u = 3\sin x$ и воспользовались формулой (3), п. 11.3.

Пример 12.4. Найти интеграл $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

Воспользуемся тем, что $x^2\, dx = \frac{dx^3}{3}$, $x^6 = \left(x^3\right)^2$, и формулой (12), п. 11.3:

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx^3}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin x^3 + C.$$

Пример 12.5. Найти интеграл $\int \sin^3 6x \cos 6x\, dx$.

Воспользуемся тем, что $\cos 6x\, dx = \frac{1}{6}\cos 6x\, d(6x) = \frac{1}{6}d(\sin 6x)$. Тогда

$$\int \sin^3 6x \cos 6x dx = \frac{1}{6}\int \sin^3 6x\, d(\sin 6x) = \frac{1}{6}\cdot\frac{\sin^4 6x}{4} + C = \frac{\sin^4 6x}{24} + C.$$

***Пример 12.6*.** Найти интеграл $I=\int \frac{x+(\arcsin 3x)^2}{\sqrt{1\text{-}9x^2}}dx$.

Представим интеграл в виде суммы интегралов

$$I_1=\int \frac{x}{\sqrt{1\text{-}9x^2}}dx, \qquad I_2=\int \frac{(\arcsin 3x)^2}{\sqrt{1\text{-}9x^2}}dx.$$

Воспользуемся тем, что

$$x\,dx=\frac{dx^2}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-9}d(-9x^2)=\frac{-1}{18}d(1-9x^2), \quad \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx=\frac{1}{3}(\arcsin 3x)'dx=\frac{1}{3}d(\arcsin 3x).$$

Тогда $I_1=\frac{-1}{18}\int (1-9x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-9x^2)=\frac{-1}{18}\cdot\frac{(1-9x^2)^{1/2}}{1/2}+C=\frac{-1}{9}\sqrt{1-9x^2}+C_1,$

$$I_2=\frac{1}{3}\int (\arcsin 3x)^2 d(\arcsin 3x)=\frac{(\arcsin 3x)^3}{9}+C_2.$$

Окончательно имеем $I=-\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2}+\frac{(\arcsin 3x)^3}{9}+C$.

12.2. Метод замены переменной

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести данный интеграл к более простому. Такой метод называется методом замены переменной или методом подстановки.

Пусть функция $x=\varphi(u)$ непрерывно дифференцируема на промежутке и имеет обратную функцию $u=\psi(x)$. Тогда

$$\boxed{\int f(x)dx=\int f(\varphi(u))\varphi'(u)du\ \Big|_{u=\psi(x)}}. \tag{12.5}$$

Выражение, стоящее в правой части этой формулы, означает, что после отыскания интеграла в равенстве (12.5) вместо u нужно подставить его выражение через x.

Вывод этой формулы опустим. Отметим, что в формуле (12.5) мы "выводим функцию из под знака дифференциала" $dx=d\varphi(u)=\varphi'(u)du$. В формуле (12.4) мы "подводим под знак дифференциала" $\varphi'(x)dx=d\varphi(x)$.

Остановимся подробнее на применении формулы (12.5).

При замене переменной в интеграле $\int f(x)dx$ нужно

а) заменить переменную x на функцию $\varphi(u)$, заменить dx на $\varphi'(u)du$,

б) вычислить получившийся интеграл,

в) результат выразить через первоначальную переменную x.

Укажем некоторые рекомендации по выбору новой переменной. Пусть $R(x,y)$ − рациональная функция, полученная из x,y с помощью сложения, вычитания, умножения, деления. Рекомендации по выбору новой переменной приведены в следующей таблице.

Тип интеграла	Замена
$I_1=\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$	$x=a\cdot\sin u$
$I_2=\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$	$x=a\cdot\mathrm{tg}\,u$
$I_3=\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$	$x=\dfrac{a}{\sin u}$
$I_4=\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}},\ \ \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$	$\dfrac{ax+b}{cx+d}=u^k$, *k - наименьшее общее кратное чисел m,n*

Пример 12.7. Найти $\int\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$. Это − интеграл типа I_3.

В соответствии с рекомендацией сделаем замену $x=\dfrac{3}{\sin u}$. Тогда

$$dx=\left(\frac{3}{\sin u}\right)'du=-3(\sin u)^{-2}\cdot\cos u\,du=-\frac{3\cos u}{\sin^2 u}du,\qquad \sqrt{x^2-9}=\sqrt{\frac{9}{\sin^2 u}-9}=3\frac{\cos u}{\sin u}.$$

Подставляя выражения для $x, dx, \sqrt{x^2-9}$ в интеграл, получим:

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=\int\frac{\dfrac{3\cos u}{\sin u}\cdot\dfrac{-3\cos u}{\sin^2 u}}{\dfrac{3}{\sin u}}du=-3\int\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}du=$$

$$=-3\int\frac{1-\sin^2 u}{\sin^2 u}du=-3\left(\int\frac{1}{\sin^2 u}du-\int du\right)=3\,\mathrm{ctg}\,\mathrm{u}+3u+C.$$

Получившийся результат надо выразить через первоначальную переменную x. Учитывая, что $x=\dfrac{3}{\sin u}$, получим

$$\sin u=\frac{3}{x},\ \cos u=\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x},\qquad \mathrm{ctg}\,\mathrm{u}=\frac{\cos u}{\sin u}=\frac{\sqrt{x^2-9}}{3},\qquad \mathrm{u}=\arcsin\frac{3}{x}.$$

Тогда $\int\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=\sqrt{x^2-9}+3\arcsin\dfrac{3}{x}+C$.

Пример 12.8. Найти $\int\dfrac{\sqrt{x-9}}{x}dx$. Это − интеграл типа I_4.

В соответствии с рекомендацией сделаем замену $x-9=t^2$. Тогда $x=9+t^2$, $dx=\left(t^2+9\right)'dt=2t\,dt.$ Подставим выражения для $x,\ dx, \sqrt{x-9}=t$ в интеграл:

$$\int\frac{\sqrt{x-9}}{x}dx=\int\frac{t\cdot 2t\,dt}{t^2+9}=2\int\frac{(t^2+9)-9}{t^2+9}dt=2\left(\int dt-9\int\frac{dt}{t^2+9}\right)=2t-18\cdot\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,\frac{t}{3}+C.$$

Получившийся результат надо выразить через переменную x. Учитывая, что

$t^2 = x-9, \quad t=\sqrt{x-9}$, получим $\int \frac{\sqrt{x-9}}{x}dx = 2\sqrt{x-9} - 6\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{x-9}}{3} + C$.

Пример 12.9. Найти $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx$. Это − интеграл типа I_2.

В соответствии с рекомендацией (2) сделаем замену $x = 3\,\mathrm{tg}t$. Тогда

$$dx = \left(3\mathrm{tg}\,t\right)' dt = \frac{3}{\cos^2 t}dt, \qquad \sqrt{x^2+9} = \sqrt{9\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+9} = \frac{3}{\cos t}.$$

Подставляя выражения для $x, dx, \sqrt{x^2+9}$ в интеграл, получим

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx = \int \frac{\frac{3}{\cos\,t}\cdot\frac{3}{\cos^2 t}}{3^4\frac{\sin^4 t}{\cos^4 t}}dt = \frac{1}{3^2}\int \frac{\cos\,t\,dt}{\sin^4 t} =$$

$$= \frac{1}{9}\int \sin^{-4} t\; d\left(\sin t\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{\sin^{-3} t}{-3} + C = -\frac{1}{27\sin^3 t} + C.$$

Получившийся результат надо выразить через переменную x, учитывая, что $\mathrm{tg}\,t = \frac{x}{3}$. Удобно воспользоваться прямоугольным треугольником с острым углом *t*, противолежащим катетом x и прилежащим катетом, равным 3 (рис. 35).

Тогда $\mathrm{tg\ t} = \frac{x}{3}, \quad \sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}, \quad \frac{1}{\sin t} = \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$.

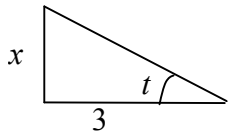


Рис.35

Окончательно получим $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx = -\frac{\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}}{27\,x^3} + C$.

Пример 12.10. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

Сделаем замену переменной $1+e^x = t^2$. Тогда $e^x = t^2-1, \quad x = \ln\left(t^2-1\right), \quad dx = \frac{2tdt}{t^2-1}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{2t\,dt}{(t^2-1)\cdot t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C == \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$$

12.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции. Найдем дифференциал их произведения: $d\left(uv\right) = u\,dv + v\,du$. Проинтегрируем это равенство и воспользуемся свойством $\int d\left(uv\right) = uv$. Тогда получим формулу $uv = \int u\,dv + \int v\,du$ или

$$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du}. \qquad (12.6)$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям. Формула применяется, когда вычисление интеграла $\int v\,du$ составляет задачу более простую, чем вычисление интеграла $\int u\,dv$.

Умение разбивать разумным образом подынтегральное выражение на множители u и dv вырабатывается в процессе решения задач. Укажем, когда и как это делается в некоторых случаях:

1) интегралы $\int P(x)\, e^{ax} dx,\ \int P(x) \sin ax\, dx,\ \int P(x) \cos ax\, dx$,

где $P(x)$ – многочлен, вычисляются многократным интегрированием по частям, причем следует взять $u = P(x)$, а оставшееся выражение взять за dv;

при каждом применении формулы (12.6) степень многочлена будет понижаться на единицу;

2) интегралы вида $\int P(x) \ln x\, dx, \int x \operatorname{arctg} x\, dx, \int \arcsin x\, dx$ также вычисляются методом интегрирования по частям, но за u следует взять соответственно функции $\ln x,\ \operatorname{arctg} x,\ \arcsin x$.

Пример 12.11. Найти интеграл $\int x^2 e^{-x}\, dx$.

Положим $u = x^2, dv = e^{-x} dx$. Тогда $du = 2x\, dx$, $v = \int dv = \int e^{-x} dx = -\int e^{-x} d(-x) = -e^{-x}$.

При отыскании функции v мы взяли постоянную интегрирования $C = 0$. Легко проверить, что это не повлияет на конечный результат. Теперь применим формулу (12.6):

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx .$$

Еще раз применим формулу интегрирования по частям, положив $u = x,\ dv = e^{-x} dx$. Тогда $du = dx,\ v = -e^{-x}$,

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x} + 2\left(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx\right) = \int -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + C .$$

Заметим, что если в первоначальном интеграле положить $u = e^{-x},\ dv = x^2 dx$, то формула (12.6) приведет к интегралу $\int x^3 e^{-x} dx$, более сложному, чем первоначальный.

Пример 12.12. Найти $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$.

Положим $u = \operatorname{arctg} x,\ \ dv = x dx$. Тогда $du = (arctgx)'\, dx = \dfrac{1}{1+x^2} dx,\ \ v = \int dv = \int x\, dx = \dfrac{x^2}{2}$

и, используя формулу (12.6), получим $\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \dfrac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{x^2}{1+x^2} dx$.

Преобразуем подынтегральную функцию: $\dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{\left(x^2+1\right)-1}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$. Тогда

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Итак, окончательно, $\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \dfrac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \dfrac{x}{2} + C$.

Пример 12.13. Найти интеграл $\int \dfrac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx$.

Положим $u=\cos x,\quad dv=\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}dx=\dfrac{d(\sin x)}{\sin^3 x}$. Здесь такой выбор u и dv менее очевиден, чем в предыдущих примерах. В выражение для dv мы включили $\cos x$, чтобы получить $d(\sin x)$ и легко вычислить v: $v=\int dv=\int \dfrac{d(\sin x)}{\sin^3 x}=\dfrac{\sin^{-2} x}{-2}$. Тогда

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx=\frac{\cos x}{-2\sin^2 x}-\int \frac{-\sin x\,dx}{-2\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Пример 12.14. Найти интеграл $I=\int e^x\cos x\,dx$.

Положим $u=e^x,\quad dv=\cos x\,dx.$ Тогда $du=e^x dx,\quad v=\int dv=\int \cos x\,dx=\sin x$,

$$I=\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx. \qquad (12.7)$$

Еще раз применим метод интегрирования по частям, положив $u=e^x,\ dv=\sin x\,dx$.

Тогда $du=e^x dx,\quad v=\int dv=\int \sin x\,dx=-\cos x$,

$$\int e^x\sin x\,dx=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx=-e^x\cos x+I.$$

Подставляя полученное значение интеграла $\int e^x\sin x\,dx$ в равенство (12.7), получим: $I=e^x\sin x+e^x\cos x-I$ или $2I=e^x(\sin x+\cos x)$ и $I=\dfrac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$.

Здесь мы получили одну из первообразных. Чтобы записать множество первообразных, нужно добавить произвольное число C. Итак,

$$I=\int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C.$$

Мы рассмотрели основные методы интегрирования – метод подведения под знак дифференциала, метод интегрирования по частям, метод замены переменной. Но эти методы далеко не всегда облегчают отыскание интеграла. Далее мы рассмотрим некоторые классы функций, для интегрирования которых есть свои специальные приемы.

13. Интегрирование некоторых классов функций

13.1. Интегрирование тригонометрических функций

1. ***Случай 1***. $\int \sin^\alpha x\cdot\cos^\beta x\,dx$, где хотя бы одно из чисел α, β – ***положительное нечетное*** число. В этом случае следует отделить от нечетной степени $\sin x$ (или $\cos x$) одну степень и подвести ее под знак дифференциала.

Пример 13.1. Найти $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$.

Подынтегральная функция $\operatorname{ctg}^3 x=\dfrac{\cos^3 x}{\sin^3 x}$ содержит $\cos x$ в нечетной положительной степени. Поэтому отделим в числителе $\cos x$ и воспользуемся тем, что $\cos x\,dx=d(\sin x)$, а $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. Тогда

$$\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x\,dx}{\sin^3 x} = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x} d(\sin x) =$$

$$= \int \sin^{-3} x\,d(\sin x) - \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \frac{\sin^{-2} x}{-2} - \ln|\sin x| + C.$$

2. ***Случай 2.*** $\int \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x\,dx$,где α и β – ***четные неотрицательные*** числа. В этом случае следует понизить степень, используя формулы удвоения угла:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}. \qquad (13.1)$$

Пример 13.2. Найти $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$.

Подынтегральная функция содержит $\sin x$ и $\cos x$ в четной степени. Поэтому понизим степени, используя формулы (13.1):

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} dx = \int \frac{1-\cos 4x}{8} dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + C.$$

Пример 13.3. Найти $\int \cos^6 x\,dx$.

Подынтегральная функция содержит $\cos x$ в четной степени. Поэтому воспользуемся одной из формул (13.1) и формулой для куба суммы:

$$\cos^6 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x\right).$$

Тогда $\int \cos^6 x\,dx = \frac{1}{8}\left(\int dx + 3\int \cos 2x\,dx + 3\int \cos^2 2x\,dx + \int \cos^3 2x\,dx\right)$. При этом

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d(2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1,$$

$$\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 4x\,d(4x)\right) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} + C,$$

$$\int \cos^3 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos^2 2x \cdot \cos 2x\,d(2x) = \frac{1}{2}\int \left(1-\sin^2 2x\right) d(\sin 2x) = \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3}\right).$$

Итак, $\int \cos^6 x\,dx = \frac{1}{8}\left(x + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{6}\right) + C =$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x + 2\sin 2x + \frac{3}{8}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C.$$

3. Случай 3. $\int \frac{\sin^{\alpha} x}{\cos^{\beta} x} dx$, где α, β – целые неотрицательные числа.

Здесь единой рекомендации нет. Выделим следующие случаи.

а) $\beta - \alpha = 1 \Rightarrow$ при четном α применяется метод интегрирования по частям (см. пример 12.13); при нечетном α имеем случай 1);

б) $\beta-\alpha=2 \Rightarrow$ подынтегральное выражение выразить через $\mathrm{tg}x$ и $d(\mathrm{tg}x)$ или через $\mathrm{ctg}x$ и $d(\mathrm{ctg}\,x)$;

в) $\beta-\alpha>2 \Rightarrow$ увеличить степень числителя, умножив его на выражение $\sin^2 x+\cos^2 x$, равное единице;

г) $\beta-\alpha\le 0 \Rightarrow$ в числителе заменить $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$ или $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$.

Пример 13.4. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int \mathrm{tg}^2\, x\,d(\mathrm{tg}\,x)=\frac{\mathrm{tg}^3\, x}{3}+C$,

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x}dx=\int \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int \mathrm{ctg}^5\, x\,d(\mathrm{ctg}\,x)=-\frac{\mathrm{ctg}^6\, x}{6}+C.$$

Пример 13.5.

$$\int \frac{1}{\sin^3 x\cos^3 x}dx=\int \frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2}{\sin^3 x\cos^3 x}dx=\int \frac{\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}{\sin^3 x\cos^3 x}dx=$$

$$=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x}+2\int\frac{dx}{\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x}+\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=\int \mathrm{tg}\,x\,d\left(\mathrm{tg}\,x\right)+2\int\frac{d\left(\mathrm{tg}\,x\right)}{\mathrm{tg}\,x}-\int \mathrm{ctg}\,x\,d\left(\mathrm{ctg}\,x\right)=$$

$$=\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+2\ln\left|\mathrm{tg}\,x\right|-\frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2}+C.$$

Пример 13.6. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}dx=\int \frac{\sin^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos^4 x}dx=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx-\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=$

$$=\int \mathrm{tg}^2\, x\,d(\mathrm{tg}\,x)-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}-\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int dx=\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}-\mathrm{tg}\,x+x+C.$$

13.2. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интегралы следующих трех типов:

$$I_1=\int \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^k},\qquad I_2=\int \frac{(mx+n)\,dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^k},\qquad I_3=\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $k=1$ или $k=\frac{1}{2}$. Отметим, что интегралы 1-го и 2-го типа при $k=1$ возникают при интегрировании дробно-рациональных функций (п. 13.3).

Укажем общие рекомендации по отысканию интегралов этих трех типов.

В интеграле I_1 выделить из квадратного трехчлена полный квадрат.
В интеграле I_2 выделить в числителе производную квадратного трехчлена.
В интеграле I_3 вынести x из-под корня.

Пример 13.7.. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

Имеем интеграл первого типа при $k=\frac{1}{2}$. Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат: $x^2+2x+4=\left(x^2+2x+1\right)+3=\left(x+1\right)^2+3$.

Используя это равенство и формулу (13) п.11.3, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}=\int \frac{d\left(x+1\right)}{\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\ln\left|\left(x+1\right)+\sqrt{\left(x+1\right)^2+3}\right|+C.$$

Пример 13.8. Найти интеграл $I=\int \frac{\left(7x-1\right)dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

Имеем интеграл второго типа при $k=\frac{1}{2}$. Найдем производную квадратного трехчлена $\left(x^2+2x+4\right)'=2x+2$ и выделим ее в числителе следующим образом:

$$\left(7x-1\right)=\left(2x+2\right)\cdot\frac{7}{2}-7-1=\left(x^2+2x+4\right)'\cdot\frac{7}{2}-8.$$

Тогда $$I=\frac{7}{2}\int\frac{\left(x^2+2x+4\right)'dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}-8\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}.$$

Второй интеграл в этой сумме был найден в примере 13.7:

$$I_2=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}=\ln\left|\left(x+1\right)+\sqrt{\left(x+1\right)^2+3}\right|+C_2.$$

В первом интеграле воспользуемся тем, что

$$I_1=\int\frac{u'\left(x\right)dx}{\sqrt{u\left(x\right)}}=\int\frac{du\left(x\right)}{\sqrt{u\left(x\right)}}=\int u^{-1/2}du=\frac{u^{1/2}}{1/2}+C_1=2\sqrt{u}+C_1.$$

Обозначив $C=C_1+C_2$, окончательно получим:

$$I=\frac{7}{2}I_1-8I_2=7\sqrt{x^2+2x+4}-8\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right|+C.$$

Пример 13.9. Найти интеграл $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{7x^2+6x-1}}$.

Имеем интеграл третьего типа. Вынесем x из-под корня:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{7x^2+6x-1}}=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}}.$$

Воспользуемся тем, что $\frac{dx}{x^2}=x^{-2}dx=\frac{d\left(x^{-1}\right)}{-1}=-d\left(\frac{1}{x}\right)=-d\left(\frac{1}{x}-3\right)$,

$$\sqrt{7+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}+9\right)+9+7}=\sqrt{16-\left(\frac{1}{x}-3\right)^2}.$$

Используя эти равенства и формулу (12) п.11.3, получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{7x^2+6x-1}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}-3\right)}{\sqrt{16-\left(\frac{1}{x}-3\right)^2}} = -\arcsin\frac{\frac{1}{x}-3}{4} + C = -\arcsin\frac{1-3x}{4x} + C.$$

13.3. Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной функцией или рациональной дробью $R(x)$ называют отношение двух многочленов: $R(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$, $(a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0)$.

Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, т.е. $n < m$, то рациональная дробь называется правильной. В противном случае рациональная дробь называется неправильной.

Интегрирование дробно-рациональной функции проводится в несколько этапов. Сначала мы перечислим эти этапы, а потом подробно поясним каждый из них на примере. Итак, для интегрирования дробно-рациональной функции $R(x)$ следует:

1) если рациональная дробь неправильная, то выделить из нее целую часть и правильную рациональную дробь $R_0(x)$: $R_0(x) = \dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ $(k < m)$;

2) знаменатель дроби $Q_m(x)$ разложить на линейные множители $(x-a)^\alpha$, $(x-b)^\beta$, и квадратные множители $\left(x^2+px+q\right)^\lambda$, … с действительными коэффициентами;

3) правильную рациональную дробь разложить методом неопределенных коэффициентов на простейшие дроби

$$R_0(x) = \frac{P_k(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x^2+px+q)^\lambda} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} +$$

$$+\frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \ldots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{C_\lambda x+D_\lambda}{\left(x^2+px+q\right)^\lambda};$$

4) найти неопределенные (неизвестные пока) коэффициенты

$$A_1,\ldots,A_\alpha,\ B_1,\ldots B_\beta,\ C_1,D_1,\ldots,C_\lambda,D_\lambda;$$

5) найти интегралы от целой части и простейших дробей.

Поясним все сказанное на примерах.

Пример 13.10. Найти интеграл $\int \dfrac{x^4+1}{x^3-x^2}dx$.

Подынтегральная функция есть неправильная рациональная дробь, так как степень многочлена в числителе больше степени многочлена в знаменателе. Поэто-

му выделим из неправильной дроби ее целую часть, поделив числитель на знаменатель. В результате деления получим

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2}=x+1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2}. \qquad (13.2)$$

Теперь знаменатель получившейся правильной дроби разложим на множители $x^3-x^2=x^2(x-1)$, а саму правильную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}. \qquad (13.3)$$

Умножив это равенство на $x^2(x-1)$, получим:

$$x^2+1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2. \qquad (13.4)$$

Подставив в это равенство значения $x=0$ и x=1, получим $B=-1,\ C=2.$

Для отыскания коэффициента A можно либо в равенстве (13.4) подставить еще одно частное значение x, либо в правой и левой частях равенства (13.4) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x, например, при x^2: $1=A+C$.

Тогда $A=1-C=-1.$ Подставляя найденные $A=-1,\ B=-1,\ C=2$ в равенство (13.3) и используя равенство (13.2), окончательно получим

$$\int\frac{x^4+1}{x^3-x^2}dx=\int\left(x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx=\frac{x^2}{2}+x-\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|+C.$$

Пример 13.11. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x\left(x^7+2\right)}$.

Здесь разложение знаменателя на линейные и квадратичные множители и разложение дроби на простейшие требуют громоздких выкладок. Значительно проще вынести из скобки x^7: $\int\frac{dx}{x\left(x^7+2\right)}=\int\frac{dx}{x^8\left(1+2x^{-7}\right)}$

и воспользоваться тем, что $\frac{dx}{x^8}=x^{-8}dx=\frac{dx^{-7}}{-7}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d\left(2x^{-7}\right)}{-7}=-\frac{1}{14}d\left(1+2x^{-7}\right).$

Тогда $\int\frac{dx}{x\left(x^7+2\right)}=-\frac{1}{14}\int\frac{d\left(1+2x^{-7}\right)}{1+2x^{-7}}=-\frac{1}{14}\ln\left|1+2x^{-7}\right|+C.$

Пример13.12. Найти интеграл $\int\frac{x^3dx}{x^8+2x^4-3}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, разложение знаменателя на линейные и квадратичные множители и разложение дроби на простейшие требуют громоздких выкладок. Удобнее воспользоваться тем, что $x^3dx=\frac{dx^4}{4}$. Тогда

$$\int\frac{x^3dx}{x^8+2x^4-3}=\frac{1}{4}\int\frac{dx^4}{\left(\left(x^4\right)^2+2x^4+1\right)-4}=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x^4+1\right)}{\left(x^4+1\right)^2-4}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\left(x^4+1\right)-2}{\left(x^4+1\right)+2}\right|+C=\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^4-1}{x^4+3}\right|+C.$$

13.4. Интегрирование по справочникам

Для отыскания неопределенных интегралов издаются обширные справочники (см. [5], [6]). При пользовании такими справочниками надо внимательно познакомиться с принципами, по которым в них группируются интегралы. Для успешного использования справочников надо знать свойства неопределенных интегралов и основные методы интегрирования, так как многих интегралов в справочниках нет, но их легко можно привести к табличным интегралам с помощью некоторых преобразований.

Например, интеграл $\int x^2\sqrt{x^2+x+1}\,dx$ отсутствует в справочниках. Прежде чем использовать справочники, надо выделить из квадратного трехчлена полный квадрат $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ и сделать замену переменной $x+\frac{1}{2}=t$, $dx=dt$.

Тогда $\int x^2\sqrt{x^2+x+1}\,dx=\int x^2\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx=\int\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\,dt=$

$$=\int t^2\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\,dt-\int t\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\,dt+\frac{1}{4}\int\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\,dt.$$

Каждый из трех получившихся интегралов есть в справочниках. После их отыскания надо подставить $t=x+\frac{1}{2}$.

13.5. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

Мы рассмотрели классы элементарных функций, интегралы от которых выражаются через элементарные функции.

На практике часто встречаются и такие элементарные функции, интегралы от которых нельзя выразить через элементарные функции.

Отметим ряд интегралов, не выражающихся через элементарные функции, но имеющих большое прикладное значение:

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \sin x^2dx,\ \int \cos x^2dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{\cos x}{x}dx,\ \int \frac{dx}{\ln x}.$$

С некоторыми из этих интегралов вы позднее встретитесь, например с первым интегралом – в теории вероятностей, со вторым и третьим интегралами – в физике.

Глава 4. Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла возникло в связи с вычислением площадей и объемов фигур. К нему приводят и многие физические задачи, например, отыскание массы и центра тяжести неоднородного стержня.

14. Понятие определенного интеграла и его свойства

В школьном курсе математики определенный интеграл был введен с помощью первообразной. Мы рассмотрим другой подход − через интегральные

суммы. Этот подход является более общим; с его помощью вводятся и другие типы интегралов − двойные, тройные, криволинейные, поверхностные.

Рассмотрим одну из задач, приводящую к понятию определенного интеграла.

14.1. Задача о массе стержня

Рассмотрим тонкий стержень, поперечными размерами которого можно пренебречь. Стержень мысленно представим в виде отрезка $[a,b]$ на оси Ox. Пусть известна плотность распределения массы $\gamma(x)$ в каждой точке x стержня и функция $\gamma(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Для вычисления массы стержня разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей (ячеек) с длинами $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ (рис.36). В этих ячейках выберем произвольно точки $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$. В силу непрерывности функции $\gamma(x)$ и малости каждой ячейки плотность в точках ячейки можно приближенно считать постоянной, равной плотности в выбранной точке. Тогда масса ячейки приближенно равна произведению плотности на длину ячейки. Обозначив массы ячеек $\Delta m_1, \Delta m_2, ..., \Delta m_n$, получим:

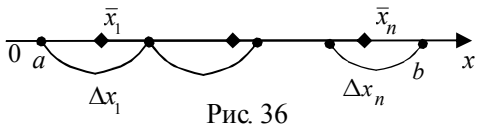


Рис. 36

$$\Delta m_1 \approx \gamma(\bar{x}_1)\cdot\Delta x_1, \quad \Delta m_2 \approx \gamma(\bar{x}_2)\cdot\Delta x_2, ..., \quad \Delta m_n \approx \gamma(\bar{x}_n)\cdot\Delta x .$$

Суммируя массы всех ячеек, получим приближенное значение массы m стержня

$$m \approx \gamma(\bar{x}_1)\cdot\Delta x_1 + \gamma(\bar{x}_2)\cdot\Delta x_2 + ... + \gamma(\bar{x}_n)\cdot\Delta x_n .$$

Для краткой записи такой суммы используют специальный символ, рядом с ним записывают произвольное k-е слагаемое $\gamma(\bar{x}_k)\cdot\Delta x_k$ и указывают, что k меняется от 1 до n. Итак, $m \approx \sum_{k=1}^{n} \gamma(\bar{x}_k)\cdot\Delta x_k$. Это приближенное равенство будет тем точнее, чем меньше длины всех ячеек (или максимальная из длин ячеек, обозначим ее d). Точное значение массы стержня определяется как предел этой суммы при d стремящемся к нулю:

$$m = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} \gamma(\bar{x}_k)\cdot\Delta x_k \quad . \tag{14.1}$$

Этот предел обозначается $\int_a^b \gamma(x)\,dx$ и называется определенным интегралом от функции $\gamma(x)$ по отрезку $[a,b]$.

К пределам такого типа приводят и другие задачи, например, о площади плоской фигуры или о работе переменной силы по прямолинейному перемещению. Абстрагируясь от конкретных задач, дадим общее понятие определенного интеграла.

14.2. Понятие определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $f(x)$. Так же, как и в задаче о массе стержня, разобьем отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n ячеек с длинами

$\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$. В этих ячейках выберем произвольно точки $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$ (см. рис.36). Составим сумму $\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k$. Эта сумма называется интегральной суммой функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$. Найдем предел интегральной суммы при стремлении к нулю максимальной из длин d ячеек.

Определение. Если существует предел интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k$ при $d \to 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и от выбора промежуточных точек $\bar{x}_k$, то этот предел называется определенным интегралом функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)\,d\,x.$

Таким образом,
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k} \,. \qquad (14.2)$$

При введении определенного интеграла мы предполагали, что $a < b$. При $a > b$ полагают $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. При $a = b$ полагают $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Функция $f(x)$, для которой на отрезке $[a,b]$ существует определенный интеграл, называется интегрируемой на этом отрезке. Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, отрезок $[a,b]$ − промежутком интегрирования, x − переменной интегрирования.

Пример 14.1. Показать, что $\int_a^b dx = b - a$.

Решение. Воспользуемся определением интеграла для функции $f(x) = 1$ и тем, что сумма длин ячеек равна длине всего промежутка интегрирования. Тогда
$$\int_a^b dx = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k) \cdot \Delta x_k = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \lim_{d \to 0} (b - a) = b - a \,.$$

14.3. Свойства определенного интеграла

Установим, исходя из определения, некоторые свойства определенного интеграла. Будем при этом предполагать, что все рассматриваемые ниже интегралы существуют.

Свойство 1. Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, то есть
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt} \,. \qquad (14.3)$$

Действительно, от обозначения переменной значения функции, а значит, и интегральной суммы и интеграла не изменится.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, то есть

$$\boxed{\int_a^b \lambda\, f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx}\,. \qquad (14.4)$$

Действительно, для любого разбиения отрезка $[a,b]$ на ячейки и любого выбора промежуточных точек $\overline{x}_k$ имеем:

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} \lambda \cdot f(\overline{x}_k)\cdot \Delta x_k = \lim_{d\to 0} \lambda \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k = \lambda \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k = \lambda \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Свойство 3. Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от слагаемых, то есть

$$\boxed{\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}\,. \qquad (14.5)$$

Вывод этого свойства аналогичен предыдущему. Заметим, что свойство 3 справедливо для любого конечного числа слагаемых.

Свойство 4. Для любого расположения точек *a, b, c*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}\,. \qquad (14.6)$$

Проверять это свойство не будем.

Свойство 5 (об интегрировании неравенств). Если $f(x) \ge g(x)$ на $[a,b]$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx.} \qquad (14.7)$$

Действительно, так как $f(x) \ge g(x)$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k \ge \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(\overline{x}_k)\,\Delta x_k = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Свойство 6 (об оценке интеграла). Если $m \le f(x) \le M$ на отрезке $[a,b]$, то

$$\boxed{m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a)}\,. \qquad (14.8)$$

Оценка интеграла следует из свойства 5 и того факта, что $\int_a^b dx = b-a$.

Действительно, так как $f(x) \ge m$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b m\,dx = m\int_a^b dx = m\,(b-a).$

Аналогично, так как $f(x) \le M$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b M\,dx = M\int\limits_a^b dx = M\,(b-a)$.

Свойство 7 (об оценке модуля интеграла).

$$\boxed{\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx} \quad (a \le b). \tag{14.9}$$

Оценка модуля интеграла следует из свойств модуля: $-\left|f(x)\right| \le f(x) \le \left|f(x)\right|$.

Тогда из свойства 5 следует, что $-\int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx$,

и, следовательно, $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx.$

Пример 14.2. Оценить интеграл $\int\limits_{10}^{16} \frac{\sin x}{1+x^8}dx.$

Решение. Так как $\left|\sin x\right| \le 1$, а $1+x^8 > x^8$ и $x > 10$, то

$$\left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right| = \frac{\left|\sin x\right|}{1+x^8} \le \frac{1}{1+x^8} < \frac{1}{x^8} < \frac{1}{10^8}.$$

Тогда, используя соотношение (1.9), получим

$$\left|\int\limits_{10}^{16} \frac{\sin x}{1+x^8}dx\right| \le \int\limits_{10}^{16} \left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right|dx \le \frac{1}{10^8}(16-10) < \frac{1}{10^7}.$$

Свойство 8 (теорема о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдется точка c такая, что

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)}\,. \tag{14.10}$$

Выведем эту формулу. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего m и наибольшего M значений. Поэтому $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$. Тогда из соотношения (14.8) следует:

$$m\,(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a).$$

Разделим это неравенство на положительное число $b-a$:

$$m \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \le M\,. \tag{14.11}$$

Рассмотрим число μ, равное $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Из равенства (14.11) следует, что $m \le \mu \le M$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она принимает на этом отрезке все промежуточные значения между m и M. В частности, функ-

ция $f(x)$ принимает промежуточное значение μ в некоторой точке c отрезка $[a,b]$, то есть $f(c)=\mu$. Отсюда $f(c)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Замечание. Значение $f(c)$ из теоремы о среднем называют средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначают $f_{\text{ср}}$. Таким образом,

$$\boxed{f_{cp}=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx}\,. \qquad (14.12)$$

Понятие среднего значения функции на отрезке является обобщением среднеарифметического значения на случай непрерывной величины. Именно так определяется в технике среднее значение давления пара, среднее значение мощности переменного электрического тока и т. п.

14.4. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Каждому x из отрезка $[a,b]$ соответствует определенное число − значение этого интеграла, то есть интеграл является функцией от x, определенной на $[a,b]$. Обозначим эту функцию $\Phi(x)$. Итак,

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt=\Phi(x). \qquad (14.13)$$

Теорема. Пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда производная определенного интеграла от этой функции по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на верхнем пределе, то есть

$$\boxed{\Phi'(x)=\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'_x=f(x)}\,. \qquad (14.14)$$

Доказательство. Для вычисления производной функции $\Phi(x)$ придадим x приращение Δx и вычислим приращение функции $\Phi(x)$, воспользовавшись равенством (14.13) и свойством 4:

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int\limits_a^x f(t)\,dt=$$

$$=\left[\int\limits_a^x f(t)\,dt+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right]-\int\limits_a^x f(t)\,dt=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

К полученному интегралу применим теорему о среднем:

$$\Delta\Phi(x)=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=f(\bar{x})\cdot\Delta x,$$

где $\bar{x}$ заключено между x и $x+\Delta x$ (рис. 37). Тогда

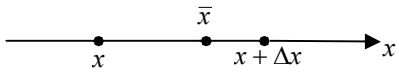


Рис. 37

$$\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\frac{f(\overline{x})\Delta x}{\Delta x}=f(\overline{x}).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta x\to 0$ и воспользуемся непрерывностью функции $f(x)$ и тем, что $\overline{x}\to x$ при $\Delta x\to 0$ (рис. 37). Тогда

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\overline{x})=\lim_{\overline{x}\to x}f(\overline{x})=f(x).$$

15. Вычисление определенного интеграла

15.1. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ − одна из ее первообразных на этом отрезке. Функция $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ также является первообразной для функции $f(x)$ на $[a,b]$, так как $\Phi'(x)=f(x)$ в силу равенства (14.14). Две первообразные функции $f(x)$ отличаются на константу, то есть $\Phi(x)=F(x)+C$ для $x\in[a,b]$ или

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)+C. \qquad (15.1)$$

В частности, при $x=a$ равенство (15.1) примет вид:

$$\int_a^a f(t)\,d\,t=F(a)+C. \qquad (15.2)$$

Вычтем из равенства (15.1) равенство (15.2) и учтем, что $\int_a^a f(t)dt=0$. Тогда

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a),\quad x\in[a,b].$$

При $x=b$ это равенство примет вид

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)\ . \qquad (15.3)$$

Полученная формула называется формулой Ньютона-Лейбница. В ней $f(t)$ − функция, непрерывная на $[a,b]$, $F(t)$ − любая ее первообразная.

Разность $F(b)-F(a)$ принято условно записывать в следующем виде:

$$F(b)-F(a)=F(t)\Big|_a^b,\quad \text{или}\quad F(b)-F(a)=\left[F(t)\right]\Big|_a^b.$$

Тогда формула (15.3) примет вид $\int_a^b f(t)\,dt=F(t)\big|_a^b=F(b)-F(a)$, или:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)}. \qquad (15.4)$$

Если вместо произвольной первообразной *F(x)* записать неопределенный интеграл, то формула Ньютона-Лейбница примет вид

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]\Bigg|_a^b}\,. \qquad (15.5)$$

Формула (15.5) дает простой и удобный метод вычисления определенного интеграла от непрерывной функции через неопределенный интеграл.

Пример 15.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$.

Решение. По формуле (15.5) имеем:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 15.2. Вычислить $\int\limits_0^3 f(x)\,dx$ для функции $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \le x \le 1, \\ 3-x, & 1 < x \le 3. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся сначала свойством 4 определенного интеграла, а затем формулой (15.5). Тогда

$$\int\limits_0^3 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^3 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 e^x dx + \int\limits_1^3 (3-x)\,dx = e^x\Big|_0^1 - \frac{(3-x)^2}{2}\Bigg|_1^3 = (e-1) - (0-2) = e+1\,.$$

Пример 15.3. Вычислить среднее значение функции $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ на отрезке $[1, e]$.

Решение. Среднее значение функции $f_{cp.}$ вычисляется по формуле (14.12):

$$f_{cp} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{e-1}\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница (15.5) и тем, что $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$. Тогда

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int\limits_1^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x)\Big|_1^e = \arcsin(\ln e) - \arcsin(\ln 1) = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$f_{cp} = \frac{\pi}{2(e-1)}.$$

15.2. Интегрирование по частям

Пусть $u(x)$, $v(x)$ − дифференцируемые функции. Для неопределенного интеграла была получена формула интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.$$

Воспользуемся этой формулой и формулой (2.5) Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b u\,dv = \left[\int u\,dv\right]\Bigg|_a^b = \left[uv - \int v\,du\right]\Bigg|_a^b = [uv]\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du\,.$$

Мы получили формулу интегрирования по частям для определенного интеграла

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}. \qquad (15.6)$$

Рекомендации по применению этой формулы такие же, как для неопределенного интеграла.

Пример 15.4. Вычислить $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

Решение. Положим $u = \ln x,\ dv = x\,dx$. Тогда $du = (\ln x)'\,dx = \frac{1}{x}dx,\ v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$.
Используя формулу (15.6), получим:

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \left[2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Пример 15.5. Вычислить $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$.

Решение. Положим $u = x,\ dv = \cos x\,dx$. Тогда $du = dx,\ \ v = \int \cos x\,dx = \sin x$. Используя формулу (15.6), получим:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

15.3. Интегрирование заменой переменной

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$. Сделаем замену переменной, положив $x = \varphi(t)$. При этом будем предполагать, что выполняются следующие условия:

1) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha,\beta]$ является отрезок $[a,b]$;
2) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$;
3) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$.

Тогда имеет место следующая ***формула замены переменной*** в определенном интеграле

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt}. \qquad (15.7)$$

Таким образом, при замене переменной в определенном интеграле следует:

1) заменить переменную x на удачно подобранную функцию $\varphi(t)$;
2) заменить dx на $d\varphi(t) = \varphi'(t)\,d\,t$;
3) заменить отрезок $[a,b]$ изменения переменной x на отрезок $[\alpha,\beta]$ изменения переменной t, найдя α и β из условий $\varphi(\alpha) = a,\ \ \varphi(\beta) = b$;
4) вычислить получившийся определенный интеграл.

Отметим, что при вычислении определенного интеграла по формуле (15.7) не надо возвращаться к старой переменной, как это приходилось делать при замене переменной в неопределенном интеграле. Рекомендации по выбору новой переменной такие же, как и для неопределенного интеграла.

Пример 15.6. Вычислить интеграл $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,d\,x$.

Решение. Введем новую переменную t, положив $\sqrt{x}=t$. Тогда $x=t^2$, $dx=2\,t\,d\,t$. Найдем пределы изменения новой переменной $t=\sqrt{x}$: при $x=4$ имеем $t=2$; при $x=9$ имеем $t=3$. Поэтому, в соответствие с формулой (15.7)

$$\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx=\int\limits_2^3 \frac{t\cdot 2\,t\,d\,t}{t-1}=2\int\limits_2^3 \frac{(t^2-1)+1}{t-1}\,d\,t=2\int\limits_2^3\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)d\,t=2\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln\left(t-1\right)\right)\Bigg|_2^3=7+2\ln 2.$$

Пример 15.7. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. Чтобы исчез корень под знаком интеграла, положим $x=2\sin t$. Тогда $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\cos t$. Найдем $dx=2\cos t\,dt$ и пределы изменения новой переменной: при $x=0$ имеем $\sin t=0$, $t=0$; при $x=1$ имеем $\sin t=\frac{1}{2}$, $t=\pi/6$.

Тогда $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1+\cos 2\,t\right)dt=2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

С помощью замены переменной выведем ряд полезных следствий.

Следствие 1. Если функция $f\left(x\right)$ − нечетная на отрезке $\left[-a,a\right]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

Действительно, имеем: $I=\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx=I_1+I_2$.

В интеграле I_1 сделаем замену переменной $x=-t$. Тогда $dx=-dt$; в силу нечетности функции, $f\left(x\right)=f\left(-t\right)=-f\left(t\right)$. При $x=-a$ имеем $t=a$; при $x=0$ имеем $t=0$. Поэтому

$$I_1=\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt=-\int\limits_{0}^{a} f(t)\,dt=-I_2,\qquad I=I_1+I_2=0.$$

Следствие 2. Если функция $f\left(x\right)$ − четная на $\left[-a,a\right]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Эта формула выводится так же, как предыдущая.

Пример 15.8. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^7-3x^5+2x^3-x+4}{\cos^2 x}\,dx$.

Решение. Функция $\dfrac{x^7-3x^5+2x^3-x}{\cos^2 x}$ является нечетной, так как числитель есть функция нечетная, а знаменатель – функция четная. Поэтому интеграл от этой функции по симметричному промежутку равен нулю. Функция $\dfrac{4}{\cos^2 x}$ является четной, поэтому $I=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\dfrac{4\,dx}{\cos^2 x}=2\int\limits_{0}^{\pi/4}\dfrac{4\,dx}{\cos^2 x}=8\,\mathrm{tg}\,x\Big|_0^{\pi/4}=8$.

> ***Следствие 3.*** Пусть функция $f(x)$ имеет период *T*. Тогда
> $$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx=\int\limits_0^T f(x)\,dx \quad \text{для любого числа } a.$$

Для вывода этой формулы воспользуемся свойством 4 определенного интеграла

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx=\int\limits_a^0 f(x)\,dx+\int\limits_0^T f(x)\,dx+\int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx.$$

В последнем интеграле сделаем замену $x=y+T$. Тогда $dx=dy$, а в силу периодичности функции $f(x)=f(y+T)=f(y)$. При $x=T$ имеем $y=0$; при $x=a+T$ имеем $y=a$. Поэтому $\int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx=\int\limits_0^a f(y)\,dy=\int\limits_0^a f(x)\,dx=-\int\limits_a^0 f(x)\,dx$,

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx=\int\limits_a^0 f(x)\,dx+\int\limits_0^T f(x)\,dx-\int\limits_a^0 f(x)\,dx=\int\limits_0^T f(x)\,dx.$$

Пример 15.9. Вычислить $\int_0^{2\pi}\sin^5 x\,dx$.

Решение. Функция $\sin^5 x$ имеет период 2π, равный длине промежутка интегрирования. Используя следствие 3, сдвинем промежуток интегрирования вдоль оси OX на $-\pi$ и, так как функция $\sin^5 x$ − нечетная, воспользуемся следствием 1.

Поэтому $\int\limits_0^{2\pi}\sin^5 x\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^5 x\,dx=0$.

16. Геометрические приложения определенного интеграла

16.1. Площадь плоской фигуры

Пусть фигура в плоскости *XOY* ограничена линиями $y=y(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$, причем $y(x)$ − непрерывная неотрицательная функция на $[a,b]$ (рис.37).

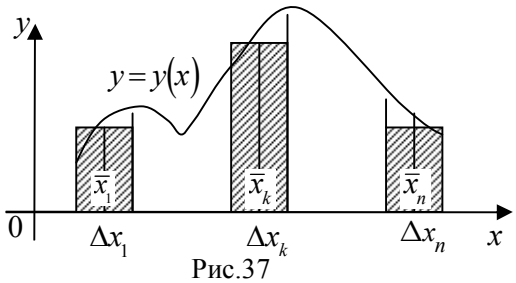


Рис.37

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частичных отрезков с длинами $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$. Через точки деления проведем вертикальные прямые, которые разделят фигуру на n вертикальных полосок. Каждую k-ю вертикальную полоску заменим прямоугольником площади ΔS_k с основанием, равным Δx_k, и высотой, равной $y(\overline{x}_k)$, где $\overline{x}_k$ − произвольно выбранная точка на k-м частичном отрезке. Тогда

$$\Delta S_k = y(\overline{x}_k)\cdot \Delta x_k \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

Суммируя площади всех прямоугольников, получим $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum\limits_{k=1}^{n} y(\overline{x}_k)\cdot \Delta x_k.$

Площадь S заданной фигуры определяется как предел полученной суммы $S = \lim\limits_{d\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} y(\overline{x}_k)\cdot \Delta x_k.$ при стремлении к нулю $d = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$. Мы получили предел интегральной суммы непрерывной функции $y(x)$ по отрезку $[a,b]$, то есть интеграл $\int\limits_a^b y(x)\,dx$. Таким образом, площадь фигуры, ограниченной линиями $y = y(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$, при условии, что $y(x) \ge 0$, вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int\limits_a^b y(x)\,dx \quad \text{или} \quad S = \int\limits_a^b y\,dx\,.} \qquad (16.1)$$

Пример 16.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$

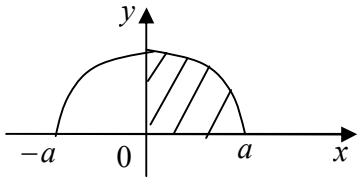


Рис. 38

Решение. Интеграл такого типа был вычислен заменой переменной $x = a\cdot \sin t$ в примере 15.7. Рассмотрим другой способ. Исходя из формулы (16.1), интеграл $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ численно равен площади фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0,\ x = 0$, $x = a$. Построим эти линии, учитывая, что уравнение $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ определяет ту часть окружности $x^2 + y^2 = a^2$, где $y \ge 0$ (рис. 38). Полученная фигура есть четверть круга с площадью $S = \dfrac{\pi\cdot a^2}{4}$. Таким образом,

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi\cdot a^2}{4}.$$

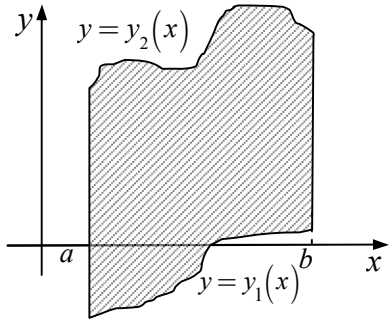


Рис.39

Перейдем к более общему случаю. Пусть фигура в плоскости XOY ограничена линиями $y = y_1(x),\ y = y_2(x),\ x = a,\ x = b,$ причем $y_2(x) \ge y_1(x)$ на $[a,b]$ (рис.39). Аналогичным образом, как и в предыдущем случае, можно получить следующую формулу для площади S такой фигуры:

$$\boxed{S = \int\limits_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\,dx.} \qquad (16.2)$$

Иногда вычисления значительно упрощаются, если поменять ролями оси OX и OY. Пусть фигура в плоскости XOY ограничена линиями $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y = c$, $y = d$, причем $x_2(y) \ge x_1(y)$ на отрезке $[c, d]$ (рис.40). Тогда

$$\boxed{S = \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)]\,dy.} \qquad (16.3)$$

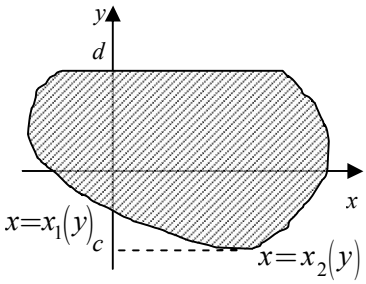


Рис.40

Пример 16.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = -1$.

Решение. Построим заданные линии и заштрихуем фигуру, ограниченную этими линиями (рис. 41). Снизу фигура ограничена линией $y = e^x = y_1(x)$, сверху – линией $y = e^{-x} = y_2(x)$, $x \in [-1, 0]$. Для вычисления площади фигуры воспользуемся формулой (16.2):

$$S = \int_{-1}^{0} [y_2(x) - y_1(x)]\,dx = \int_{-1}^{0} (e^{-x} - e^x)\,dx = (-e^{-x} - e^x)\Big|_{-1}^{0} = e + e^{-1} - 2.$$

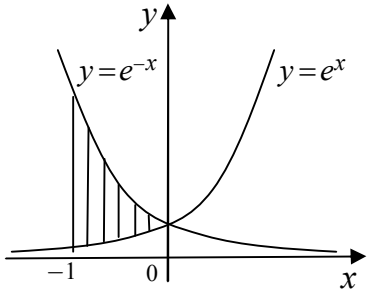


Рис.41

Пример 16.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1$, $y = x - 1$.

Решение. Уравнение $y^2 = 2x + 1$ или $y^2 = 2(x + 1/2)$ определяет параболу с вершиной $A(-1/2, 0)$, осью симметрии − осью OX (рис. 42). Уравнение $y = x - 1$ определяет прямую, проходящую через точки $(0, -1)$, $(1, 0)$. Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений: $y^2 = 2x + 1$, $y = x - 1$. Получим точку $B(0, -1)$ и точку $C(4, 3)$.

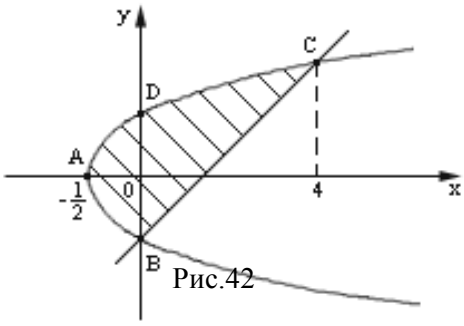


Рис.42

Вычислим площадь фигуры по формуле (16.3). Для этого нужно записать уравнения кривых, ограничивающих фигуру, в виде, разрешенном относительно *x*. Слева фигура ограничена дугой параболы *CAB,* на которой $x = \dfrac{y^2 - 1}{2}$, справа – отрезком прямой *BC*, на котором $x = y + 1$; y меняется от $y_B = -1$ до $y_C = 3$. Поэтому по формуле (16.3) имеем

$$S = \int_{-1}^{3} \left[(y + 1) - \frac{y^2 - 1}{2} \right] dy = \frac{(y+1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} - y \right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{16}{3} \approx 5{,}33.$$

16.2. Объем тела вращения

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной непрерывной кривой $y = y(x)$, осью OX и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 43). Разобьем отрезок $[a, b]$ на *n* частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$ Проведем через точки деления плоскости, перпендикулярные оси OX. Сечение тела вра-

щения плоскостью $x = x_k$ есть круг радиусом $y(x_k)$ с площадью $\pi \cdot y^2(x_k)$ $(k = 1, 2, ..n)$. Проведенные плоскости разобьют тело на слои. Каждый k-й слой

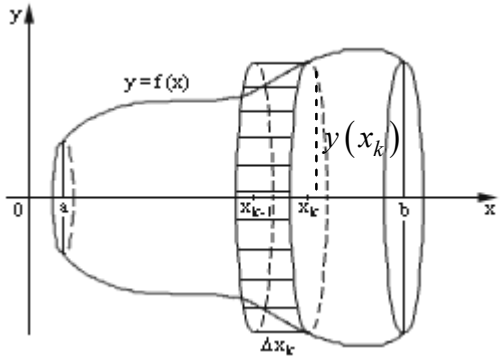


Рис.43

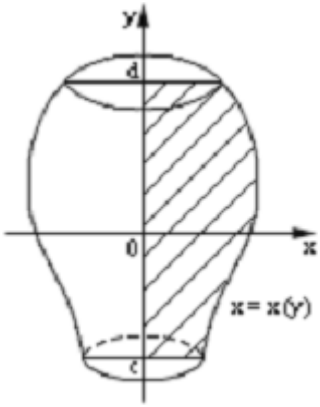


Рис.44

приближенно заменим прямым цилиндром (рис.43) с радиусом $y(x_k)$, высотой $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и объемом $\Delta V_k = S \cdot h = \pi \cdot y^2(x_k) \cdot \Delta x_k$ $(k = 1, 2, ..n)$.

Сумма объемов всех цилиндров равна $\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot y^2(x_k) \cdot \Delta x_k$.

Объем тела вращения V_{ox} определяется как предел этой суммы

$$V_{OX} = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot y^2(x_k) \cdot \Delta x_k.$$

при стремлении к нулю величины $d = \max_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\}$. Мы получили предел интегральной суммы непрерывной функции $\pi \cdot y^2(x)$ по отрезку $[a, b]$, который существует и равен интегралу $\int_a^b \pi \cdot y^2(x)\, dx.$

Итак, объем V_{OX} тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривой $y = y(x)$, осью OX и прямыми $x = a,\ x = b$, вычисляется по формуле

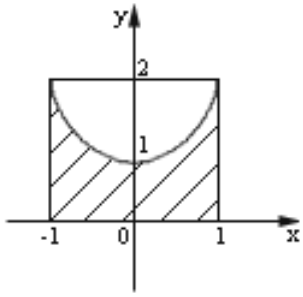
$$\boxed{V_{OX} = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx, \quad \text{или} \quad V_{OX} = \pi \int_a^b y^2 dx}. \qquad (16.4)$$

Аналогично вычисляется объем V_{OY} тела, полученного при вращении вокруг оси OY фигуры, ограниченной линией $x = x(y)$, осью OY, прямыми $y = c,\ y = d$ (рис. 44):

$$\boxed{V_{OY} = \pi \int_c^d x^2(y)\, dy, \quad \text{или} \quad V_{OY} = \pi \int_c^d x^2 dy}. \qquad (16.5)$$

Пример 16.4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1,\ x = -1,\ x = 1,\ y = 0$,
а) вокруг оси OX, *б)* вокруг оси OY.

Решение. Построим параболу $y = x^2 + 1$, прямые $x = -1,\ x = 1,\ y = 0$ и заштрихуем фигуру, ограниченную этими линиями (рис.45).



Объем тела, полученного при вращении этой фигуры вокруг оси OX, вычислим по формуле (16.4):

Рис.45

$$V_{OX} = \pi \int_{-1}^{1} y^2\, dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^2+1)^2\, dx.$$

Так как подынтегральная функция − четная, то удобно воспользоваться следствием 2 (п. 15.3)

$$V_{OX} = 2\pi \int_{0}^{1} (x^2+1)^2 dx = 2\pi \int_{0}^{1} (x^4+2x^2+1)\, dx = \frac{56}{15}\pi.$$

Для вычисления объема тела вращения фигуры вокруг оси OY нельзя непосредственно воспользоваться формулой (16.5), так как фигура сверху ограничена не прямой, а параболой. Поэтому сначала рассмотрим фигуру, ограниченную прямой $x=1$, осью OY, прямыми $y=0,\ y=2$. При ее вращении вокруг оси OY получим цилиндр, объем которого V_1 можно вычислить по формуле $V_1 = \pi R^2 H = 2\pi$ или по формуле (16.5)

$$V_1 = \pi \int_{0}^{2} x^2\, dy = \pi \int_{0}^{2} dy = 2\pi.$$

Теперь рассмотрим фигуру, ограниченную линиями $y = x^2+1$, осью OY и прямой $y=2$. При ее вращении вокруг оси OY получим тело, объем которого V_2 вычислим по формуле (16.5)

$$V_2 = \pi \int_{1}^{2} x^2 dy = \pi \int_{1}^{2} (y-1)\, dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - y\right)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда искомый объем V_{OY} будет равен разности $V_1 - V_2$:

$$V_{OY} = V_1 - V_2 = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

17. Несобственные интегралы

При введении определенного интеграла мы предполагали, что отрезок $[a,b]$ – конечный, а функция $f(x)$ ограничена на этом отрезке. Если нарушается хотя бы одно из этих условий, то вводят обобщение определенного интеграла – несобственные интегралы.

17.1. Несобственный интеграл первого рода (по бесконечному промежутку)

Несобственный интеграл первого рода (по бесконечному промежутку) определяется следующим образом:

$$\boxed{\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx}. \qquad (17.1)$$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится. Если же этот предел не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл и для промежутка $(-\infty, b]$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx}. \qquad (17.2)$$

Для промежутка $(-\infty, +\infty)$, несобственный интеграл определяется равенством

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx}, \qquad (4.3)$$

где c – любое число. Несобственный интеграл в левой части называется сходящимся, если сходится каждый несобственный интеграл в правой части.

Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $[a, \infty)$. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница для интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Тогда

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}[F(b)-F(a)] = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a).$$

Если обозначить $F(+\infty) = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$, то можно записать

$$\boxed{\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{+\infty}}. \qquad (17.4)$$

Аналогично, если обозначить $F(-\infty) = \lim\limits_{b\to-\infty} F(b)$, то

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b}}, \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}. \qquad (17.5)$$

Пример 17.1. Вычислить несобственные интегралы или доказать, что они расходятся: 1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$, 2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$, 3) $\int_0^{+\infty}\cos x\,dx$, 4) $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$, 5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Воспользуемся обобщенной формулой Ньютона-Лейбница:

1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = -(0-1) = 1$, интеграл сходится;

2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^{\infty} = \infty$, интеграл расходится;

3) $\int_0^{+\infty}\cos x\,dx = \sin x\,|_0^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$; этот предел не существует,

поэтому интеграл расходится;

4) $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = e^x\Big|_{-\infty}^{0} = e^0 - \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 1 - 0 = 1$, интеграл сходится;

5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$, интеграл сходится.

Геометрический смысл несобственного интеграла

Пусть $f(x) \ge 0$ на промежутке $[a, +\infty)$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ численно равен площади фигуры, ограниченной снизу отрезком $[a,b]$ оси OX, сверху – линией $y = f(x)$, слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис.46). При возрастании b прямая $x = b$, ограничивающая эту фигуру, движется вправо, а интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ стремится к интегралу $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$. Поэтому величину интеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ естественно принять за площадь бесконечной фигуры, ограниченной снизу осью OX, сверху − графиком функции $y = f(x)$, слева – прямой $x = a$ (рис.46).

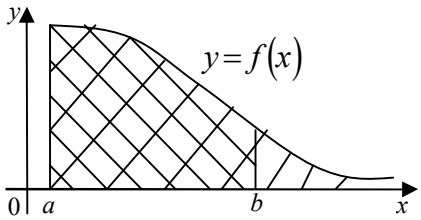


Рис.46

Аналогично, $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$ для случая $f(x) \ge 0$ численно равен площади бесконечной фигуры, ограниченной снизу осью OX, сверху − кривой $y = f(x)$, справа − прямой $x = b$ (рис.47).

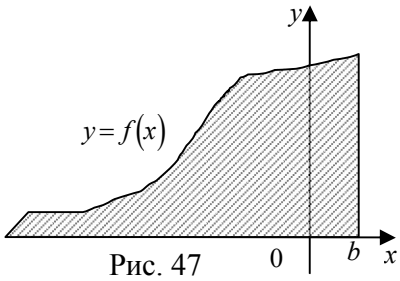


Рис. 47

Пример 17.2. Вычислить площади фигур, ограниченных осью OX, прямой $x = a$, линией $y = f(x)$, если *а)* $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 1$, $x \ge 1$; *б)* $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $x \ge 1$;

в) $f(x) = e^x$, $a = 0$, $x \le 0$; *г)* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Решение. Построим фигуры, ограниченные данными линиями (рис.48, 49, 50, 51). Воспользуемся результатами примера 17.1:

$$а)\ S = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1; \quad б)\ S = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \infty; \quad в)\ S = \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = 1; \quad г)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Итак, фигуры, изображенные на рис.48, 50, 51 имеют конечные площади, а фигура, изображенная на рис. 49, имеет бесконечную площадь.

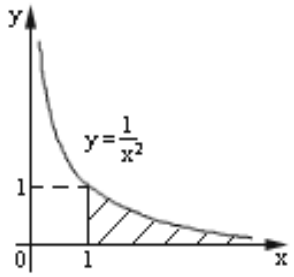


Рис.48

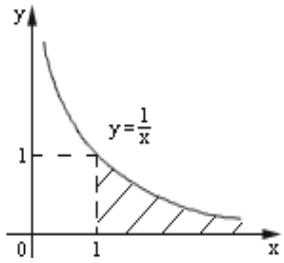


Рис.49

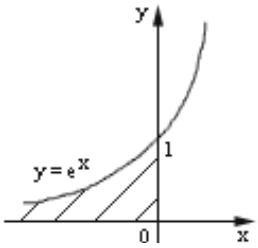


Рис.50

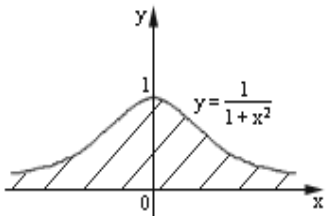


Рис.51

17.2. Несобственный интеграл второго рода
(от неограниченной функции)

Пусть функция $f(x)$ неограничена вблизи точки $x=b$ (рис.52). Несобственный интеграл второго рода (от неограниченной функции) определяется следующим образом:

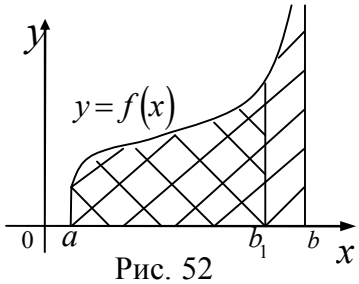


Рис. 52

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)\,dx.} \qquad (17.6)$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае несобственный интеграл называется расходящимся.

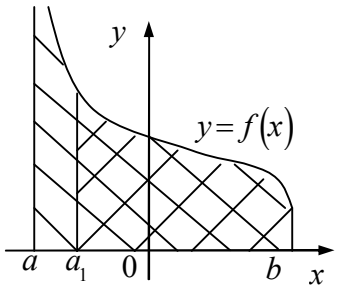


Рис.53

Аналогично для функции $f(x)$, неограниченной вблизи точки $x=a$ (рис. 53), несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ определяется следующим образом:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{a_1 \to a+0} \int_{a_1}^b f(x)\,dx.} \qquad (17.7)$$

Для функция $f(x)$ неограниченной вблизи точки $x=c$ $(a<c<b)$ (рис. 54) несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ определяется равенством

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}.$$

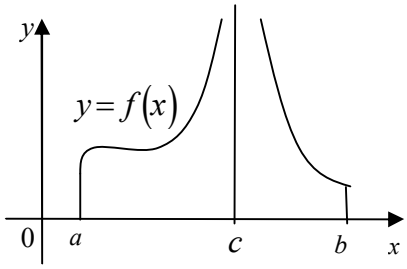


Рис.54

Если каждый из интегралов в правой части равенства сходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Для функции $f(x)$, ***неограниченной вблизи точки*** $x=b$**,** имеем аналог формулы Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла второго рода:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b, \text{ где } F(b) = \lim_{x \to b-0} F(x).} \qquad (17.8)$$

Аналогично для функции $f(x)$, ***неограниченной вблизи точки*** $x=a$**,**

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b, \text{ где } F(a) = \lim_{x \to a+0} F(x).}$$

Пример 17.3. Вычислить несобственные интегралы или доказать, что они расходятся: *а*) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$, *б*) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение. В первом интеграле подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ неограничена при $x=2$, поэтому интеграл $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ является несобственным. Применим обобщенную формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -\int\limits_0^2 \frac{d\,(2-x)}{\sqrt{2-x}} = -2\sqrt{2-x}\,\Big|_0^2 = -(0-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\,.$$

Во втором интеграле подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x^2}$ неограничена вблизи точки $x=0$. Поэтому, по определению, $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$, при этом $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^0 = \infty$. Поэтому интеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ – расходится. Отметим, что если бы мы стали вычислять данный интеграл, не обращая внимание на разрыв подынтегральной функции в точке $x=0$, то получили бы неверный результат $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -(1+1) = -2$.

Геометрический смысл несобственного интеграла второго рода для функции $f(x)$ неограниченной вблизи точки $x=b$: если $f(x)\ge 0$ (рис. 52), то $\lim\limits_{b_1\to b-0} \int\limits_a^{b_1} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ естественно принять за площадь бесконечной фигуры, ограниченной снизу отрезком $[a,b]$ оси OX, сверху – линией $y=f(x)$, слева и справа – прямыми $x=a,\ x=b$.

17.3. Гамма-функция

В теории вероятности, математической физике и ряде других разделов используется несобственный интеграл, называемый ***гамма-функцией*:**

$$\boxed{\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx}\,.$$

Отметим ряд свойств гамма-функции.

1). Гамма-функция определена при $p>0$, т.е. интеграл $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$ сходится при $p>0$ и расходится при $p\le 0$ (это свойство примем без вывода).

2). Гамма-функция удовлетворяет ***рекуррентному соотношению***

$$\boxed{\Gamma(p+1)=p\cdot\Gamma(p)}.$$

Действительно, запишем $\Gamma(p+1)$ и применим формулу интегрирования по частям

$$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty x^p e^{-x}dx=\begin{vmatrix} u=x^p, & du=p\cdot x^{p-1}dx \\ dv=e^{-x}dx, & v=-e^{-x}\end{vmatrix}=-x^p e^{-x}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx=p\cdot\Gamma(p).$$

Здесь мы воспользовались правилом Лопиталя при $p>0$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^p\cdot e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{p\cdot x^{p-1}}{e^x}=...=\lim_{x\to+\infty}\frac{p!}{e^x}=0.$$

3). Пусть $p>n$. Тогда справедлива ***формула приведения***

$$\boxed{\Gamma(p)=(p-1)(p-2)...(p-n)\cdot\Gamma(p-n)}.$$

Для ее вывода достаточно применить рекуррентное соотношение n раз:

$$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1)=(p-1)(p-2)\Gamma(p-2)=...=(p-1)(p-2)...(p-n)\cdot\Gamma(p-n).$$

4). Значения гамма-функции ***целого аргумента***

$$\boxed{\Gamma(n+1)=n!}.$$

Действительно, по формуле приведения $\Gamma(n+1)=n(n-1)(n-2)...1\cdot\Gamma(1)=n!\cdot\Gamma(1)$,

при этом $\Gamma(1)=\int_0^\infty x^0 e^{-x}dx=\int_0^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1$.

Замечания

1. В справочниках приведены таблицы значений гамма-функции для $p\in[1,\,2]$. Для $p>2$ значения гамма-функции могут быть вычислены с помощью формулы приведения, например $\Gamma(4{,}6)=3{,}6\cdot2{,}6\cdot\Gamma(1{,}6)$.

2. Для $0<p<1$ можно воспользоваться рекуррентным соотношением в виде $\Gamma(p)=\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$; например, $\Gamma(0{,}6)=\dfrac{\Gamma(1{,}6)}{0{,}6}$.

3. Гамма-функцию удобно использовать для вычисления интегралов вида $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$, например $\int_0^\infty x^4 e^{-x}dx=\Gamma(5)=4!=24$.

Библиографический список

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике./Д.Т. Письменный. Ч.1. М.: Айрис-пресс, 2003. 288 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа./Г.М. Фихтенгольц. Ч.1. СПб: Изд-во «Лань», 2004. 448 с.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа./С.М. Никольский. М.: Физматлит, 2001. 592 с.
4. Краснов М.Л. Вся высшая математика./М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Ч.1. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 352 с.
5. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов./И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. М.: Наука, 1980. 946 с.
6. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа./Г.Н. Берман. М.: Наука, 2002. 443 с.
7. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа/ под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича М.: Наука, 1996. 464 с.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов/ под ред. Б.П. Демидовича. М.: «Изд-во Астрель», 2003. 495 с.
9. Минькова Р.М. Математический анализ. Часть 1. / Р.М. Минькова. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2004. 80 с.
10. Минькова Р.М. Математический анализ. Часть 2. / Р.М. Минькова. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2005. 68 с.

Учебное издание

Ревекка Максовна Минькова

Математический анализ

Редактор *Н.П. Кубыщенко*
Компьютерная верстка *Р.М. Миньковой*

Подисано в печать 18.11. 2012 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ.л. 5,59
Уч.-изд. л. 5,3 Тираж 150 Заказ Цена "С"

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, Екатеринбург, Мира, 19