В.В. Катальников

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Сборник типовых заданий

Екатеринбург
2012

Вариант 1

1. Образует ли линейное пространство заданное множество X, в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? X: Множество всех векторов трёхмерного пространства, первая координата которых равна 1; сумма $\vec{a}+\vec{b}$, произведение $\alpha\cdot\vec{a}$.
2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$?

$\widehat{A}x=\{2x_1-5x_2-3x_3,-2x_1-3x_2-x_3,x_2+x_3\}$,

$\widehat{B}x=\{x_1-2x_2-4x_3,x_1-x_2-3x_3,2x_2+3\}$,

$\widehat{C}x=\{x_3^3,2x_1-x_2-2x_3,3x_2+x_3\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i, j, k), образ, ядро, ранг и дефект оператора проецирования на ось OX.
4. Вектор $\mathbf{x}$ в базисе e_1,e_2,e_3 имеет координаты $\vec{x}_e=\{3,-5,4\}$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе e_1',e_2',e_3', где $\begin{cases} e_1'=e_1+e_3 \\ e_2'=2e_1+e_2+e_3 \\ e_3'=e_2 \end{cases}$
5. Найти матрицу A' в базисе e_1',e_2',e_3', если задана матрица A в базисе e_1,e_2,e_3, где

$$\begin{cases} e_1'=2e_1+3e_2+e_3 \\ e_2'=3e_1+4e_2+e_3 \\ e_3'=e_1+2e_2+2e_3 \end{cases}; \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму $4x_2^2-3x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $-x^2-y^2+4xy+2x-4y+1=0$.

Вариант 2

1. Образует ли линейное пространство заданное множество *X*, в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? *X:* Множество всех векторов трёхмерного пространства, сумма $[\vec{a},\vec{b}]$, произведение $\alpha\cdot\vec{a}$.
2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$?

$\widehat{A}x=\{2x_1-3x_2-2x_3, 2x_1-3x_2, 2x_2+3\}$,

$\widehat{B}x=\{4x_1-3x_2-x_3, 0, x_2^2+x_3\}$,

$\widehat{C}x=\{x_1-2x_2-x_3, 3x_1-2x_2, 3x_2+x_3\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i, j, k), образ, ядро, ранг и дефект оператора отражения относительно плоскости *YOZ*.
4. Вектор **x** в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $\vec{x}_e=\{1,2,7\}$. Найти координаты вектора **x** в базисе e_1', e_2', e_3', где $\begin{cases} e_1'=e_1, \\ e_2'=2e_1+e_2, \\ e_3'=3e_2+2e_2+e_3. \end{cases}$
5. Найти матрицу A' в базисе e_1', e_2', e_3', если задана матрица A в базисе e_1, e_2, e_3, где

$$\begin{cases} e_1'=2e_1+3e_2+e_3 \\ e_2'=3e_1+4e_2+e_3 \\ e_3'=e_1+2e_2+2e_3 \end{cases}; \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму $4x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2\sqrt{3}x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0$.

Вариант 3

1. Образует ли линейное пространство заданное множество X, в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? X: Множество всех натуральных чисел; сумма $a \cdot b$, произведение a^{α}.
2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$?

$\widehat{A}x = \{2x_1 - x_2 - 3x_3, x_1, x_1 + x_2^3 + x_3\}$,

$\widehat{B}x = \{3x_1 - x_2 - x_3, 2x_1, 3x_1 + x_2 + x_3\}$,

$\widehat{C}x = \{3x_1 - x_2 - x_3, 2x_1, 3x_1 + x_2 - 1\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i, j, k), образ, ядро, ранг и дефект оператора поворота относительно оси OX на угол $\pi/3$ против часовой стрелки.
4. Вектор $\mathbf{x}$ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $\vec{x}_e = \{6, 2, 0\}$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе e_1', e_2', e_3', где $\begin{cases} e_1' = e_1, \\ e_2' = e_1 + 2e_2, \\ e_3' = e_1 + 2e_2 + 3e_3. \end{cases}$
5. Найти матрицу A' в базисе e_1', e_2', e_3', если задана матрица A в базисе e_1, e_2, e_3, где

$$\begin{cases} e_1' = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \\ e_2' = 3e_1 + 4e_2 + e_3 \\ e_3' = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \end{cases}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму $2x_1^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3 + 2x_2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $4xy + 4x - 4y = 0$.

Вариант 4

1. Образует ли линейное пространство заданное множество X, в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? X: Множество всех функций, непрерывных на отрезке $[-1,1]$ и таких, что $f(-1)=f(1)=0$; сумма $f(t)+g(t)$, произведение $\alpha\cdot f(t)$..
2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}$?

$\widehat{A}x=\{2x_1+x_2+4x_3,2x_3,x_1-2x_2-3x_3\}$,

$\widehat{B}x=\{2x_1+x_2+4x_3,1,x_1-2x_2+3\}$,

$\widehat{C}x=\{5x_1+3x_2+x_3,x_3,2x_1^2-2x_2-4x_3\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i,j,k), образ, ядро, ранг и дефект оператора отражения относительно плоскости $x-z=0$.
4. Вектор **x** в базисе e_1,e_2,e_3 имеет координаты $\vec{x}_e=\{2,6,6\}$. Найти координаты вектора **x** в базисе e_1',e_2',e_3', где $\begin{cases} e_1'=e_1+e_2+e_3, \\ e_2'=2e_2+2e_3, \\ e_3'=3e_3. \end{cases}$
5. Найти матрицу A' в базисе e_1',e_2',e_3', если задана матрица A в базисе e_1,e_2,e_3, где

$$\begin{cases} e_1'=2e_1+3e_2+e_3 \\ e_2'=3e_1+4e_2+e_3 \\ e_3'=e_1+2e_2+2e_3 \end{cases};\qquad A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму $2x_1^2+9x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $-2x^2-2y^2+2xy-6x+6y+3=0$.

Вариант 5

1. Образует ли линейное пространство заданное множество X, в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? X: Множество всех функций, непрерывных на отрезке $[-1,1]$ и таких, что $f(-1)=f(1)=1$; сумма $f(t)+g(t)$, произведение $\alpha\cdot f(t)$..
2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$?

$\widehat{A}x=\{x_1, 2x_1-x_2+1, x_1-x_2-3x_3\}$,

$\widehat{B}x=\{x_1, 2x_1-x_2-3x_3, x_1^3-x_2-3x_3\}$,

$\widehat{C}x=\{x_1, 2x_1-x_2-3x_3, x_1-x_2-3x_3\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i, j, k), образ, ядро, ранг и дефект оператора проецирования на плоскость $y+z=0$.
4. Вектор $\mathbf{x}$ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $\vec{x}_e=\{0,5,5\}$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе e_1', e_2', e_3', где $\begin{cases} e_1'=3e_1+e_2+5e_3, \\ e_2'=2e_2+3e_2+3e_3, \\ e_3'=2e_1+e_2+4e_3. \end{cases}$
5. Найти матрицу A' в базисе e_1', e_2', e_3', если задана матрица A в базисе e_1, e_2, e_3, где

$$\begin{cases} e_1'=2e_1+3e_2+e_3 \\ e_2'=3e_1+4e_2+e_3 \\ e_3'=e_1+2e_2+2e_3 \end{cases}; \qquad A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму $-4x_1^2-4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $-3x^2-3y^2+4xy-6x+4y+2=0$.

Вариант 6

1. Образует ли линейное пространство заданное множество X, в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? X: Множество всех функций, дифференцируемых на отрезке $[-1,1]$ и таких, что $f(-1)=f(1)=0$ и $f'(0)=1$; сумма $f(t)+g(t)$, произведение $\alpha\cdot f(t)$.
2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$?

$\widehat{A}x=\{x_1+2x_2, 3x_2-4x_3, x_1-2x_2^2-3x_3\}$,

$\widehat{B}x=\{x_1+2x_2, 3x_2-4x_3, x_1-2x_2-3x_3\}$,

$\widehat{C}x=\{x_1+2x_2, 3x_2-2, x_1-2x_2-5\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i, j, k), образ, ядро, ранг и дефект оператора поворота относительно оси OZ на угол $\pi/6$ против часовой стрелки.
4. Вектор **x** в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $\vec{x}_e=\{9,14,16\}$. Найти координаты вектора **x** в базисе e_1', e_2', e_3', где $\begin{cases} e_1'=2e_1+e_2+3e_3, \\ e_2'=3e_2+2e_2+4e_3, \\ e_3'=2e_1-3e_2+e_3. \end{cases}$
5. Найти матрицу A' в базисе e_1', e_2', e_3', если задана матрица A в базисе e_1, e_2, e_3, где

$$\begin{cases} e_1'=2e_1+3e_2+e_3 \\ e_2'=3e_1+4e_2+e_3\ ; \\ e_3'=e_1+2e_2+2e_3 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2\sqrt{3}x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $-2xy-2x-2y+1=0$.

Вариант 7

1. Образует ли линейное пространство заданное множество X, в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? X: Множество всех последовательностей $a=\{u_n\}, b=\{v_n\}$, сходящихся к нулю, сумма $\{u_n+v_n\}$, произведение $\{\alpha\cdot u_n\}$.
2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$?

$\widehat{A}x=\{2x_1, 3x_1+2x_2+3x_3, 4x_1+5x_2+2x_3\}$,

$\widehat{B}x=\{2x_1, 3x_1+2x_2+3, 4x_1+5x_2+7\}$,

$\widehat{C}x=\{2x_1, 3x_1+2x_2+3x_3, 4x_1^4+5x_2+2x_3\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i, j, k), образ, ядро, ранг и дефект оператора проецирования на плоскость $x+y=0$.
4. Вектор $\mathbf{x}$ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $\vec{x}_e=\{1,0,-1\}$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе e_1', e_2', e_3', где $\begin{cases} e_1'=2e_1+6e_2+5e_3, \\ e_2'=5e_2+3e_2-2e_3, \\ e_3'=7e_1+4e_2-3e_3. \end{cases}$
5. Найти матрицу A' в базисе e_1', e_2', e_3', если задана матрица A в базисе e_1, e_2, e_3, где

$$\begin{cases} e_1'=2e_1+3e_2+e_3 \\ e_2'=3e_1+4e_2+e_3 \\ e_3'=e_1+2e_2+2e_3 \end{cases}; \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму $4x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $-x^2-y^2-4xy-4x-2y+2=0$.

Вариант 8

1. Образует ли линейное пространство заданное множество *X*, в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? *X:* Множество всех последовательностей $a=\{u_n\}, b=\{v_n\}$, сходящихся к 1; сумма $\{u_n+v_n\}$, произведение $\{\alpha\cdot u_n\}$.
2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$?

$\widehat{A}x=\{x_1-3x_2-x_3, 5, x_1+2x_2+1\}$,

$\widehat{B}x=\{x_1-3x_2-x_3, 0, x_1^3+2x_2+3x_3\}$,

$\widehat{C}x=\{x_1-3x_2-x_3, x_3, x_1+2x_2+3x_3\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i, j, k), образ, ядро, ранг и дефект оператора отражения относительно плоскости $y-z=0$.
4. Вектор **x** в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $\vec{x}_e=\{-2, 0, 1\}$. Найти координаты вектора **x** в базисе e_1', e_2', e_3', где $\begin{cases} e_1'=3e_1+2e_2+3e_3, \\ e_2'=-4e_1-3e_2-5e_3, \\ e_3'=5e_1+e_2-e_3. \end{cases}$
5. Найти матрицу A' в базисе e_1', e_2', e_3', если задана матрица A в базисе e_1, e_2, e_3, где

$$\begin{cases} e_1'=2e_1+3e_2+e_3 \\ e_2'=3e_1+4e_2+e_3 \\ e_3'=e_1+2e_2+2e_3 \end{cases}; \qquad A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму $3x_1^2+x_2^2-\dfrac{3}{2}x_3^2+2\sqrt{3}x_1x_2-x_1x_3+\sqrt{3}x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $-4x^2-4y^2+2xy+10x-10y+1=0$.

Вариант 9

1. Образует ли линейное пространство заданное множество X, в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? X: Множество всех невырожденных матриц 3-го порядка $a=(a_{ik}), b=(b_{ik}), (i,k=1,2,3)$; сумма $(a_{ik})+(b_{ik})$, произведение $(\alpha \cdot a_{ik})$.
2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$?

$\widehat{A}x=\{4x_1-2x_2, 3x_3, x_1+2x_2+3x_3^4\}$,

$\widehat{B}x=\{4x_1-2x_2, 3x_3, x_1+2x_2+3x_3\}$,

$\widehat{C}x=\{4x_1-2x_2, 3, x_1+2x_2+3x_3\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i, j, k), образ, ядро, ранг и дефект оператора проецирования на плоскость $\sqrt{3}y+z=0$.
4. Вектор $\mathbf{x}$ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $\vec{x}_e=\{0,3,3\}$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе e_1', e_2', e_3', где $\begin{cases} e_1'=2e_1+3e_2+e_3, \\ e_2'=7e_1+9e_2+5e_3, \\ e_3'=3e_1+4e_2+3e_3. \end{cases}$
5. Найти матрицу A' в базисе e_1', e_2', e_3', если задана матрица A в базисе e_1, e_2, e_3, где

$$\begin{cases} e_1'=2e_1+3e_2+e_3 \\ e_2'=3e_1+4e_2+e_3\,; \\ e_3'=e_1+2e_2+2e_3 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму $-x_1^2-x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2-6x_1x_3+6x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $4xy+4x-4y-2=0$.

Вариант 10

1. Образует ли линейное пространство заданное множество *X,* в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? *X:* Множество всех диагональных матриц 3-го порядка $a=(a_{ik}), b=(b_{ik}), (i,k=1,2,3)$; сумма $(a_{ik})+(b_{ik})$, произведение $(\alpha\cdot a_{ik})$.
2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$?

$\widehat{A}x=\{5x_3, x_1+2x_2+3x_3, 2x_1+3x_2+5x_3\}$,

$\widehat{B}x=\{5x_3, x_1+2x_2+2, 2x_1+3x_2+5\}$,

$\widehat{C}x=\{5x_3, 0, x_1^2+3x_2+5x_3\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i, j, k), образ, ядро, ранг и дефект оператора поворота относительно оси OY на угол $\pi/4$ в положительном направлении.
4. Вектор **x** в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $\vec{x}_e=\{-9,0,9\}$. Найти координаты вектора **x** в базисе e_1', e_2', e_3', где $\begin{cases} e_1'=e_1+2e_2+2e_3, \\ e_2'=2e_1+e_2-2e_3, \\ e_3'=2e_1-2e_2+e_3. \end{cases}$
5. Найти матрицу A' в базисе e_1', e_2', e_3', если задана матрица A в базисе e_1, e_2, e_3, где

$$\begin{cases} e_1'=2e_1+3e_2+e_3 \\ e_2'=3e_1+4e_2+e_3 \\ e_3'=e_1+2e_2+2e_3 \end{cases}; \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму $x_1^2-7x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $x^2+y^2+2xy-8x-8y+1=0$.

Вариант 11

1. Образует ли линейное пространство заданное множество *X,* в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? *X:* Множество всех многочленов не выше третьей степени от переменной *x;* сумма $a+b$, произведение $\alpha \cdot a$.
2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$?

$\widehat{A}x = \{5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_3, x_1 + 2\}$,

$\widehat{B}x = \{5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 0, x_2^4 + 3x_3\}$,

$\widehat{C}x = \{5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 3x_3\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i, j, k), образ, ядро, ранг и дефект оператора проецирования на плоскость Oyz.
4. Вектор **x** в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $\vec{x}_e = \{6,3,1\}$. Найти координаты вектора **x** в базисе e_1', e_2', e_3', где $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + (4/3)e_3, \\ e_2' = 4e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$
5. Найти матрицу A' в базисе e_1', e_2', e_3', если задана матрица A в базисе e_1, e_2, e_3, где

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 + e_3 \\ e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3 \\ e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}; \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму $3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1 = 0$.

Вариант 12

1. Образует ли линейное пространство заданное множество *X*, в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? *X:* Множество всех многочленов третьей степени от переменной *x;* сумма $a+b$, произведение $\alpha \cdot a$.
2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$?

$\widehat{A}x = \{3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3\}$,

$\widehat{B}x = \{3x_1 + 2x_2 + x_3, 1, 2x_1 - 3x_2 + 3\}$,

$\widehat{C}x = \{3x_1 + 2x_2 + x_3, x_3, 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i, j, k), образ, ядро, ранг и дефект оператора зеркального отражения относительно плоскости $x - z = 0$
4. Вектор **x** в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $\vec{x}_e = \{-1, 7, 14\}$. Найти координаты вектора **x** в базисе e_1', e_2', e_3', где $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 8e_3, \\ e_2' = (8/7)e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$
5. Найти матрицу A' в базисе e_1', e_2', e_3', если задана матрица A в базисе e_1, e_2, e_3, где

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 + e_3 \\ e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3 \\ e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}; \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 7 = 0$

Вариант 13

1. Образует ли линейное пространство заданное множество X, в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? X: Множество всех симметричных матриц $a=\|a_{ik}\|\ (a_{ik}=a_{ki}),\ b=\|b_{ik}\|\ (b_{ik}=b_{ki}),\ i,k=1,2,...,n;$; сумма $\|a_{ik}+b_{ik}\|$, произведение $\|\alpha a_{ik}\|$.
2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$?

$\widehat{A}x=\{3x_1+2x_2+x_3, 1, 2x_1-3x_2-4x_3\}$,

$\widehat{B}x=\{3x_1+2x_2+x_3, 0, 2x_1^3-3x_2+3\}$,

$\widehat{C}x=\{3x_1-2x_2-x_3, x_3, 2x_1-3x_2-4x_3\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i, j, k), образ, ядро, ранг и дефект оператора проектирования на плоскость $y+z=0$
4. Вектор **x** в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $\vec{x}_e=\{2,4,3\}$. Найти координаты вектора **x** в базисе e_1', e_2', e_3', где $\begin{cases} e_1'=e_1+e_2+\dfrac{1}{2}e_3, \\ e_2'=-e_1-e_2, \\ e_3'=-e_1+e_2+e_3. \end{cases}$
5. Найти матрицу A' в базисе e_1', e_2', e_3', если задана матрица A в базисе e_1, e_2, e_3, где $\begin{cases} e_1'=e_1-e_2+e_3 \\ e_2'=-e_1+e_2-2e_3 \\ e_3'=-e_1+2e_2+e_3 \end{cases}$; $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}:\ X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму $x_1^2+x_2^2+x_3^2-\dfrac{4}{3}x_1x_2-\dfrac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $2xy+2x+2y-3=0$.

Вариант 14

1. Образует ли линейное пространство заданное множество *X,* в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? *X:* Множество всех упорядоченных наборов из n чисел $a=\{x_1,x_2,...,x_n\}, b=\{y_1,y_2,...,y_n\}$; сумма $\{x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n\}$, произведение $\{\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n\}$.

2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$?

$\widehat{A}x=\{3x_1+2x_2+x_3, 0, 2x_1-3x_2-4x_3\}$,

$\widehat{B}x=\{3x_1+2x_2+1, 0, 2x_1-3x_2+3\}$,

$\widehat{C}x=\{3x_1-2x_2-x_3, 0, 2x_1^2-3x_2-4x_3\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i, j, k), образ, ядро, ранг и дефект оператора проектирования на плоскость $y=0$.

4. Вектор $\mathbf{x}$ в базисе e_1,e_2,e_3 имеет координаты $\vec{x}_e=\{2,5,10\}$. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе e_1',e_2',e_3', где $\begin{cases} e_1'=e_1+e_2+6e_3, \\ e_2'=\dfrac{6}{5}e_1-e_2, \\ e_3'=-e_1+e_2+e_3. \end{cases}$

5. Найти матрицу A' в базисе e_1',e_2',e_3', если задана матрица A в базисе e_1,e_2,e_3, где

$$\begin{cases} e_1'=e_1-e_2+e_3 \\ e_2'=-e_1+e_2-2e_3 \\ e_3'=-e_1+2e_2+e_3 \end{cases}; \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Привести квадратичную форму $x_1^2+x_2^2-x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.

8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $4x^2+4y^2+2xy+12x+12y+1=0$.

Вариант 15

1. Образует ли линейное пространство заданное множество *X,* в котором определены «сумма» любых двух элементов a и b и «произведение» любого элемента a на любое число α? *X:* Множество всех дифференцируемых функций $a = f(t),\ b = g(t);$ сумма $f(t)+g(t)$, произведение $\alpha \cdot f(t)$.
2. Являются ли линейными операторы $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$?

$\widehat{A}x = \{0, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3\}$,

$\widehat{B}x = \{0, x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6\}$,

$\widehat{C}x = \{0, x_1^2 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1^2 + 5x_2 + 6x_3\}$.

3. Доказать линейность, найти матрицу (в базисе i, j, k), образ, ядро, ранг и дефект оператора поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/4$.
4. Вектор **x** в базисе e_1, e_2, e_3 имеет координаты $\vec{x}_e = \{10, 5, 1\}$. Найти координаты вектора **x** в базисе e_1', e_2', e_3', где $\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \dfrac{6}{5}e_3, \\ e_2' = 6e_1 - e_2, \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3. \end{cases}$
5. Найти матрицу A' в базисе e_1', e_2', e_3', если задана матрица *A* в базисе e_1, e_2, e_3, где

$$\begin{cases} e_1' = e_1 - e_2 + e_3 \\ e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3; \\ e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widehat{A}: X_3 \mapsto X_3$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
7. Привести квадратичную форму $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
8. Исследовать кривую второго порядка и построить её: $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 8x + 12y + 1 = 0$.