Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный технический университет − УПИ

Сборник типовых заданий

по математическому анализу

Екатеринбург
УГТУ-УПИ
2009

УДК 517.9

Авторы: Минькова Р.М., Успенская Е.А., Чуксина Н.В.

Сборник типовых заданий по математическому анализу: сборник типовых заданий / под общ. ред. Р.М. Миньковой. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. 68 с.

Приведены индивидуальные задания по математическому анализу по темам «Предел и непрерывность», «Асимптотические разложения», «Исследование функций», «Неопределенные интегралы», «Определенные интегралы».

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики» при поддержке физико-технического факультета.

© «Уральский государственный технический университет − УПИ», 2009

Индивидуальные задания по теме «Предел и непрерывность»

Вариант №1

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций: а) $y=\sqrt{x^2-8x+16}+3$, б) $y=2-\sqrt{x^2+1}$, в) $y=2\sin(5x+15)$,

г) $y=\left|\log_2|x-3|\right|$, д) $y=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0, \\ \dfrac{3}{x-2}, & 0<x<2, \\ 2x+1, & x>2. \end{cases}$

2. Для функции $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n-3}=\dfrac{1}{2}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}(5x-4)=6$, в) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2+7x}=3$.

4. Для последовательности $X_n=\cos\left(\pi\cdot n+\dfrac{\pi}{3}\right)$ построить последовательности X_{2k}, X_{2k+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n^2}{2a_n}$, $a_1=\dfrac{3}{2}$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности, заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\dfrac{X_n-4}{X_n-3}$, $X_1=\dfrac{3}{2}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва:

а) $f(x)=3^{\frac{1}{x-1}}$; б) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5x-a}{x-2}, & -\infty<x\le -1, \\ 3x+a, & -1<x<2. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{25n^3-7}+2\sqrt{n^2+9n^3}}{\sqrt{n^2+7n+n^3}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8\sin(2n!+\sqrt{n^4-7})-3n^2+4}{\sqrt{16n^4+9n^3-8}}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+7}{5x-13}\right)^{4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{8}{x^2-4}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+8x-9}{x^2-10x+9}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2x\cdot 3^x}{1+x\cdot 7^x}\right)^{\frac{1}{tg\,2x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\lg\left(10+\left(e^x-1\right)\sin\dfrac{1}{x}\right)}{\cos x+\sin x}$.

Вариант №2

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y=\left|\dfrac{x-3}{5-x}\right|$, б) $y=|x-1|+|x-3|+4$, в) $y=3-2\sqrt{x^2-2x+1}$,

г) $y=\dfrac{1}{2}\cos(2x-10)$, д) $y=\begin{cases} x^2-2x-1, & -\infty\le x<0, \\ 1+\sqrt{4-x^2}, & 0<x<2, \\ 1+5x, & x>2. \end{cases}$

2. Для функции $y=2^{x-3}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$, б) $\lim\limits_{x\to 1}(8x+9)=17$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{16+3x}=4$.

4. Для последовательности $X_n=\dfrac{(-1)^n(n+2)}{4n+3}$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n^2}{2}$, $a_1=\dfrac{1}{2}$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\dfrac{2X_n-1}{X_n}$, $X_1=\dfrac{3}{2}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва:

а) $f(x)=x^2+\lg|x-1|+\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$ б) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & -3\le x\le 1, \\ x+2, & 1\le x\le 3, \\ \sqrt{x^2+7}, & x>3. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+4}{5n-8}\right)^{n+3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}\,\lg\dfrac{2x-9}{x-4}+x\sin(3x-15)}{4x-20}$,

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos x-\cos 2}{x-2}$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^4+8n^3+2\sqrt[4]{n^{16}+3n^{15}}}{7n^4-3n^3+10}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$, 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-8x^2+7x-6}{x^2-5x+6}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos^3 x}$, 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2+\lg(2x^2-1)\sin\dfrac{3}{x-1}}{\sin\pi x+\cos\pi x}$.

Вариант №3

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, б) $y = 1 + \sqrt{9 - x^2}$; в) $y = \left|x^2 - 5|x| + 6\right|$;

г) $y = \sqrt{x^2 - 8x + 16} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} + 1$, д) $y = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & -\infty < x \le 1, \\ 2 - 3x, & 1 < x < 4, \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x, & x \ge 4. \end{cases}$

2. Для функции $y = 3\sqrt{x-2}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{x\to 4}(3x - 12) = 0$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+5}{4n-1} = \frac{3}{4}$, в) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{1+4x} = 3$.

4. Для последовательности $X_n = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}(2n+1)\right)$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1} = \frac{a_n}{2 - a_n}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1} = \frac{3X_n - 1}{4X_n - 1}$, $X_1 = \frac{2}{3}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва.

а) $f(x) = \frac{x+2}{\lg|x-3|}$, б) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3, & -5 \le x \le 2, \\ 2x - 5, & 2 < x \le 4, \\ 3, & x > 4. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4 \sin\sqrt{n!} + \sqrt{n^{10} - 8n + 4}}{9n^5 - 8n^4 + 3n - 7}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+25} - 5}{\sin 3x}$,

3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^3 - 5x^2 + 8}{x^3 - 8x - 7}$, 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9x+4}{5+9x}\right)^{2x}$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2 + 8x} - \sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{25x^2 + 3}} \cdot x$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos 9x}{x^2}$,

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3 + n \cdot \sqrt[3]{n^4 - 5} \cdot \sin\frac{5n}{n^2 + 4}}{\sqrt[3]{n^4 + 3}}$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^2\, 7x}{x \sin 5x + \mathrm{tg}\, x \sin 9x}$.

Вариант №4

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|5-x|}+1$, б) $y=2-3\sqrt{4-x}$, в) $y=\arcsin(x-4)$,

г) $y=\log_3|3x-9|$, д) $y=\begin{cases} x^2+x+1, & -2<x<0, \\ \frac{1+x}{1+3x}, & 0<x<2, \\ 1-2x, & 2<x<4. \end{cases}$

2. Для функции $y=1-5x$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{x\to 1}(10x-3)=7$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n-3}{5+6n}=\frac{3}{2}$, в) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{4x+13}=5$.

4. Для последовательности $X_n=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$, $a_1=\sqrt{3}$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\frac{1}{2-X_n}$, $X_1=\frac{2}{3}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва:

а) $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{(x^2+5x+6)^2}}$; б) $f(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x+3}, & -\infty<x\le 1, \\ \frac{2}{3}x^2, & 1<x\le 2, \\ 3x+4, & x>2. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+x^2-6x}{x^2+2x-3}$,

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+8^x\cdot\sqrt{x^2+6x-2}}{1-8^{-x}-3x\cdot 8^x}$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-7}{2x+8}\right)^{3x}$,

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\cdot\sin(x-1)-(x^2-3x+2)^3}{\arcsin(x-1)^3}$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+1}\right)$,

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}8x^2-\operatorname{tg}3x^2}{x\arcsin(3x^2+2x)}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x-\cos x}$,

8) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2+\ln(x^2-7x+11)\cdot\sin\frac{3}{x-2}}{\cos(x^2-5x+6)}$.

Вариант №5

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y=\dfrac{x^2-7x+12}{|x-3|}$, б) $y=\log_{\frac{1}{2}}|2x+8|$, в) $y=\arcsin(3x-6)$,

г) $y=2-\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2+4x+5}$, д) $y=\begin{cases}1-2x, & -1<x<1,\\ \dfrac{x+1}{2x+1}, & 1\le x\le 3,\\ x^2-2x, & x>3.\end{cases}$

2. Для функции $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n-9}{4n+3}=2$, б) $\lim\limits_{x\to 4}(3x-11)=1$, в) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{13+4x}=3$.

4. Для последовательности $X_n=\dfrac{(-1)^n(n+1)}{2n+5}$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3+2a_n}$, $a_1=1$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности, заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\dfrac{4}{4-X_n}$, $X_1=1$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{|x|}{(x-1)\cdot x}$, б) $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1<x\le 4,\\ \log_3(x+5), & 4<x\le 22,\\ 3, & x>22.\end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\operatorname{tg}8x}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-4}\right)^{3x}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{16n^6-5n^2+1}+\sqrt{9n^6+5n^5}}{7n^3-8n+1}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^3-6x+1\right)\cdot\sin 5x^2}{\left(x^2+4\right)\operatorname{tg}12x\cdot\arcsin\left(x^2+3x\right)}$,

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^3+1}$, 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^3+8x^2-9x-6}{x^3-1}$,

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2+3x+1}{7x^3+2}\right)^{x^2-2x+1}$, 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{1/n}+\operatorname{tg}\dfrac{n}{n^2+5}(5+\sin n)}{\operatorname{arctg}\left(n^2+3\right)}$.

Вариант №6

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y=\left|\dfrac{3x-5}{2x+4}\right|$,

б) $y=\arccos(3x-6)$,

в) $y=\log_{\frac{1}{3}}|2x-8|$,

г) $y=5+\sqrt{3-x}$,

д) $y=\begin{cases}(x+1)^2, & -\infty<x\le -1,\\ \dfrac{x}{2+x}, & -1<x<3,\\ 3x+5, & x\ge 3.\end{cases}$

2. Для функции $y=\log_3(x+5)$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-6)=0$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4}{8x+5}=\dfrac{3}{8}$, в) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{4x+9}=5$.

4. Для последовательности $X_n=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n\right)$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?

5. Доказать, что последовательность заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$, $a_1=\dfrac{1}{5}$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности, заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\dfrac{3X_n-4}{X_n-1}$, $X_1=3$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{|x^2-1|}$, б) $f(x)=\begin{cases}x^2, & -\infty<x<0,\\ \dfrac{x}{x-2}, & 0\le x<2,\\ 12x-23, & x\ge 2.\end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin(x-4)}{\sqrt{x}-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x-9}\right)^{x+3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(7n^2+9)\cdot\sin(n^4-1)+\cos 9n}{n\cdot\sqrt{25n^4+9n^3}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(x+\operatorname{tg}8x)\cdot\operatorname{ctg}5x$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^3-8x^2+3x-14}{x^3-8}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{|x-1|}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^4+5n^3}+3\cdot\sqrt[3]{n^2+n^3}}{n+9}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^3\pi x}{x^3-3x^2+3x-1}$.

Вариант №7

1. Используя простейшие свойства функции, построить их графики:

а) $y = 1 - \sqrt{9 - \frac{3}{4}x^2 - 3x}$,

б) $y = 3 - 2^{|x-5|}$,

в) $y = 2 + 3\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$,

г) $y = |x+3| - |x+5| + 1$

д) $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & -3 < x < 0, \\ \dfrac{x}{x+1}, & 0 < x < 2, \\ 1 - 3x, & 2 < x < 4. \end{cases}$

2. Для функции $y = \sqrt{3 - x}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{x\to 3}(6x+2) = 20$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-7}{n+4} = 3$, в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+1}{x^2-4} = \infty$.

4. Для последовательности $X_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2}$, $a_1 = 2$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1} = \frac{5X_n - 9}{4X_n - 7}$, $X_1 = \frac{3}{4}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва

а) $f(x) = \frac{|\sin x|}{x\cos x}$ б) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x, & -\infty < x \le 0; \\ \dfrac{x}{x-1}, & 0 < x < 2; \\ 2, & x > 2. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8n-3}{8n+9}\right)^{2n-7}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^3 + 5n - 9\sqrt{n} + \sqrt{81n^6 - 3n}}{(n-7)^3}$,

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{x^3 - 1}$,

5) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x-3} - 2}{x^2 - 49}$,

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2 - \cos x}{x^2 + 1}\right)^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}}$,

7) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3-x}\cdot \mathrm{arctg}\frac{1}{9-3x} + x}{\sqrt[3]{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}\cdot 4^{x+5} - 2}$,

8) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x + \sin(2x-10)\cdot(x^2-24) - 5}{\sin(3x-15)\cdot\cos(4x-20)}$.

Вариант №8

1. Используя простейшие свойства функции, построить их графики:

а) $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$,

б) $x = 3 - \sqrt{8y - y^2}$,

в) $y = \left|5 + 2\log_2|x-4|\right|$,

г) $y = \frac{3x+4}{x-1}$,

д) $y = \begin{cases} x-2, & -3 \le x \le 1; \\ \left(\frac{4}{5}\right)^x + \frac{1}{5}, & 1 < x \le 3; \\ x^2 + x, & x > 3. \end{cases}$

2. Для функции $y = \cos\frac{x}{2}, x \in [0;\pi]$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{x\to 7}(5x-35) = 0$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{10n-3} = \frac{1}{10}$, в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{5x^2+7}{x^2-1} = \infty$.

4. Для последовательности $X_n = n\cdot\sin\frac{\pi\cdot n}{2}$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n^2}{4}$, $a_1 = 1$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1} = \frac{X_n+1}{3-X_n}$, $X_1 = \frac{1}{2}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва:

а) $f(x) = 3^{\frac{1}{(x-2)^3}} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right)$, б) $f(x) = \begin{cases} x+5, & -\infty < x < 1, \\ \frac{6}{2-x}, & 1 < x < 2, \\ -6, & x \ge 2. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{x^2+9}}$,

2) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\left(x^2-8x+12\right)^2\cdot\cos\pi x - \sin^2(x-6)}{\left(x^2-10x+24\right)^2}$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot(\sqrt{x^2+1} - x)$,

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^3-7x^2+9}{x^3-27}$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{49n^4-5n}+\sqrt{7n^3-8n+4n^4}}{n^2-10n+9}$,

6) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 3}{x^2-9}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^4 2x}{x^4+\operatorname{tg}^4 x}$,

8) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{18+\sin(x^2-8x+15)\cdot\sqrt[3]{x-2}\cdot\sin\frac{1}{x-3}}{6\cos(7x-21)}$.

Вариант №9

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y = 3 - \sqrt{40 - 6x - x^2}$, г) $y = \left|\log_3 |x-4| + 2\right|$,

б) $y = \dfrac{|x|}{5x^2 + 3x} - 1$, д) $y = \begin{cases} x^2 + 5x + 6, & -\infty < x \le 1, \\ 12x, & 1 < x < 3, \\ x^3, & x \ge 3. \end{cases}$

в) $y = 3\sin(1 - 2x) + 3$,

2. Для функции $y = 4 - x^2$, $x \ge 0$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9n+5}{10n-7} = 0{,}9$, б) $\lim\limits_{x\to 1}(6x+2) = 8$, в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{7x+5}{x^2-9} = \infty$.

4. Для последовательности $X_n = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}(2n+1)$ построить подпоследовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3 - a_n}$, $a_1 = 1$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности , заданной рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \dfrac{3x_n - 4}{x_n - 1}$, $x_1 = \dfrac{5}{2}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва:

а) $y = \dfrac{|x|}{x^2 - 3x}$, б) $y = \begin{cases} x^2 - 2x, & -\infty < x < 2; \\ 2\text{-}x, & 2 \le x < 3; \\ \dfrac{1}{x\text{-}4}, & x \ge 3. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(x \cdot \operatorname{ctg} 2x^2)\arcsin(x^2 + 3x)$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x-7}{3+8x}\right)^{5x-2}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2 + 4n\sqrt{5n-8} + \sqrt{4n^4 + 3n^3}}{8n^2 - 7n\sqrt{n+9} + \sqrt{9n^4 - 8}}$, 4) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{tg5x}{\sqrt[4]{(1-\cos 2x)^2}}$,

5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 9x + 14}{3x^3 - 2x^2 - 7x - 2}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5 - \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \left(3^x - 1\right)\cos\dfrac{1}{(x^2 + x)}\right)}{\cos 3x - \sin 8x}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^6 + 3x^7 \cdot e^{3x}} \cdot \operatorname{arctg}\left(9x - \dfrac{1}{x}\right) + x \cdot \sin 9x}{1 - \cos x}$, 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^4 + 2}{10x^4 - 3}\right)^{x^3 - 3x + 1}$.

Вариант №10

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

   а)) $y=\sqrt{x^2+10x+25}-\sqrt{x^2-6x+9}+1$,

   б) $y=\dfrac{x^2-8x+12}{|x-2|}$,

   в) $y=\dfrac{1}{2}\log_2(3x+9)$,

   г) $y=5-\sqrt{x^2-8x+1}$,

   д) $y=\begin{cases}\dfrac{x+6}{2x+5}, & -\infty<x<1;\\ 3x-2, & 1\le x\le 2;\\ x^2-2x, & x>2.\end{cases}$

2. Для функции $y=\arccos(2x)$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

   а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-7n}{7n+1}=-1$ б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{x-4}=\infty$, в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+5}{x-1}=\infty$.

4. Для последовательности $X_n=\lg n\cdot\sin\dfrac{\pi n}{2}$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\sqrt{4+a_n}$, $a_1=2$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности, заданной рекуррентным соотношением $x_{n+1}=\dfrac{2x_n-9}{x_n-4}$, $x_1=\dfrac{5}{2}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва

   а) $y=\dfrac{|x-2|}{x^2-2x}$, б) $y=\begin{cases}x^2+2x, & -\infty<x<1;\\ \sqrt{4-x}, & 1\le x<4;\\ \dfrac{2}{x+5}, & x\ge 4.\end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

   1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 3}{\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}^2 3}$,

   2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4-7n}\cdot\sin(3n!)+5n^3}{\sqrt{16n^6+5n+7}}$,

   3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{5+6x}\right)^{x-8}$,

   4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$,

   5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{10x^3-3x^2+8x+21}{5x^2+8x+3}$,

   6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-6x+9)\cdot\cos\left(\dfrac{11+5x}{3x-9}\right)+\sin(2x-6)}{4x-12}$,

   7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\ln\left(e+\dfrac{x}{x^2+1}\cdot\cos\dfrac{1}{x}\right)}{\ln(e^2+x)}$,

   8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{\sin 2x+3x}$.

Вариант №11

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y=-1-\frac{1}{2}\sqrt{5-x}$,

б) $y=2\,|\sin(2x-6)|$,

в) $y=3-2^{|x-5|}$,

г) $y=\sqrt{x^2-8x+16}-\sqrt{x^2}+3$,

д) $y=\begin{cases} 2^x, & -\infty<x<1, \\ \frac{3}{x-3}, & 1\le x\le 3, \\ 7-x, & x>3. \end{cases}$

2. Для функции $y=\log_2 x$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x-3}=\sqrt{2}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}(6x+5)=11$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1$.

4. Для последовательности $X_n=n\cdot\cos\frac{\pi n}{2}$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\frac{a_n}{4+3a_n}$, $a_1=1$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $x_{n+1}=\frac{x_n+1}{5-4x_n}$, $x_1=\frac{1}{5}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва:

а) $y=5^{\frac{-1}{x}}$, б) $y=\begin{cases} \cos x, & -\infty<x\le\pi; \\ -1, & \pi<x<6; \\ \frac{1}{6-x}, & x>6. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{2}-\sqrt{x+4}}$,

2) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 8x}{\sin 3x}$,

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^3-4x)\cdot e^{6\cdot\sqrt{\cos 10x}}\cdot x\cdot\sin(x^2-4x+4)}{(x^3-8)\cdot\mathrm{arctg}(x-2)}$,

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+8}{4+3x}\right)^{3x-2}$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^6-10n^5+27}+\sqrt[3]{n^8+27n^9}}{3n^2-5n+6n^3}$,

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{2+x^5}-\sqrt{4x^3+3}}{x\cdot\sqrt{x+\sin x}}$,

7) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^3+8x^2+4x-1}{x^2-1}$,

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1-3x}\right)^{\frac{1}{tg\,2x}}$.

Вариант №12

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y = \operatorname{arctg}(x+2)$,

б) $y = \left(\frac{8}{3}\right)^{2-x} + 1$,

в) $y = |x-1| + |x+2| - |x|$,

г) $y = 2 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}$,

д) $y = \begin{cases} x+2, & -\infty < x < 1; \\ \frac{3}{4}x, & 1 \le x < 4; \\ x^2 - 5, & x \ge 4. \end{cases}$

2. Для функции $y = 2^{x-2} + 1$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n+3}{9n+5} = \frac{8}{9}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x+5} = 2$.

4. Для последовательности $X_n = \frac{n + n^2(-1)^n}{n^2+1}$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n\left(\frac{1}{2} - a_n\right)$, $a_1 = \frac{1}{3}$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности, заданной рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \frac{7x_n - 1}{4x_n + 3}$, $x_1 = \frac{4}{3}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва

а) $f(x) = \frac{(x+2)\cdot 2^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{\left|x^2+5x+6\right|}}$, б) $f(x) = \begin{cases} x - 3x^2, & -4 \le x < 0; \\ \frac{x}{2x+1}, & 0 \le x < 3; \\ 3x-2, & 3 \le x \le 5. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{16n^8 + 9n^5 - 8} + n^2 - 5n + 6}{\sqrt[12]{3n^{15} + n^{24} - 7n^3}}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \cos\frac{1}{x}}{\operatorname{arctg}\left(x^2 + 12x\right)}$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{7n+9}{3+10n}\right)^{3n-2}$,

5) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 3}{x^4 - 7x^2 + 6}$,

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 4x}}{x^2}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 5x}$,

8) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1 + tg3x \cdot \cos 5x}{1 + tg2x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Вариант №13

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y = 3\sin(2x + \pi)$;

б) $y = 1 + \sqrt{9 - x^2}$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 8x + 16} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} + 1$.

г) $y = \left| x^2 - 5|x| + 6 \right|$;

д) $y = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1}, & -\infty < x \le 1, \\ 2 - 3x, & 1 < x < 4, \\ \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x, & x \ge 4. \end{cases}$

2. Для функции $y = 3\sqrt{x-2}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.

3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10n+1}{5n-3} = 2$, б) $\lim\limits_{x\to 4}(3x - 11) = 1$, в) $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{13 + 4x} = 3$.

4. Для последовательности $X_n = \dfrac{(-1)^n (n+1)}{2n+5}$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?

5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3 + 2a_n}$, $a_1 = 1$, имеет конечный предел и вычислить его.

6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1} = \dfrac{4}{4 - X_n}$, $X_1 = 1$, найти явное выражение и изучить сходимость.

7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва:

а) $f(x) = \dfrac{|x|}{(x-1)\cdot x}$, б) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x \le 4, \\ \log_3(x+5), & 4 < x \le 22, \\ 3, & x > 22. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sin(x-4)}{\sqrt{x} - 2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+5}{4x-9} \right)^{x+3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(7n^2 + 9)\cdot \sin(n^4 - 1) + \cos 9n}{n \cdot \sqrt{25n^4 + 9n^3}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} (x + tg8x)\cdot ctg5x$;

5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x^3 - 8x^2 + 3x - 14}{x^3 - 8}$;

6) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{1 - x^2} - \dfrac{1}{1 - x} \right)^{\frac{1}{|x-1|}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^4 + 5n^3} + 3\cdot\sqrt[3]{n^2 + n^3}}{n + 9}$;

8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^3 \pi x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$.

Вариант №14

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y=-2+3\sqrt{x+7}$,

б) $y=\frac{1}{2}\sin\left(3-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}$,

в) $y=\sqrt{x^2-10x+25}+|x|-3$,

г) $y=\arccos(3x-12)$,

д) $y=\begin{cases}3^x-1, & -\infty<x<0;\\ 10x^2, & 0\le x<1;\\ \frac{10}{x-2}, & x\ge 1.\end{cases}$

2. Для функции $y=\frac{x-3}{x+2}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{x\to 1}(3x+6)=9$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n-8}{8n-7}=\frac{7}{8}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+1}{x-2}=4$.

4. Для последовательности $X_n=2^{(-2)^n}$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\frac{9+a_n^{\ 2}}{6}$, $a_1=2$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\frac{X_n-1}{4X_n-3}$, $X_1=\frac{2}{5}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва

а) $y=\frac{\cos\frac{\pi}{2}(3-x)}{|x^2-x-2|}$, б) $y=\begin{cases}x^2+x, & -\infty<x\le 1;\\ 2-x, & 1<x\le 3;\\ \frac{3}{x-4}, & x>3.\end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+9}{x}\right)^{2x-4}$, 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+3x-5}{x^3-1}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\sqrt{n}\cdot\cos(n!)+\sqrt{4n^2-3}}{8n+9}$,

4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(x^2-4\right)\cdot e^{x+1}+\sqrt[3]{(x^2-8x+12)^4}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x-2}}+tg(x-2)}{(x^3-8)\cdot\cos x+x\cdot\sin(x-2)}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sqrt{4+x}-2}$, 6) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}2x}$,

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{1/n}+\sin\frac{n}{n^2+1}\cdot\cos n}{1+\cos\frac{1}{n}}$, 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x+\sin x}$.

Вариант №15

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y=\left|\frac{x+2}{x+3}\right|$,

б) $y=\left|-x^2+7x-10\right|$,

в) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x+5|}-1$,

г) $y=\left|\log_5|x-3|\right|$,

д) $y=\begin{cases}\frac{x}{x+3}, & -\infty<x<3;\\ \sqrt{25-x^2}, & 3\le x<5;\\ 2-x, & x\ge 5.\end{cases}$

2. Для функции $y=\sqrt{x-3}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{x\to 4}(4x-15)=1$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{|x-3|}}=\infty$, в) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$.

4. Для последовательности $X_n=\sin(n\frac{\pi}{2})$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\frac{a_n}{4-a_n}$, $a_1=2$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\frac{X_n-16}{X_n-7}$, $X_1=\frac{5}{2}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва

а) $f(x)=\frac{x^2-4}{|x-2|\cdot(x-3)}$, б) $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x-1}, & -\infty<x<0;\\ 3x, & 0\le x<1;\\ 5x^2+4, & x\ge 1.\end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{9n-3}\right)^{n^2+5}$,

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^3+8x^2-11x-1}{x^4-8x^2+7}$,

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(6x^2-5x-1)\cdot e^{x^3+4}+\sqrt{x^2-2x+1}\cdot tg(5x-5)}{4x^2\cdot\sin(9x-9)}$,

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin 5x}{(\pi-2x)^2}$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$,

6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 5x)^{\frac{1}{3x}}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\pi x+\sin 8x\cdot\sqrt{3-\arccos 5x}}{3+e^{3x}}$,

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5^x-3x+1}{6^x+8x}\right)^{\frac{-1}{|\sin 9x|}}$.

Вариант №16

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y=|\sin(3x-6)|$ г) $y=2-\sqrt{4x^2-16x}$, в) $y=\left|x^2-3|x|+2\right|$,

б) $y=2^{(5x-15)}+3$, д) $y=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+2)^2-2, & -\infty<x<-2,\\ -2, & -2\le x\le 5,\\ \frac{x+4}{x-6}, & x>5.\end{cases}$

2. Для функции $y=\arccos\frac{x}{2}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n-8}{5-10n}=-0{,}7$, б) $\lim\limits_{x\to 2}(6x-1)=11$, в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\infty$.

4. Для последовательности $X_n=\frac{(-1)^n\cdot n}{n+1}$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\frac{a_n}{5+a_n}$, $a_1=1$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\frac{4X_n-1}{X_n+2}$, $X_1=\frac{5}{2}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва

а) $f(x)=\frac{\sin(x-2)}{|x-2|\cos x}$, б) $f(x)=\begin{cases}x+3, & -3<x<0;\\ 3x^2+3, & 0<x<3;\\ \frac{x}{x-2}, & x\ge 3.\end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin\left(x^2-8x+12\right)\cdot e^{x-x^2+4}}{\cos\left(x^3-8\right)\cdot\left(x^4-4x-8\right)}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x+4}{7x+5}\right)^{7x-9}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos 8x}{x^2}\right)^{1/x}$, 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^3-5x^2+2}{9x^4-5x^2-4}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x^2\cdot 5^x}{1-3^x\cdot 2x}\right)^{\frac{-2}{|\sin x|}}$, 6) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{1+\cos\pi x}{9+(x+2)\sin\frac{x}{x+2}}$,

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sqrt[4]{16n^8-9n^5}+3n^2}{\sqrt[3]{27n^6-18n+3}+7\cos\frac{1}{n}}$, 8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{3x-\pi}$.

Вариант №17

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y=\sqrt{|x-3|}$, *б)* $y=\operatorname{arctg}(3x-12)$,

г) $y=\left|3^{x-2}-5\right|$, *д)* $y=1-\sqrt{9x^2-18x}$,

в) $y=\begin{cases} \dfrac{x}{x+1}, & -4\le x<0, \\ 2x-5, & 0\le x<1, \\ -\dfrac{3}{2-x}, & x\ge 1, \end{cases}$

2. Для функции $y=\log_2(x+5)-1$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-1}{2n+3}=2$, б) $\lim\limits_{x\to 1}(5x+3)=8$, в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+1}{x^2-16}=\infty$.

4. Для последовательности $X_n=\dfrac{(-1)^n(2n-1)}{n+3}$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=a_n\left(\dfrac{2}{3}-a_n\right)$, $a_1=\dfrac{1}{3}$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\dfrac{5X_n-1}{16X_n-3}$, $X_1=\dfrac{2}{7}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва

а) $f(x)=\log_3|x-2|$, б) $y=\begin{cases} \sin 2x, & -\infty<x\le\dfrac{\pi}{4}, \\ \pi+1-4x, & \dfrac{\pi}{4}<x<3, \\ \dfrac{6x}{2x-9}, & x\ge 3. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{x+9}}{\sin 3x}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-9}{3n+8}\right)^{n-2}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-10n+4}\cos(3n-1)+\sqrt[3]{n^4-5n^2}}{\sqrt[6]{64n^8-7n^4+2}-\sin\left(3n^2+8\right)}$, 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{\sqrt{x+4}-2}$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{\frac{2x^2}{x-4}}$, 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8x^2+12x}{x^4-10x^2+24}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2x+3^x}{1+x^2+2\cdot 4^x}\right)^{|\operatorname{ctg} x|}$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x\cdot\cos\dfrac{1}{x}+\lg(2+x)}{\lg(4+x)}$.

Вариант №18

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$, б) $y = \frac{x^2 - 10x + 16}{|x-2|}$, в) $y = \log_5|4x - 12|$,

г) $y = 3 + \sqrt{6 - x}$, д) $y = \begin{cases} 3x - 2, & x \le 0, \\ x^2 - 3x + 2, & 0 < x < 3, \\ \frac{2}{4 - x}, & x \ge 3. \end{cases}$

2. Для функции $f(x) = \arcsin\frac{x+5}{2}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{x\to 4}(3x - 12) = 0$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n - 4}{3n + 5} = 2$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x - 1}{x + 5} = 3$.

4. Для последовательности $X_n = \frac{n}{n+1}\cos\pi n$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + \frac{a_n}{2}$, $a_1 = 3$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1} = \frac{7X_n - 1}{16X_n - 1}$, $X_1 = \frac{2}{5}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва

а) $f(x) = 3^{1/x} + 1$, б) $y = \begin{cases} x^2 - 4, & 2 \le x \le 4, \\ \frac{12}{x - 3}, & 4 < x < 5, \\ 6x + 5, & x \ge 5. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x+4)^4\sqrt[4]{25x^4 - 7}}{9x^5 + 8x^3 - 11}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n-1}{6n+2}\right)^{3n-7}$,

3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x^2 - 7x + 12)e^{2x^3+5} + \sin(8x - 32)}{2x - 8}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos^3 x}{3x^2}$,

5) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{4x^3 - 5x^2 + 7x + 16}{x^3 + 1}$, 6) $\lim\limits_{x\to 125}\frac{\sqrt[3]{x} - 5}{\sqrt{x} - 5\sqrt{5}}$,

7) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\lg(x+8) + \sin\left(\sqrt{4 - x^2}\right)\cos\frac{1}{x-2}\right]$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1 + \sin 6x}{1 + \operatorname{tg} 2x \cdot \cos 3x}\right)^{1/\sin 2x}$.

Вариант №19

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

   а) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+1$, б) $y=3^{x-3}+1$, в) $y=\sqrt{x^2+16x+64}+|x+3|-1$,

   г) $y=-3+\sqrt{10x-x^2}$, д) $y=\begin{cases}-3x+1, & -\infty<x\le -4,\\ 13+2(x-4)^2, & -4<x<0,\\ 2x+1, & x\ge 0.\end{cases}$

2. Для функции $f(x)=\sqrt{5-x}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

   а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+7}{5n-4}=\frac{1}{5}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)=8$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x-3}=2$.
4. Для последовательности $X_n=\operatorname{arctg}\left((-1)^n\cdot n\right)$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\frac{5}{2}+\frac{a_n^{\,2}}{10}$, $a_1=2$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\frac{8X_n-1}{9X_n+2}$, $X_1=\frac{3}{4}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва

   а) $f(x)=\frac{2^{1/x}-1}{2^{1/x}+1}$, б) $f(x)=\begin{cases}x^3-1, & 0\le x<1,\\ x-1, & 1\le x<2,\\ 3/(x-2), & x\ge 2.\end{cases}$
8. Найти пределы, если они существуют:

   1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+x}\right)$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$,

   3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{10}+3n^2}+5\sqrt{n^{15}-4n}}{\sqrt{n^{20}+6n}+3n^2}$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n+9}{3+10n}\right)^{3n-2}$,

   5) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\left(x^3+8\right)e^{3x^2-7}+\sqrt{x^2-4x-12}\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\,(x+2)\right)}{\sin(3x+6)}$, 6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^3+5x^2-52}{x^3-8}$,

   7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}x+(4x-\pi)\cos\frac{x}{4x-\pi}}{\lg(9+\operatorname{tg}x)}$, 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+\operatorname{arctg}x}$.

Вариант №20

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y=\left|\dfrac{2x-1}{x-2}\right|$, б) $y=\operatorname{tg}\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-3$, в) $y=\left|3-\log_3(4-x)\right|$,

г) $y=5^{-(x+6)}+1$, д) $y=\begin{cases}2+\sqrt{4-x}, & -\infty<x\le 4,\\ 2x-6, & 4<x\le 5,\\ 5, & x>5.\end{cases}$

2. Для функции $y=\lg x+2$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x}=0$, б) $\lim\limits_{x\to 1}(3x+4)=7$, в) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+4)=5$.

4. Для последовательности $X_n=\operatorname{tg}\dfrac{\pi n}{2}$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходиться ли исходная последовательность?

5. Доказать, что последовательность заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{5-a_n}$, $a_1=2$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\dfrac{2X_n-16}{X_n-6}$, $X_1=3$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-25}$, б) $y=\begin{cases}x+4, & -\infty<x<0,\\ 4-x^2, & 0\le x<2,\\ 2x+5, & 2\le x<\infty.\end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin 5x}{1+\operatorname{tg}3x\cos x}\right)^{1/\operatorname{tg}x}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-5}\right)^{\frac{n}{4}+1}$, 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^8+7}\operatorname{tg}(3x-3)+e^{x^2-2x+1}\sin(x-1)}{\sin(5x-5)}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^3+x-5}{4x^2-4}$, 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^6+\sqrt{4n^{12}+5n^7}}{7n^3-3\sqrt[3]{6n^3+n^{18}}}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x}}{x}$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\lg(1+x)\sqrt{2+\cos\dfrac{1}{x}}}{2+e^x}$.

Вариант №21

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций: а) $y=\sqrt{x^2-8x+16}+3$, б) $y=2-\sqrt{x^2+1}$, в) $y=2\sin(5x+15)$,

г) $y=\left|\log_2|x-3|\right|$, д) $y=\begin{cases} x^2+5, x<0, \\ 3x+2, 0\le x\le 1, \\ -\dfrac{5}{x-2}, x>1. \end{cases}$

2. Для функции $y=\frac{x-1}{x-2}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-3}=\frac{1}{2}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}(5x-4)=6$, в) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2+7x}=3$.

4. Для последовательности $X_n=\cos\left(\pi\cdot n+\frac{\pi}{3}\right)$ построить последовательности X_{2k}, X_{2k+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\frac{1+a_n^2}{2a_n}$, $a_1=\frac{3}{2}$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности, заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\frac{X_n-4}{X_n-3}$, $X_1=\frac{3}{2}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва:

а) $f(x)=3^{\frac{1}{x-1}}$; б) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5x-a}{x-2}, -\infty<x\le -1, \\ 3x+a, -1<x<2. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^3-7}+2\sqrt{n^2+9n^3}}{\sqrt{n^2+7n+n^3}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8\sin(2n!+\sqrt{n^4-7})-3n^2+4}{\sqrt{16n^4+9n^3-8}}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+7}{5x-13}\right)^{4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{x-2}-\frac{8}{x^2-4}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+8x-9}{x^2-10x+9}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2x\cdot 3^x}{1+x\cdot 7^x}\right)^{\frac{1}{tg\,2x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+\lg\left(10+\left(e^x-1\right)\sin\frac{1}{x}\right)}{\cos x+\sin x}$.

Вариант №22

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y=\left|\dfrac{x-3}{5-x}\right|$, б) $y=|x-1|+|x-3|+4$, в) $y=3-2\sqrt{x^2-2x-3}$,

г) $y=\dfrac{1}{2}\cos(2x-10)$, д) $y=\begin{cases} x^2-2x-1, & -\infty\le x<0,\\ 1+\sqrt{4-x^2}, & 0<x<2,\\ 1+5x, & x>2.\end{cases}$

2. Для функции $y=2^{x-3}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$, б) $\lim\limits_{x\to 1}(8x+9)=17$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{16+3x}=4$.

4. Для последовательности $X_n=\dfrac{(-1)^n(n+2)}{4n+3}$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n^2}{2}$, $a_1=\dfrac{1}{2}$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\dfrac{2X_n-1}{X_n}$, $X_1=\dfrac{3}{2}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва:

а) $f(x)=x^2+\lg|x-1|+\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$ б) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & -3\le x\le 1,\\ x+2, & 1\le x\le 3,\\ \sqrt{x^2+7}, & x>3.\end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+4}{5n-8}\right)^{n+3}$, 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}\,\lg\dfrac{2x-9}{x-4}+x\sin(3x-15)}{4x-20}$,

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos x-\cos 2}{x-2}$, 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^4+8n^3+2\sqrt[4]{n^{16}+3n^{15}}}{7n^4-3n^3+10}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$, 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-8x^2+7x-6}{x^2-5x+6}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos^3 x}$, 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2+\lg(2x^2-1)\sin\dfrac{3}{x-1}}{\sin\pi x+\cos\pi x}$.

Вариант №23

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, б) $y = 1 + \sqrt{9 - x^2}$; в) $y = \left|x^2 - 5|x| + 6\right|$;

г) $y = \sqrt{x^2 - 8x + 16} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} + 1$, д) $y = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & -\infty < x \le 1, \\ 2 - 3x, & 1 < x < 4, \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x, & x \ge 4. \end{cases}$

2. Для функции $y = 3\sqrt{x-2}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{x\to 4}(3x - 12) = 0$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+5}{4n-1} = \frac{3}{4}$, в) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{1+4x} = 3$.

4. Для последовательности $X_n = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}(2n+1)\right)$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1} = \frac{a_n}{2 - a_n}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1} = \frac{3X_n - 1}{4X_n - 1}$, $X_1 = \frac{2}{3}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва.

а) $f(x) = \frac{x+2}{\lg|x-3|}$, б) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3, & -5 \le x \le 2, \\ 2x - 5, & 2 < x \le 4, \\ 3, & x > 4. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4\sin\sqrt{n!} + \sqrt{n^{10} - 8n + 4}}{9n^5 - 8n^4 + 3n - 7}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+25} - 5}{\sin 3x}$,

3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^3 - 5x^2 + 8}{x^3 - 8x - 7}$, 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{9x+4}{5+9x}\right)^{2x}$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2 + 8x} - \sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{25x^2 + 3}}\cdot x$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos 9x}{x^2}$,

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3 + n\cdot\sqrt[3]{n^4 - 5}\cdot\sin\frac{5n}{n^2+4}}{\sqrt[3]{n^4 + 3}}$, 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^2\, 7x}{x\sin 5x + \mathrm{tg}\, x\sin 9x}$.

Вариант №24

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|5-x|}+1$, б) $y=2-3\sqrt{4-x}$, в) $y=\arcsin(x-4)$,

г) $y=\log_3|3x-9|$, д) $y=\begin{cases} x^2+x+1, & -2<x<0, \\ \frac{1+x}{1+3x}, & 0<x<2, \\ 1-2x, & 2<x<4. \end{cases}$

2. Для функции $y=1-5x$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{x\to 1}(10x-3)=7$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n-3}{5+6n}=\frac{3}{2}$, в) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{4x+13}=5$.

4. Для последовательности $X_n=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$, $a_1=\sqrt{3}$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\frac{1}{2-X_n}$, $X_1=\frac{2}{3}$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва:

а) $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{(x^2+5x+6)^2}}$; б) $f(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x+3}, & -\infty<x\le 1, \\ \frac{2}{3}x^2, & 1<x\le 2, \\ 3x+4, & x>2. \end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+x^2-6x}{x^2+2x-3}$,

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1+8^x\cdot\sqrt{x^2+6x-2}}{1-8^{-x}-3x\cdot 8^x}$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-7}{2x+8}\right)^{3x}$,

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\cdot\sin(x-1)-(x^2-3x+2)^3}{\arcsin(x-1)^3}$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+1}\right)$,

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}8x^2-\operatorname{tg}3x^2}{x\arcsin(3x^2+2x)}$,

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1+\operatorname{tg}^2 x-\cos x}$,

8) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2+\ln(x^2-7x+11)\cdot\sin\frac{3}{x-2}}{\cos(x^2-5x+6)}$.

Вариант №25

1. Используя простейшие свойства функции, построить графики следующих функций:

а) $y=\dfrac{x^2-7x+12}{|x-3|}$, б) $y=\log_{\frac{1}{2}}|2x+8|$, в) $y=\arcsin(3x-6)$,

г) $y=2-\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2+4x+5}$, д) $y=\begin{cases}1-2x, & -1<x<1,\\ \dfrac{x+1}{2x+1}, & 1\le x\le 3,\\ x^2-2x, & x>3.\end{cases}$

2. Для функции $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}$ найти обратную. Указать области определения и множество значений прямой и обратной функций и построить их графики.
3. Доказать по определению, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n-9}{4n+3}=2$, б) $\lim\limits_{x\to 4}(3x-11)=1$, в) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{13+4x}=3$.

4. Для последовательности $X_n=\dfrac{(-1)^n(n+1)}{2n+5}$ построить последовательности X_{2K}, X_{2K+1}. Изучить их сходимость. Сходится ли исходная последовательность?
5. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентным соотношением $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3+2a_n}$, $a_1=1$, имеет конечный предел и вычислить его.
6. Для последовательности, заданной рекуррентным соотношением $X_{n+1}=\dfrac{4}{4-X_n}$, $X_1=1$, найти явное выражение и изучить сходимость.
7. Найти точки разрыва функции и исследовать характер разрыва:

а) $f(x)=\dfrac{|x|}{(x-1)\cdot x}$, б) $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1<x\le 4,\\ \log_3(x+5), & 4<x\le 22,\\ 3, & x>22.\end{cases}$

8. Найти пределы, если они существуют:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\operatorname{tg}8x}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-4}\right)^{3x}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{16n^6-5n^2+1}+\sqrt{9n^6+5n^5}}{7n^3-8n+1}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^3-6x+1\right)\cdot\sin 5x^2}{\left(x^2+4\right)\operatorname{tg}12x\cdot\arcsin\left(x^2+3x\right)}$,

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^3+1}$, 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^3+8x^2-9x-6}{x^3-1}$,

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2+3x+1}{7x^3+2}\right)^{x^2-2x+1}$, 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{1/n}+\operatorname{tg}\dfrac{n}{n^2+5}(5+\sin n)}{\operatorname{arctg}\left(n^2+3\right)}$.

Индивидуальные задания
по теме «Асимптотические разложения»

Вариант 1

1) Представить в виде $A+Bx+Cx^2+o\left(x^2\right)$ функцию $f(x)=\dfrac{e-e^{\frac{x}{\sin x}}}{x^2}$.

2) Функцию $f(x)=\left(\sqrt{3+x}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ разложить до $o\left((x-1)\right)$.

Вариант 2

1) Функцию $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$ представить в виде $A+Bx+Cx^2+o\left(x^2\right)$.

2) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$, используя асимптотическое разложение.

Вариант 3

1) Представить в виде $A+Bx+Cx^2+o\left(x^2\right)$ функцию $f(x)=\dfrac{(\cos x)^{\sin 2x}-1}{x^3}$.

2) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 6x-4\ln\cos 3x}{x^2\ln\cos 3x}$, используя асимптотическое разложение.

Вариант 4

1) Разложить функцию $\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}$ по степеням x до $o\left(x^3\right)$.

2) Представить в виде $A+B(x-1)+o(x-1)$ функцию $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Вариант5

1) Функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{\cos 2x}-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$ разложить до $o\left(x^2\right)$.

2) Представить в виде $A+B(x-1)+o(x-1)$ функцию $f(x)=x^{\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}}$.

Вариант 6

1) Представить в виде $A+Bx+o(x)$ функцию $f(x)=\dfrac{\ln\left(2e^x-1\right)}{\ln\left(3e^x-2\right)}$.

2) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\sin x}-1+\frac{x^3}{2}}{x^6}$.

Вариант 7

1) Разложить по степеням x до $o\left(x^2\right)$ функцию $f(x)=\sqrt{\cos x+\ln(\cos x+\sin 2x)}$.

2) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2+e^{x^2}\right)^{\frac{1}{\sin x^2}}$, используя асимптотическое разложение.

Вариант 8

1) Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\dfrac{2^{2x}-4}{3^{2x}-9}-\dfrac{4\ln 2}{9\ln 3}\right)}{(x-1)}$, используя асимптотическое разложение.

2) Представить в виде $A+Bx+Cx^2+o\left(x^2\right)$ функцию $f(x)=(\cos 2x)^{1/\sin^2 x}$.

Вариант 9

1) Найти $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}}\dfrac{\left(\dfrac{\ln(4x+1)-\ln 4}{\ln(4x-1)-\ln 2}-\dfrac{1}{2}\right)}{\left(x-\dfrac{3}{4}\right)}$, используя асимптотическое разложение.

2) Представить в виде $A+Bx+Cx^2+o\left(x^2\right)$ функцию $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{6}{x^2}}$.

Вариант 10

1) Представить функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{9x+1}-1}{x\cos x}$ в виде $A+Bx+Cx^2+o\left(x^2\right)$.

2) Функцию $f(x)=\left(\sqrt{3+4x}-1\right)^{\frac{1}{\ln 4x}}$ разложить до $o\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$.

Вариант 11

1) Представить в виде $A+B(x-1)+o(x-1)$ функцию $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{x+10}-3}$.

2) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}}{e}\right)^{\frac{2}{3x}}$, используя асимптотическое разложение.

Вариант 12

1) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}-\dfrac{3}{4}x^2}{x^4}$, используя асимптотическое разложение.

2) Представить в виде $A+Bx+Cx^2+o\left(x^2\right)$ функцию $f(x)=(\cos 2x)^{1/x\sin x}$.

Вариант 13

1) Разложить до $o(x)$ функцию $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{\sqrt{9+2x}-3}$.

2) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\sin x}-1+\frac{1}{2}x^3}{x^6}$, используя асимптотическое разложение.

Вариант 14

1) Разложить до $o(x^2)$ функцию $f(x)=\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}$.

2) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{1/\sin x}$, используя разложение.

Вариант 15

1) Разложить до $o\left((x-1)^2\right)$ функцию $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sin(1-x^2)}$.

2) Разложить до $o(x^5)$ функцию $f(x)=(\cos x)^{\sin 2x}-1$.

Вариант 16

1) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 3x}+\frac{5}{2}x^2}{x^4}$, используя асимптотическое разложение.

2) Разложить до $o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)$ функцию $f(x)=\left(\dfrac{1+2x}{2}\right)^{1/\ln 2x}$.

Вариант 17

1) Разложить до $o\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ функцию $f(x)=\dfrac{\ln(\operatorname{tg} x)}{2\sin x-\sqrt{2}}$.

2) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2+e^{x^2}\right)^{1/\sin x^2}$, используя асимптотическое разложение.

Вариант 18

1) Представить в виде $A+Bx+o(x)$ функцию $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$.

2) Разложить до $o(x-1)$ функцию $f(x)=\left(\sqrt{3+x}-1\right)^{1/\ln x}$.

Вариант 19

1) Разложить до $o\left(x^2\right)$ функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{4\cos 2x+x}-2}{x}$.

2) Представить функцию $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ в виде $A+B(x-1)+o(x-1)$.

Вариант 20

1) Разложить до $o\left((x-3)^2\right)$ функцию $f(x)=\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x}-1}$.

2) Разложить до $o(x)$ функцию $f(x)=\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{x+1}$.

Вариант 21

1) Разложить до $o\left(\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2\right)$ функцию $f(x)=\dfrac{\dfrac{\pi}{4}-x}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+x\right)}$.

2) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\sin 2x}-1}{x^3}$, используя асимптотическое разложение.

Вариант 22

1) Разложить до $o(x+1)$ функцию $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{\sqrt{10+x}-3}$.

2) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{1/\sin x}$, используя асимптотическое разложение.

Вариант 23

1) Разложить до $o(x-1)$ функцию $f(x)=x^{\frac{1}{1-x}}$.

2) Разложить до $o(x^2)$ функцию $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$.

Вариант 24

1) Разложить до $o(x^2)$ функцию $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x}$.

2) Разложить до $o(x-1)$ функцию $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{1/\ln x}$.

Вариант 25

1) Разложить до $o(x^2)$ функцию $f(x)=\dfrac{x+\sin 2x}{x+\sin 3x}$.

2) Разложить до $o\left((x-1)^2\right)$ функцию $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/\sin(x-1)}$.

Индивидуальные задания по теме «Исследование функций»

Вариант №1

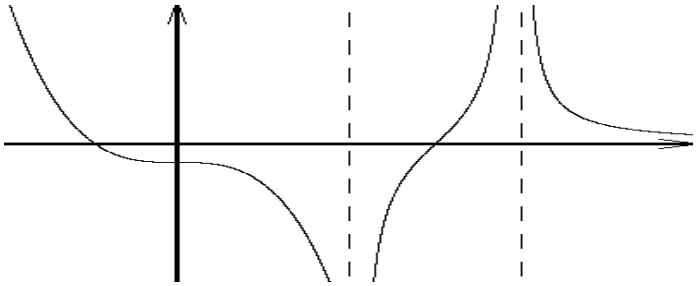
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y = 1 + \frac{4x+1}{x^2}, \qquad \text{b)}\ y = \frac{x^2}{2} + \ln x .$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y = 2x - 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} .$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y = \dfrac{x^4 - 4x^2}{(x-4)^2 (x-1)^3}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №2

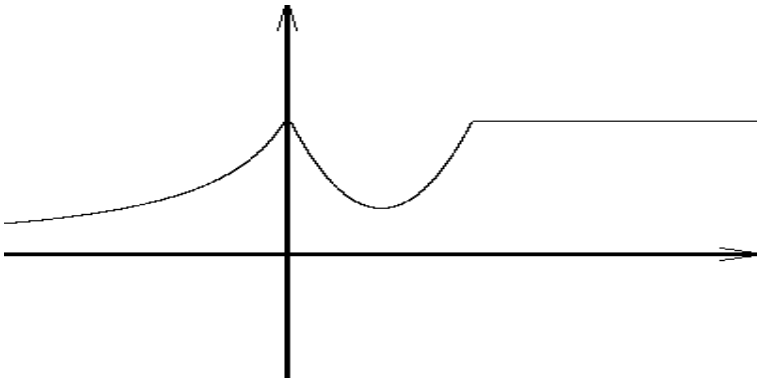
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y = \frac{4x}{(x-2)^2}, \qquad \text{b)}\ y = e^x (x-5) .$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2} .$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y = \dfrac{(x-1)(x+2)^2}{(2x-1)^2}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №3

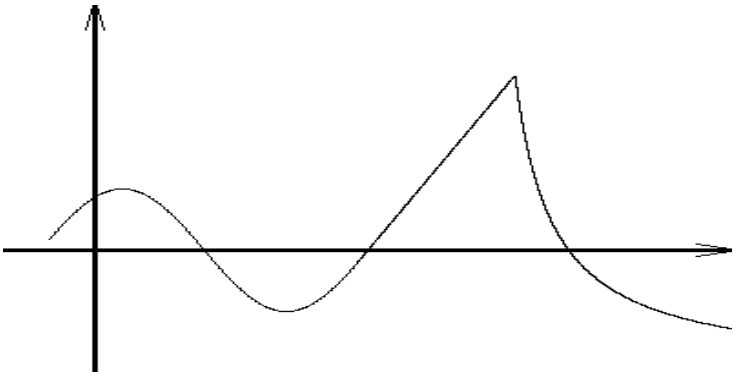
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}, \qquad \text{b)}\ y=\frac{x^4}{(x+1)^3}.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y=xe^{-x}.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y=\dfrac{(4x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2(2x+1)}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №4

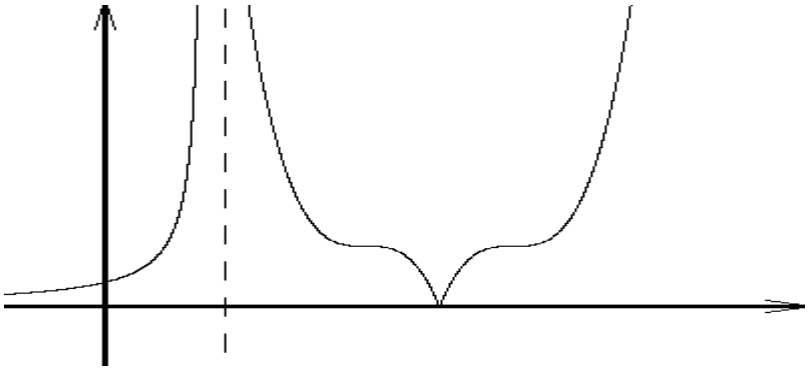
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y=\frac{2x+1}{(x+2)^2}-2, \qquad \text{b)}\ y=x^4e^{-2x^2}.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y=(1-x^2)^{2/3}.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y=\dfrac{(x-4)(x^2-9)}{x^2-5x+6}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №5

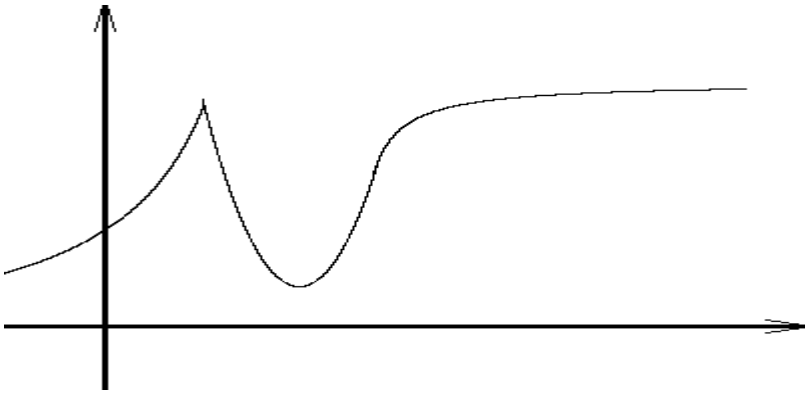
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}, \qquad \text{b)}\ y = x^2 \ln x.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y = \sqrt[3]{x^2} - x.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y = \dfrac{x^4 - 4x^3 + 2x^2}{(x-2)^2(x+1)}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №6

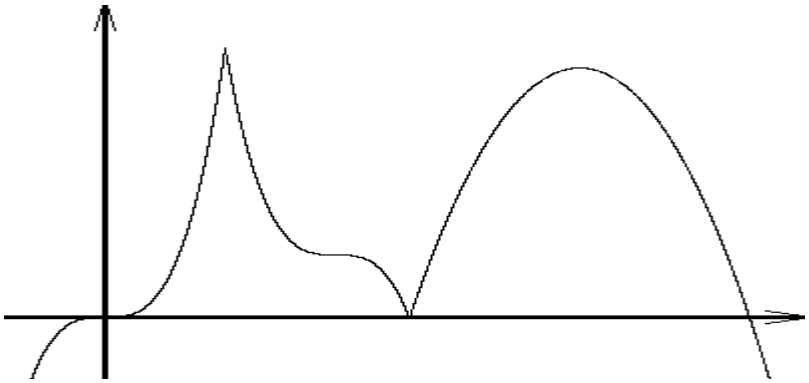
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y = \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}, \qquad \text{b)}\ y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y = x^3 e^{-x}.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y = \dfrac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2 - 9}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №7

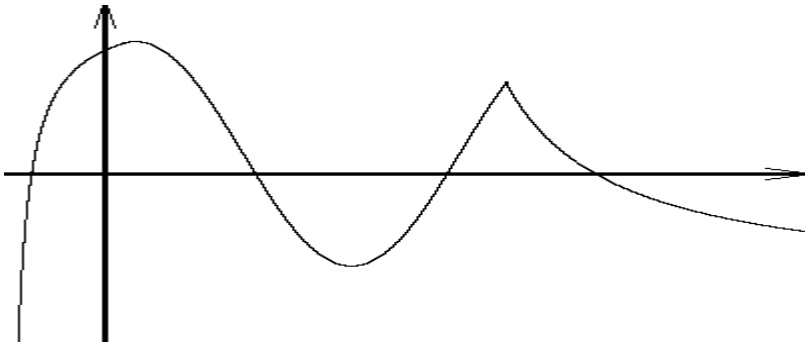
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y=\frac{x^3+1}{x}, \qquad \text{b)}\ y=x^2e^{-x^2}.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y=2x-\sqrt[3]{(x-1)^2}-2.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y=\dfrac{4x^5+12x^4}{(x+2)^2(1-x^2)}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №8

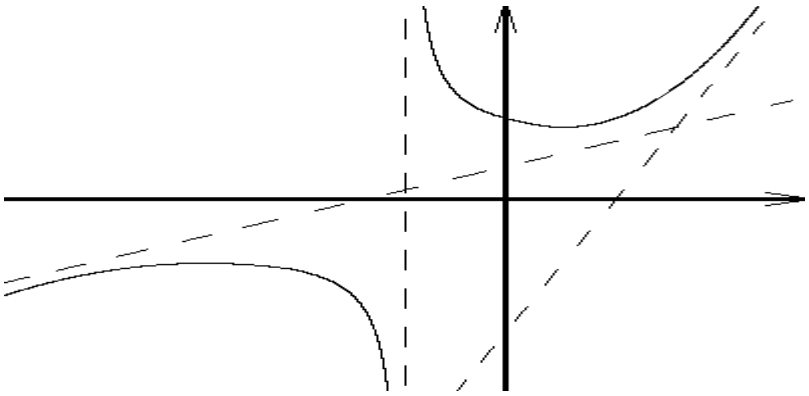
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y=\frac{x^2+3x+2}{x^2}, \qquad \text{b)}\ y=2x-1+\frac{1}{x+1}.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y=(x+1)^3\cdot\sqrt[3]{x^2}.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y=\dfrac{x^4+2x^3-3x^2}{(x^2-4)(x+1)^2}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №9

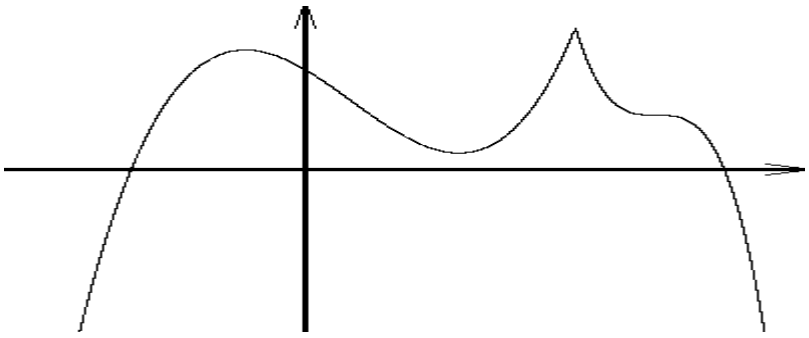
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y = 18\frac{1-x}{x^2}, \qquad \text{b)}\ y = e^{-x}(x+4).$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y = \frac{(4-x)^3}{9(2-x)}.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y = \dfrac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x-3)(x^2+1)}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №10

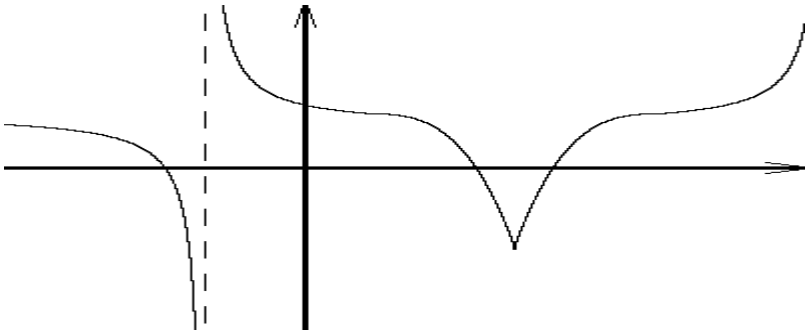
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y = \frac{x - 1/2}{(x+2)^2}, \qquad \text{b)}\ y = \frac{\ln x}{x}.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} + 1.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 - x}}{x^2 - x - 6}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №11

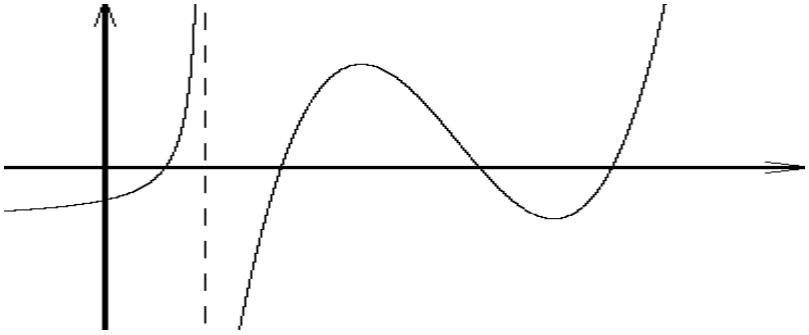
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ \ y=\frac{x^2}{(x-1)^2}, \qquad \text{b)}\ \ y=x^2e^{-x}.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y=3\sqrt[3]{(x+1)^2}-2x.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №12

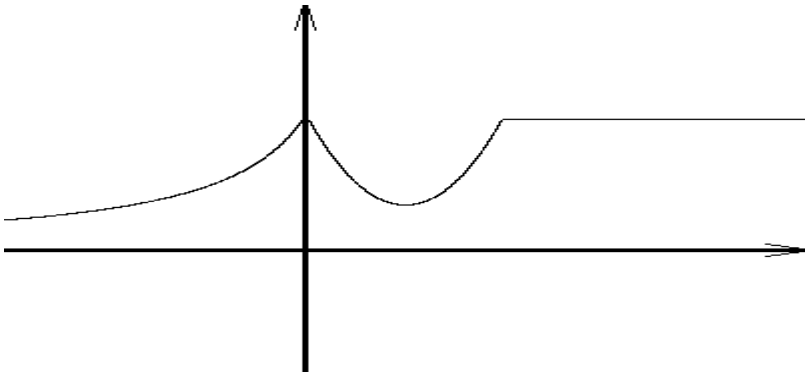
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ \ y=\frac{4x}{(x-2)^2}, \qquad \text{b)}\ \ y=x^2(\ln x-1).$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y=x^{2/3}(x-5).$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y=\frac{3x^2-2x-1}{(x^2-4)(x+2)}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №13

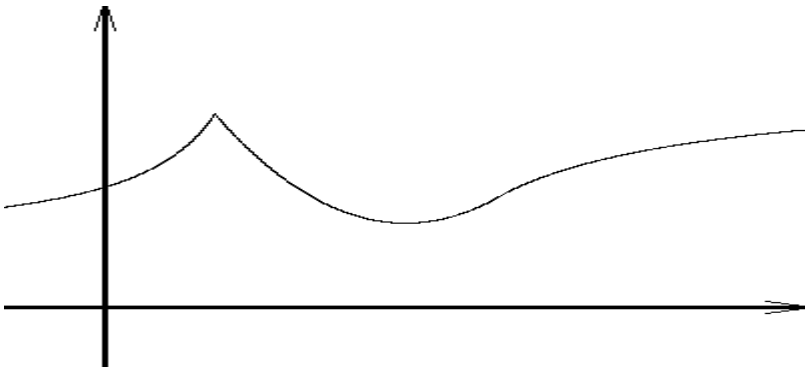
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y = x\,e^{-x^2/2}, \qquad \text{b)}\ y = \frac{x}{(x+2)^2}.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y = 2x - 3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y = \dfrac{3x^2+4x+1}{(2x+1)(x-1)(x+3)}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №14

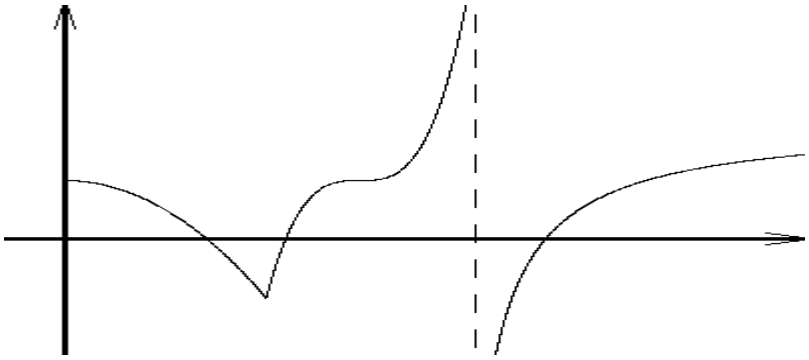
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y = \frac{4x^3+1}{x}, \qquad \text{b)}\ y = 2x^3e^{-x}.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y = x^{2/3} + (x-2)^{2/3}.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y = \sqrt{x^2(x-1)^2(x+2)}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №15

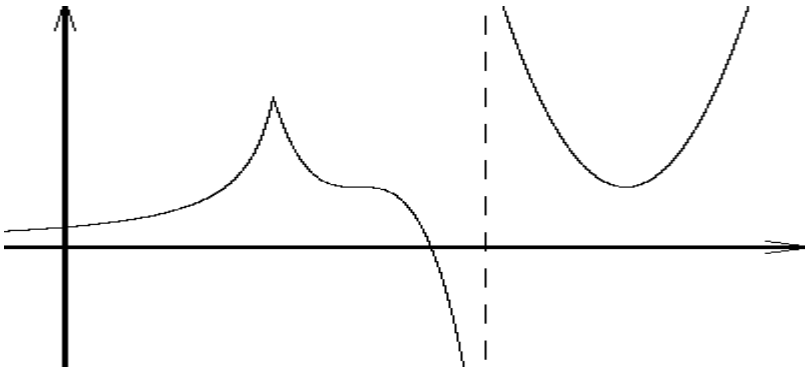
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y=\frac{x-2}{(x+3)^3}-1, \qquad \text{b)}\ y=e^x(x+2).$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y=3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}-2x+2.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y=\dfrac{(x^2-3x-4)(x-3)}{(x+5)(x+3)}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №16

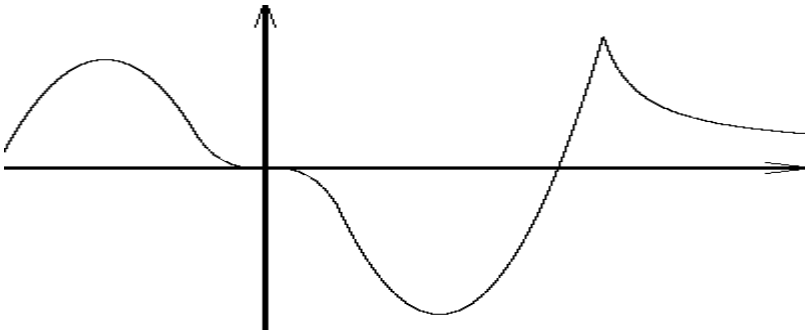
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y=\frac{1-x^2}{1+x^2}, \qquad \text{b)}\ y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y=(x+1)^{2/3}-x^{2/3}+1.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y=\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^2-9}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №17

1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

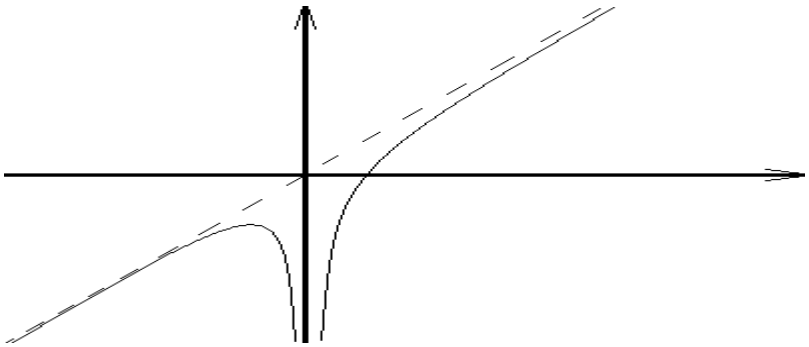
$$\text{a)}\ y=\frac{x^3+1}{x^2}, \qquad \text{b)}\ y=-2x^2e^x.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y=3\cdot\sqrt[3]{(x+4)^2}-x.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+4)^7(x-2)^2}}{\sqrt{(x+2)^2(x+5)}}$.

4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №18

1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

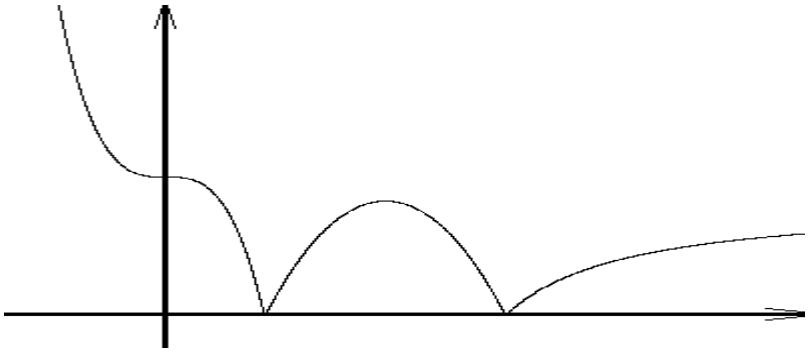
$$\text{a)}\ y=1+\frac{4x+1}{x^2}, \qquad \text{b)}\ y=xe^{-x^2/2}.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y=2x-3\cdot\sqrt[3]{x^2}.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y=\dfrac{\sqrt{x^2(x-2)}}{x^2-7x+12}$.

4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №19

1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

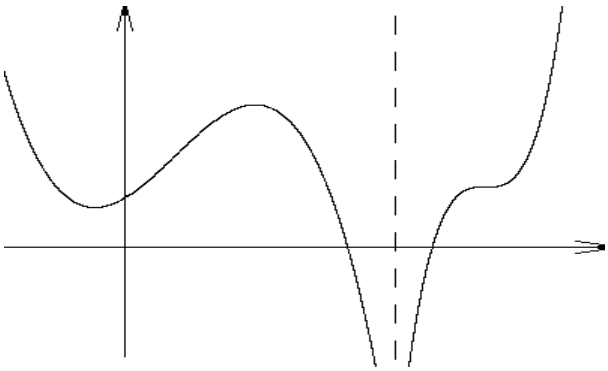
   a) $y = -1 + \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$, b) $y = (x+1)^2(x-1)^3$.

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

   $$y = (1-x^2)^{2/3}.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$.

4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №20

1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

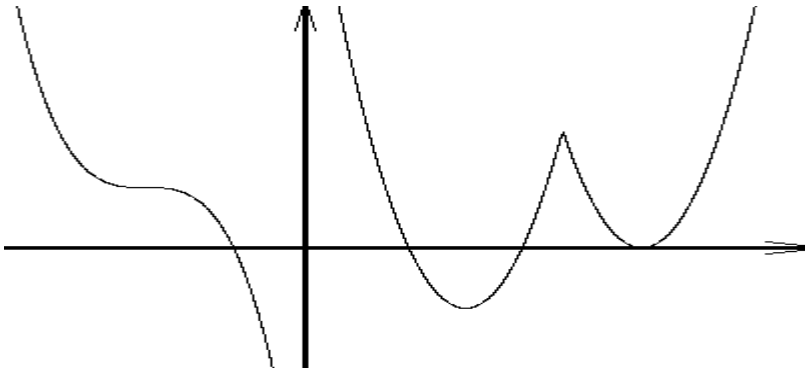
   a) $y = \dfrac{x-2}{(x+3)^2} - 1$, b) $y = x\,(\ln x - 3)$.

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

   $$y = x \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y = \dfrac{4x^5 + 13x^4}{(x+2)^2(1-x^2)}$.

4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №21

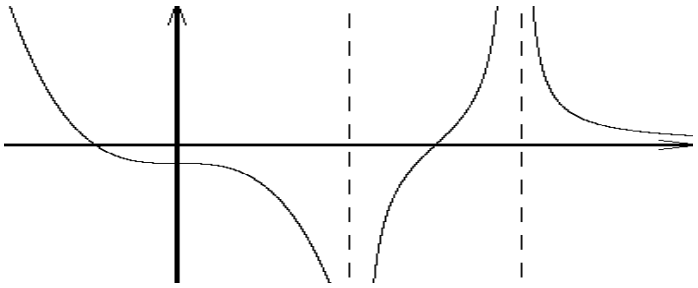
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y = 1 + \frac{4x+1}{x^2}, \qquad \text{b)}\ y = \frac{x^2}{2} + \ln x.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y = 2x - 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y = \dfrac{x^4 - 4x^2}{(x-4)^2(x-1)^3}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №22

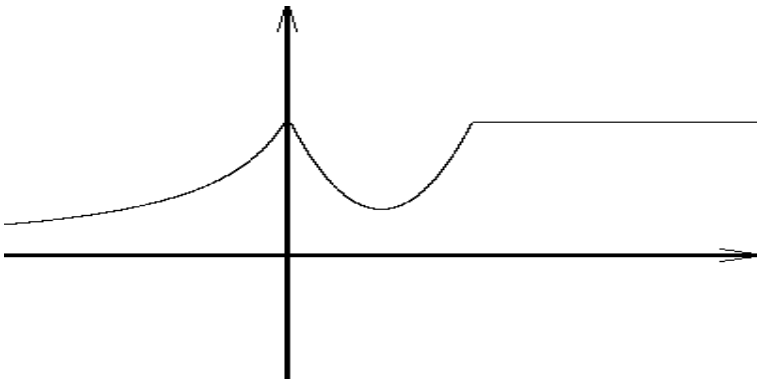
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y = \frac{4x}{(x-2)^2}, \qquad \text{b)}\ y = e^x(x-5).$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y = \dfrac{(x-1)(x+2)^2}{(2x-1)^2}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №23

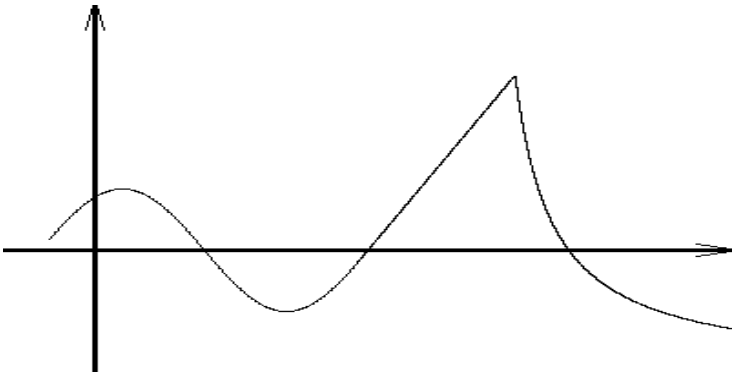
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}, \qquad \text{b)}\ y=\frac{x^4}{(x+1)^3}.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y=xe^{-x}.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y=\dfrac{(4x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2(2x+1)}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №24

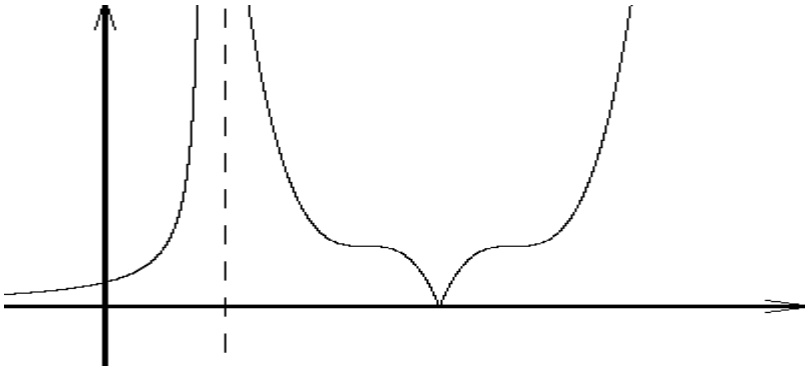
1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

$$\text{a)}\ y=\frac{2x+1}{(x+2)^2}-2, \qquad \text{b)}\ y=x^4e^{-2x^2}.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y=(1-x^2)^{2/3}.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y=\dfrac{(x-4)(x^2-9)}{x^2-5x+6}$.
4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Вариант №25

1. Провести исследование по краткой схеме и построить графики функций

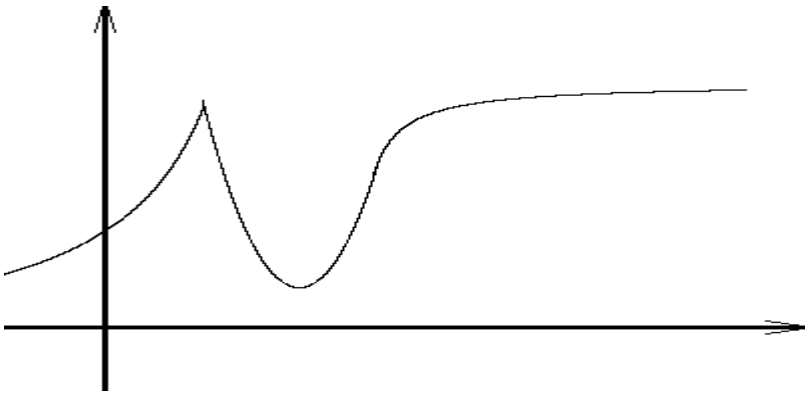
$$\text{a)}\ y = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}, \qquad \text{b)}\ y = x^2 \ln x.$$

2. Провести исследование по полной схеме и построить график функции

$$y = \sqrt[3]{x^2} - x.$$

3. Построить с минимальным использованием математического аппарата эскиз графика функции $y = \dfrac{x^4 - 4x^3 + 2x^2}{(x-2)^2(x+1)}$.

4. По графику функции построить примерные графики её первой и второй производной.



Индивидуальные задания по теме «Неопределенные интегралы»

Вариант 1

1. $\int e^x \sqrt[3]{4+e^x}\,dx$

2. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$

3. $\int \frac{\left(1-x^2\right)x}{1+x^4}\,dx$

4. $\int \frac{2}{x^2-2x+5}\,dx$

5. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3x-10}}\,dx$

6. $\int (4-3x)e^{-3x}dx$

7. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}\,dx$

8. $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+8)}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt{(x+2)^3}}\,dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}\,dx$

11. $\int \frac{1}{\cos^3 x \sin x}\,dx$

12. $\int \frac{1}{3+5\sin x+3\cos x}\,dx$

13. $\int \frac{2\operatorname{tg} x-5}{(4\cos x-\sin x)^2}\,dx$

14. $\int \frac{xe^x}{\left(1+x\right)^2}\,dx$

Вариант 2

1. $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$

2. $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^6+7}}dx$

3. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$

5. $\int \frac{3x-2}{x^2+2x+5}\,dx$

6. $\int (x^2-x+1)\ln x\,dx$

7. $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}\,dx$

8. $\int \frac{2x-3}{(x+1)^2(x^2+4)}\,dx$

9. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

10. $\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

11. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$

12. $\int \frac{1}{3\sin x+2\cos x}\,dx$

13. $\int \frac{2-\operatorname{tg} x}{(\sin x+3\cos x)^2}\,dx$

14. $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

Вариант 3

1. $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2. $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x-1)^4}\,dx$

3. $\int \frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

4. $\int \frac{3}{x^2-4x+8}\,dx$

5. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$

6. $\int (3x+4)e^{3x}dx$

7. $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}\,dx$

8. $\int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x^3}}\,dx$

10. $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

11. $\int \frac{\cos 4x}{\sin^4 2x}\,dx$

12. $\int \frac{1}{5-4\sin x+3\cos x}\,dx$

13. $\int \frac{12+\operatorname{tg} x}{3\sin^2 x+12\cos^2 x}\,dx$

14. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}}\,dx$

Вариант 4

1. $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}\,dx$

2. $\int \frac{7^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

3. $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\,dx$

4. $\int \frac{4}{\sqrt{-x^2+2x+2}}\,dx$

5. $\int \frac{4x-1}{x^2+x+1}\,dx$

6. $\int (4x-2)\cos 2x\,dx$

7. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}\,dx$

8. $\int \frac{1}{x^2(x-1)^2}\,dx$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx$

11. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

12. $\int \frac{1}{5+3\cos x}\,dx$

13. $\int \frac{3+2\operatorname{tg} x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1}\,dx$

14. $\int \left(\arcsin x\right)^2 dx$

Вариант 5

1. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}+3}{\sqrt{2x-1}}\,dx$

2. $\int \frac{1}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3. $\int \frac{4+\sqrt{4+9x^2}}{4+9x^2}\,dx$

4. $\int \frac{1}{x^2-2x-8}\,dx$

5. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx$

6. $\int (4-16x)\sin 4x\,dx$

7. $\int \frac{2x^3-1}{\left(x^2+x-6\right)x^2}\,dx$

8. $\int \frac{x^4+2x^2+4}{x^3+1}\,dx$

9. $\int \frac{1-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}\,dx$

11. $\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}\,dx$

12. $\int \frac{1}{\sin^2 x+tg^2 x}\,dx$

13. $\int \frac{2\operatorname{ctg} x+1}{(2\sin x+\cos x)^2}\,dx$

14. $\int \left(\operatorname{arctg} x\right)^2 x\,dx$

Вариант 6

1. $\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}\,dx$

2. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+9}\,dx$

3. $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}\,dx$

4. $\int \frac{3}{\sqrt{9x^2+12x+5}}\,dx$

5. $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+4}\,dx$

6. $\int (5x-2)e^{3x}dx$

7. $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}\,dx$

8. $\int \frac{3x^2+x-2}{x^3-2x^2+4x-8}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx$

10. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$

11. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\cos^4 x+5}}\,dx$

12. $\int \frac{1}{5\cos x+3}\,dx$

13. $\int \frac{6\operatorname{tg} x}{3\sin 2x+5\cos^2 x}\,dx$

14. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

Вариант 7

1. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}\,dx$

2. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

3. $\int \frac{\operatorname{arctg} x+3x}{1+x^2}\,dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$

5. $\int \frac{x}{x^2-4x-5}\,dx$

6. $\int (1-6x)e^{2x}dx$

7. $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$

8. $\int \frac{x^5}{16-x^4}\,dx$

9. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

10. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{(4-x^2)^5}}\,dx$

11. $\int \frac{1}{\operatorname{tg}^8 x}\,dx$

12. $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx$

13. $\int \frac{3\operatorname{tg} x+1}{2\sin 2x-5\cos 2x+1}\,dx$

14. $\int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx$

Вариант 8

1. $\int \frac{1+\ln^2(x-1)}{x-1}\,dx$

2. $\int \frac{3x^2-2x+7}{\sqrt{x^3-x^2+7x-2}}\,dx$

3. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

4. $\int \frac{3}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx$

5. $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1}\,dx$

6. $\int x\ln(x^2-1)\,dx$

7. $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}\,dx$

8. $\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

11. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^4 x}\,dx$

12. $\int \frac{1}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}\,dx$

13. $\int \frac{2\operatorname{tg}^2 x-11\operatorname{tg} x-22}{4-\operatorname{tg} x}\,dx$

14. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^3}\,dx$

Вариант 9

1. $\int \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}\,dx$

2. $\int e^{-x^3} x^2 dx$

3. $\int \frac{x^3+x}{1+x^4}\,dx$

4. $\int \frac{2}{4x^2+4x+5}\,dx$

5. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

6. $\int (4x+3)\sin 5x\,dx$

7. $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,dx$

8. $\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx$

10. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\,dx$

11. $\int \frac{\cos x}{(1-\cos x)^2}\,dx$

12. $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$

13. $\int \frac{4\operatorname{tg} x - 5}{1-\sin 2x + 4\cos^2 x}\,dx$

14. $\int \frac{x\ln x}{\left(x^2-1\right)^2}\,dx$

Вариант 10

1. $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\,dx$

2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6-4}}\,dx$

3. $\int \frac{1+\sqrt{1+4x^2}}{1+4x^2}\,dx$

4. $\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx$

5. $\int \frac{x+4}{\sqrt{-x^2-x+2}}\,dx$

6. $\int (2-4x)\sin 2x\,dx$

7. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}\,dx$

8. $\int \frac{x^4+2}{x^4+x^3-2x^2}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

11. $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^4 x}\,dx$

12. $\int \frac{1}{5+2\sin x-\cos x}\,dx$

13. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x - 5\cos^2 x + 4}\,dx$

14. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x)^2(1-x)}\,dx$

Вариант 11

1. $\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2. $\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$

3. $\int \frac{\ln x}{x\left(1-\ln^2 x\right)}\,dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{-3x^2-6x+4}}\,dx$

5. $\int \frac{x}{x^2-5x+4}\,dx$

6. $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx$

7. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x}\,dx$

8. $\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}\,dx$

9. $\int \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}\,dx$

10. $\int \frac{1}{x\sqrt{9+x^2}}\,dx$

11. $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

12. $\int \frac{1}{4+5\sin^2 x-3\cos^2 x}\,dx$

13. $\int \frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x-4}\,dx$

14. $\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}\,dx$

Вариант 12

1. $\int \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}\,dx$

2. $\int \frac{7x+2}{\sqrt{x^2+10}}\,dx$

3. $\int \frac{2x+\left(\arccos 3x\right)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x+1}}\,dx$

5. $\int \frac{2x-1}{5x^2+2x+1}\,dx$

6. $\int (4x-3)e^{-2x}dx$

7. $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)}\,dx$

8. $\int \frac{2x+5}{x^3-x^2+2x-2}\,dx$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}\,dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}\,dx$

11. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$

12. $\int \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx$

13. $\int \frac{3\operatorname{tg} x+7}{(\sin x+2\cos x)^2}\,dx$

14. $\int \frac{1}{\left(1-2^x\right)^2}\,dx$

Вариант 13

1. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$

2. $\int (8\cos\frac{x}{3}-5)^2 \sin\frac{x}{3}\,dx$

3. $\int \frac{8x-\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}\,dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx$

5. $\int \frac{x+6}{x^2-2x+17}\,dx$

6. $\int (\sqrt{2}-8x)\sin 3x\,dx$

7. $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}\,dx$

8. $\int \frac{3x^2-4}{(x+7)(x^2-2x+1)}\,dx$

9. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$

10. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

11. $\int \operatorname{tg}^7 x\,dx$

12. $\int \frac{1}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}\,dx$

13. $\int \frac{5\operatorname{tg}x+2}{2\sin 2x+5}\,dx$

14. $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$

Вариант 14

1. $\int \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}\,dx$

2. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

3. $\int \frac{9+\sqrt{9+x^2}}{9+x^2}\,dx$

4. $\int \frac{1}{x^2-3x-10}\,dx$

5. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}\,dx$

6. $\int (x^2-2x+3)\ln x\,dx$

7. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)x}\,dx$

8. $\int \frac{x^4-1}{x^3+4x}\,dx$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{x+1}}\,dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,dx$

11. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^7 x}\,dx$

12. $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$

13. $\int \frac{3\operatorname{tg}^2 x-50}{2\operatorname{tg}x+7}\,dx$

14. $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,dx$

Вариант 15

1. $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^5}\,dx$

2. $\int \frac{\sin x}{4+\cos^2 x}\,dx$

3. $\int \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\,dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x-1}}\,dx$

5. $\int \frac{4x-3}{x^2-2x+6}\,dx$

6. $\int (5x+6)\cos 2x\,dx$

7. $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}\,dx$

8. $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}\,dx$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}\,dx$

11. $\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$

12. $\int \frac{1}{3\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx$

13. $\int \frac{8\operatorname{tg} x}{8\sin^2 x+3\cos^2 x-7}\,dx$

14. $\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}\operatorname{arctg} x\,dx$

Вариант 16

1. $\int \frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\,dx$

2. $\int \cos^{11} 2x \sin 2x\,dx$

3. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

4. $\int \frac{1}{x^2+x-12}\,dx$

5. $\int \frac{4x}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx$

6. $\int x\sin x\cos x\,dx$

7. $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}\,dx$

8. $\int \frac{2x-5}{(x^2-5x+4)^3}\,dx$

9. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}\,dx$

10. $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$

11. $\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}\,dx$

12. $\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx$

13. $\int \frac{4+\operatorname{tg} x}{2\sin^2 x+18\cos^2 x}\,dx$

14. $\int \frac{\left(3+x^2\right)^2 x^3}{\left(1+x^2\right)^3}\,dx$

Вариант 17

1. $\int \frac{\sqrt{4+\ln 2x}}{x}\,dx$

2. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

3. $\int \frac{4\sqrt{1-x^2}+3x^2}{x^2-1}\,dx$

4. $\int \frac{4}{x^2+10x+29}\,dx$

5. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx$

6. $\int x\arcsin\frac{1}{x}\,dx$

7. $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}\,dx$

8. $\int \frac{x^4-2x^3+3x+4}{x^3+1}\,dx$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$

10. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$

11. $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$

12. $\int \frac{1}{\sin^6 x+\cos^6 x}\,dx$

13. $\int \frac{1+\operatorname{ctg} x}{(\sin x+2\cos x)^2}\,dx$

14. $\int \frac{e^x\left(e^x+1\right)}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

Вариант 18

1. $\int \frac{\sin x+1}{\sqrt[3]{3+\cos x-x}}\,dx$

2. $\int \frac{x+8}{x^2+3}\,dx$

3. $\int \frac{x-\left(\operatorname{arctg} x\right)^4}{1+x^2}\,dx$

4. $\int \frac{1}{x^2-18x+80}\,dx$

5. $\int \frac{8x-11}{\sqrt{-x^2+2x+5}}\,dx$

6. $\int x\ln(x^2+1)\,dx$

7. $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}\,dx$

8. $\int \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1)(x+1)}\,dx$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$

10. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-3}}\,dx$

11. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$

12. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$

13. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x-7}\,dx$

14. $\int x\operatorname{arctg} x\ln\left(1+x^2\right)dx$

Вариант 19

1. $\int \frac{1}{\cos^2 x(3\,\mathrm{tg}\,x+1)}\,dx$

2. $\int \frac{x}{x^4+4}\,dx$

3. $\int \frac{x\left(\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

4. $\int \frac{1}{9x^2-12x+2}\,dx$

5. $\int \frac{2-5x}{4x^2+4x+2}\,dx$

6. $\int x\ln^2 x\,dx$

7. $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x}\,dx$

8. $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}\,dx$

9. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}\,dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,dx$

11. $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$

12. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$

13. $\int \frac{6+\mathrm{tg}\,x}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}\,dx$

14. $\int x\arccos\frac{1}{x}\,dx$

Вариант 20

1. $\int \frac{(\arccos 3x)^4-x}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

2. $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$

3. $\int \frac{2-3\,\mathrm{tg}^2 x}{\sin^2 x}\,dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}\,dx$

5. $\int \frac{x}{9x^2-12x+2}\,dx$

6. $\int (2-3x)\cos 4x\,dx$

7. $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x}\,dx$

8. $\int \frac{2x+1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$

9. $\int x\sqrt[3]{2+x}\,dx$

10. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\,dx$

11. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx$

12. $\int \frac{1}{\sin^2 x+4\cos^2 x}\,dx$

13. $\int \frac{5+2\,\mathrm{tg}\,x}{(5-\mathrm{tg}\,x)\sin 2x}\,dx$

14. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$

Вариант 21

1. $\int \frac{x-4\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

3. $\int \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+3}}\,dx$

5. $\int \frac{x-3}{-x^2-2x+3}\,dx$

6. $\int (2x-5)e^{3x}dx$

7. $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)}\,dx$

8. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}\,dx$

10. $\int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}}\,dx$

11. $\int \mathrm{ctg}^6 x\,dx$

12. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x-\cos^3 x}\,dx$

13. $\int \frac{\mathrm{tg}\,x+2}{\sin^2 x+2\cos^2 x-3}\,dx$

14. $\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}\,dx$

Вариант 22

1. $\int \frac{3\sqrt{x}-2\cos x^{-2}}{x^3}\,dx$

2. $\int tg2x\,dx$

3. $\int \frac{4x+3}{\sqrt{x^2-5}}\,dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+8}}\,dx$

5. $\int \frac{x+2}{x^2+3x+5}\,dx$

6. $\int (\sqrt{2}x-3)\cos 2x\,dx$

7. $\int \frac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)}\,dx$

8. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$

10. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2-1}}\,dx$

11. $\int \frac{1}{\cos^4 x\sin^2 x}\,dx$

12. $\int \frac{1}{5\sin x+\cos x}\,dx$

13. $\int \frac{12}{(6+5\,\mathrm{tg}\,x)\sin 2x}\,dx$

14. $\int \sqrt{x}\,\ln^2 x\,dx$

Вариант 23

1. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}\,dx$

2. $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$

3. $\int \frac{\operatorname{arctg} x+3x}{1+x^2}\,dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+2}}\,dx$

5. $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}\,dx$

6. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$

7. $\int \frac{2x^4-5x^2-8x-8}{x(x-2)(x+2)}\,dx$

8. $\int \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-9)^3}}\,dx$

11. $\int \frac{1}{\sin^3 x\cos x}\,dx$

12. $\int \frac{1}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}\,dx$

13. $\int \frac{8+\operatorname{tg} x}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}\,dx$

14. $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

Вариант 24

1. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}-7\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

2. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}\,dx$

3. $\int \frac{3-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\,dx$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-3x+3}}\,dx$

5. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}\,dx$

6. $\int (4x+7)\sin 3x\,dx$

7. $\int \frac{3x^3-x^2-12x-2}{x(x+1)(x-2)}\,dx$

8. $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

9. $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx$

10. $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2+1}}\,dx$

11. $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$

12. $\int \frac{1}{5+4\sin x}\,dx$

13. $\int \frac{3\operatorname{tg}^2 x-1}{\operatorname{tg}^2 x+5}\,dx$

14. $\int x\left(\operatorname{arctg} x\right)^2 dx$

Индивидуальные задания по теме «Определенные интегралы»

Вариант 1

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \ln(x+1)dx$; б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; в) $\int\limits_0^{\sqrt{a}} x^2 \cdot \sqrt{a-x^2}\, dx$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=\sin^3 x$ на отрезке $[0, \pi/2]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos^3 x}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=-2y^2$, $x=1-3y^2$.

5. Вычислить площадь фигуры, лежащей вне круга $\rho=a$ и ограниченной кривой $\rho=2a\cos 3\varphi$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $(y-1)^2=x$, $y=2$, $x=0$,

а) вокруг оси Oy, б) вокруг оси Ox.

7. Вычислить длину одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Вариант 2

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^2 x^3 e^{x^2} dx$; б) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$; в) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=\sin^2 x$ на отрезке $[0, \pi]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_8^{10} \frac{x+1}{x^3+2} dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, заключенной между параболой $y=-x^2-2x+3$, касательной к ней в точке $M(2,-5)$ и осью ординат.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностью $\rho=a$, кардиоидой $\rho=a(1-\cos\varphi)$ и содержащей точку с декартовыми координатами $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

6. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$,

а) вокруг оси Ox, б) вокруг оси Oy.

7. Вычислить длину астроиды $x=a\cdot\cos^3 t$, $y=a\cdot\sin^3 t$.

Вариант 3

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx$; б) $\int\limits_4^{12} \frac{\sqrt{2x+1}}{x}dx$; в) $\int\limits_{2\sqrt{2}}^{4} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4}dx$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=\cos^2 x$ на отрезке $[-\pi,\pi]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3+x^2}{8+x^7}dx$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=10x+25,\quad y^2=-6x+9$.

5. Вычислить площадь одного лепестка кривой $\rho=4\sin^2\varphi$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной полукубической параболой $y^2=x^3$, осью Ox и прямой $x=1$,

а) вокруг оси Ox,

б) вокруг оси Oy.

7. Найти длину дуги кривой $x=\left(t^2-2\right)\cdot\sin t+2t\cdot\cos t$, $y=\left(2-t^2\right)\cdot\cos t+2t\cdot\sin t$, заключенной между точками, соответствующими значениям параметра $t_1=0,\quad t_2=\pi$.

Вариант 4

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$; б) $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$; в) $\int\limits_1^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=3x^2+2x-1$ на отрезке $[1,5]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_1^{2} \frac{x^3+1}{x^5+1}dx$.

4. Найти площадь фигуры, лежащей выше оси Ox и ограниченной линиями $y^2=4x$, $y=2x-4$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ и лежащей внутри окружности $\rho=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $x^2-y^2=a^2,\quad x=\pm 2a$,

а) вокруг оси Ox,

б) вокруг оси Oy.

7. Найти длину дуги кривой $x=e^t\cdot\cos t,\quad y=e^t\cdot\sin t$, заключенной между точками, соответствующими значениям параметра $t_1=0,\quad t_2=\ln\pi$.

Вариант 5

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}dx$; в) $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

2. Найти среднее значение функции $f(x) = \cos^3 x$ на отрезке $[0, \pi/2]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt{3+x^3}}dx$.

4. Найти площадь фигуры, заключенной между параболами $y = 4x^2$, $y = \frac{x^2}{9}$ и прямой $y = 2$.

5. Вычислить площадь четырехлепестковой розы $\rho = a\sin 4\varphi$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1, \quad x = -1, \quad x = 1, \quad y = 0$,

а) вокруг оси Ox,

б) вокруг оси Oy.

7. Вычислить длину дуги кривой $x = 8at^3, \quad y = 3a\left(2t^2 - t^4\right)$, расположенной над осью OX.

Вариант 6

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$; б) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$; в) $\int\limits_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4}dx$.

2. Найти среднее значение функции $f(x) = \sin^3 x \cdot \sqrt{\cos x}$ на отрезке $[0, \pi/2]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_0^2 \frac{x^2+3}{x^3+2}dx$.

4. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y = 2^x, \; y + 2 = 2^x, \; x = 0, \quad y = 2$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $\rho = 2\cos\varphi, \quad \rho = 1$ (вне кривой $\rho = 1$).

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 1, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{\frac{3x}{2}}$,

а) вокруг оси Ox,

б) вокруг оси Oy.

7. Найти длину дуги кривой $x = 8\sin t + 6\cos t, \quad y = 6\sin t - 8\cos t$.

Вариант 7

1. Вычислить интегралы: а) $\int\limits_0^1 (x-1)e^{-x}dx$; б) $\int\limits_1^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{4x+5}}$; в) $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(2-x^2\right)^3}}$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=3^x-\ln(x+1)$ на отрезке $[0,2]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_0^2 e^{x-x^2}\,dx$.

4. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y=x^3$, $y=x$, $y=2x$ $(x>0)$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностью $\rho=a$, кардиоидой $\rho=a(1-\cos\varphi)$ и содержащей точку $M\left(-\frac{a}{2},0\right)$.

6. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $x^2-y^2=4,\quad y=\pm 2,\quad x=0$.

а) вокруг оси Oy, б) вокруг оси Ox.

7. Вычислить длину дуги полукубической параболы $x=t^2,\ y=\frac{2}{3}t^3$, отсеченной прямой $x=8$.

Вариант 8

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$; б) $\int\limits_5^{12} \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$; в) $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}$ на отрезке $[0,\pi/4]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{4+5x^3}}dx$.

4. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $x=y^2,\quad x=\frac{3}{4}y^2+1$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностью $\rho=a$, кардиоидой $\rho=a(1-\cos\varphi)$ и содержащей точку $M\left(-\frac{3}{2}a,0\right)$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=e^x,\quad y=0,\ x=0,\quad x=2$,

а) вокруг оси Ox, б) вокруг оси Oy.

7. Найти длину дуги логарифмической спирали $x=e^t\cdot\sin t,\quad y=e^t\cdot\cos t$, заключенной между точками, соответствующими значениям параметра $t_1=0,\quad t_2=\frac{\pi}{2}$.

Вариант 9

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{64} \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$; б) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{6} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}}\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{1} (x-4)\cdot \operatorname{arctg} x\,dx$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=x^3\sqrt{16-x^4}$ на отрезке $[0;2]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x^5+7}}\,dx$.

4. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y=x,\ \ x=0,$ $y^2\left(x^2+4\right)=32$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho=2(1+\cos\varphi)$, $\rho=2$ и содержащей точку $M(1,0)$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2-y=x,\ \ x=0$,

а) вокруг оси Ox, б) вокруг оси Oy.

7. Найти длину дуги кривой $x=2\cdot\cos^3 t,\ \ y=\sin^3 t$.

Вариант 10

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x\cdot\ln(\sin x)\,dx$; б) $\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$; в) $\int\limits_{-1}^{0} (x^2+1)\cdot\cos x\,dx$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=\frac{1}{x^2+4x-5}$ на отрезке $[-3,0]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_{0}^{2} x^4\cdot e^{-x^2}\,dx$.

4. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями

$$y^3-y=x,\ \ y=-(1+x)^2,\ \ y=0.$$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho=2(1+\cos\varphi)$, $\rho=2$ и содержащей точку $M(-1,0)$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x(3-x),\ \ y=x$,

а) вокруг оси Ox, б) вокруг оси Oy.

7. Найти длину дуги кривой $x=6at^5,\ \ y=5at\left(1-t^8\right)$, отсеченной осью OX

Вариант 11

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \cdot \ln(\cos x)dx$; б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}$; в) $\int\limits_{-2}^0 (x^2-4)\cdot\cos(3x)dx$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=\frac{3x-1}{x^2+2x+5}$ на отрезке $[-3;1]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_{-2}^4 x^2\cdot e^{-x^2}dx$.

4. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{x^2}{2}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=2+\cos 2\varphi$ и лежащей вне линии $\rho=2+\sin\varphi$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $2y=x^2$, $2x+2y-3=0$, $x=0$ $(x\ge 0)$,

а) вокруг оси Ox, б) вокруг оси Oy.

7. Найти длину дуги кривой $x=e^t\cdot\cos t$, $y=e^t\cdot\sin t$, заключенной между точками, соответствующими значениям параметра $t_1=0$, $t_2=1$.

Вариант 12

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x-\operatorname{arctg}^4 x}{1+x^2}dx$; б) $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} (1-5x^2)\cdot\sin x dx$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=\ln^2 x$ на отрезке $[1,\ e]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_{-1}^1 e^x\cdot\sqrt{1-x^2}dx$.

4. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y^2=2x+1$, $y=x-1$.

5. Вычислить площадь общей части фигур, ограниченных линиями $\rho=3+\cos 4\varphi$, $\rho=2-\cos 4\varphi$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{x^2}{2}+2x+2$ и $y=2$,

а) вокруг оси Ox, б) вокруг оси Oy

7. Найти длину дуги кривой $x=a(3\cos t-\cos 3t)$, $y=a(3\sin t-\sin 3t)$.

Вариант 13

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^2 (2x-5)\cdot e^{-3x}dx$; б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{5-3\cos x}$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=\arccos 2x$ на отрезке $\left[0,\ \frac{1}{4}\right]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x^2}{1+x^3}dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=(y-2)^2$, $x=4y-8$.

5. Вычислить площадь части фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ и лежащей вне линии $\rho=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

6. Фигура ограничена линиями $y=e^x$, $y=e$, $x=0$. Найти объем тела, образованного вращением этой фигуры а) вокруг оси Ox , б) вокруг оси Oy .

7. Найти длину дуги кривой $x=e^t(\cos t+\sin t)$, $y=e^t(\cos t-\sin t)$, заключенной между точками, соответствующими значениям параметра $t_1=0$, $t_2=1$.

Вариант 14

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2+6x+5}$; б) $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{dx}{2+3\cos x}$; в) $\int\limits_{-2}^0 (x^2+2)\cdot e^{x/2}dx$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=x\cdot\cos 2x$ на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_{-2}^2 \frac{e^{-x^2}}{1+x^2}dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=4-y^2$, $x=y^2-2y$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho=a\sin 5\varphi$ и лежащей вне круга $\rho=\frac{a}{2}$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$,
а) вокруг оси Ox , б) вокруг оси Oy .

7. Найти длину петли линии $x=t^2$, $y=t-\frac{t^3}{3}$.

Вариант 15

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x - \sin^4 x}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$; в) $\int\limits_1^e \frac{\ln x\, dx}{x^2}$.

2. Найти среднее значение функции $f(x) = \cos^3 x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{8+x^3}}{3+x^5} dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{27}{x^2+9}$, $y = \frac{x^2}{6}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 4\cos 3\varphi$ и лежащей вне круга $\rho = 2$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$,

а) вокруг оси Ox , б) вокруг оси Oy .

7. Найти длину дуги кривой $x = 3\sin t + 4\cos t,\ \ y = 4\sin t - 3\cos t$.

Вариант 16

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/4} x \cdot \cos^2 x \cdot dx$; б) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^3 + x}$; в) $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x + \sqrt[4]{x}}$.

2. Найти среднее значение функции $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-4x+7}$ на отрезке $[-1, 1]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{3+\sin^2 x}{\sqrt{5+2\sin x}} dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$, $y = \frac{x^2}{4}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = \frac{1}{2} + \sin\varphi$ и лежащей внутри круга $\rho = \frac{1}{2}$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \sin\frac{\pi x}{2}$,

а) вокруг оси Ox , б) вокруг оси Oy .

7. Найти длину дуги кривой $x = 2\cos t - \cos 2t,\ \ y = 2\sin t - \sin 2t$.

Вариант 17

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 4x \cdot \arcsin x \cdot dx$; б) $\int\limits_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$; в) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$ на отрезке $[0,2]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_{-2}^{1} \frac{\sqrt{27+x^3}}{1+x^2}dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x\cdot\sqrt{4-x^2}$, $y=\sqrt{3}$, $x=0$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho=\sin\varphi$, $\rho=\sin 2\varphi$, содержащей точку с декартовыми координатами $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2=x-2$, $y=x^3$, $y=0$, $y=1$,

а) вокруг оси Ox, б) вокруг оси Oy.

7. Найти длину дуги кривой $x=\cos t+t\sin t$, $y=\sin t-t\cos t$, заключенной между точками, соответствующими значениям параметра $t_1=0$, $t_2=\frac{\pi}{4}$.

Вариант 18

1. Вычислить интегралы

а) $\int\limits_0^1 \arcsin^2 x\cdot dx$; б) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$; в) $\int\limits_2^8 \frac{dx}{x^2+6x+8}$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=x\cdot\sqrt[4]{2x-1}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_{-2}^{2} x^2\cdot e^{-x^2}dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=\sqrt{4-y^2}$, $x=0$, $y=0$, $y=1$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho=1+\sqrt{2}\cos\varphi$ и лежащей вне круга $\rho=1$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $y=x$, $x=0$, $x=1$,

а) вокруг оси Ox, б) вокруг оси Oy.

7. Найти длину дуги кривой $x=\frac{t^6}{6}$, $y=4-\frac{t^4}{4}$, отсеченной осями координат.

Вариант 19

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^3 x^2 \cdot \sqrt{9-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_1^3 \frac{x \cdot dx}{x^2+3x}$; в) $\int\limits_0^1 x^2 \cdot 3^x\,dx$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x+7}}$ на отрезке $[1,\ 9]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\arccos x^2}{3+x^3}\,dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{1+\cos x}$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho=2\sin 4\varphi$ и лежащей внутри круга $\rho=1$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=1$, $x=2$,

а) вокруг оси Ox, б) вокруг оси Oy.

7. Найти длину кривой $x=2\cos^3\frac{t}{4}$, $y=2\sin^3\frac{t}{4}$.

Вариант 20

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^2 \ln\left(x^2+4\right)dx$; б) $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$; в) $\int\limits_{-1}^{7} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

2. Найти среднее значение функции $f(x)=\frac{1}{3+2\cos x}$ на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Оценить интеграл $\int\limits_{-1}^{2} \frac{\ln\left(x^3+2\right)}{x^3+2}\,dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x=4-(y-1)^2,\ x=y^2-4y+3.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho=2\sin 4\varphi$ и лежащей вне окружности $\rho=1$.

6. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линией $x^2+(y-2)^2=1$,

а) вокруг оси Oy, б) вокруг оси Ox.

7. Найти длину одной арки кривой $x=3\left(t-\sin t\right)$, $y=3\left(1-\cos t\right)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Краснов М.Л. Вся высшая математика./М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Ч.1. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 352 с.
2. Краснов М.Л. Задачи и примеры с подробными решениями./М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Ч.1. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 172 с.
3. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов./И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. М.: Наука, 1980. 946 с.
4. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа./Г.Н. Берман. М.: Наука, 2002. 443 с.
5. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа/ под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. М.: Наука, 1996. 464 с.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов/ под ред. Б.П. Демидовича. М.: «Изд-во Астрель», 2003. 495 с.
7. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. / В. Д. Черненко. С-Птб.: Политехника, 2003. 703 с.
8. Минькова Р.М. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной**.** /Р.М. Минькова. Екатеринбург: УГТУ УПИ, 2006. 98 с.
9. Руководство к решению задач по дифференциальному и интегральному исчислению функции одной переменной. /Я.Г. Мартюшова, Н.В. Чуксина, Р.М. Минькова. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2006. 95с.

Оглавление

1. Индивидуальные задания по теме «Предел и непрерывность»……3
2. Индивидуальные задания по теме «Асимптотические разложения»……28
3. Индивидуальные задания по теме «Исследование функций»……...32
4. Индивидуальные задания по теме «Неопределенные интегралы».....45
5. Индивидуальные задания по теме «Определенные интегралы».....57

Учебное издание

Сборник типовых заданий по математическому анализу

Составители *Минькова Р.М.,*
Успенская Е.А.,
Чуксина Н.В.

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

ИД № 06263 от 12.11. 2001 г.

Подписано в печать 25.8. 2009 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ.л. 4.2
Уч.-изд. л. 3.8 Тираж 200 экз. Заказ Цена "С"

Редакционно-издательский отдел УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19
Ризография НИЧ УГТУ-УПИ

620002, Екатеринбург, Мира, 19