

Индивидуальные задания по математической физике

Вариант № 1

1. Однородная струна длиной l натянута между точками $x = 0$ и $x = l$. В точке x_0 струна оттягивается на расстояние h от положения равновесия и в момент $t = 0$ отпускается без начальной скорости. Определить отклонение $u(x, t)$ струны от положения равновесия в любой момент времени.
2. На одном конце стержня $x = 0$ поддерживается температура тающего льда, а на другом $x = l$ происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры. Найти распределение температуры $u(x, t)$ в любой момент времени, если начальное распределение $u(x, 0) = 10^0$, а боковая поверхность стержня теплоизолирована.
3. Найти закон свободных колебаний круглой мембраны радиусом $R = 1$, если в начальный момент времени отклонение от положения равновесия в каждой точке определялось равенством $u|_{t=0} = \frac{1}{100} J_0(\mu_1 r)$, где μ_1 — первый положительный корень бесселевой функции J_0 . Начальная скорость равна нулю. Вдоль контура мембрана закреплена.
4. Найти распределение потенциала электростатического поля $U(x, y)$ внутри прямоугольника $0 < x < a$, $0 < y < b$, если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника $x = 0$ равен V_0 , а три другие стороны прямоугольника заземлены. Внутри прямоугольника зарядов нет.

Вариант № 2

1. Концы струны закреплены жестко, а начальное отклонение имеет форму квадратичной параболы, симметричной относительно перпендикуляра к середине струны. Найти колебания струны, если начальные скорости равны нулю, а длина струны равна l .
2. Однородная круглая мембрана радиусом R с центром в начале координат и закрепленным краем совершает поперечные колебания в среде без сопротивления. Определить колебания мембраны, вызванные постоянной начальной скоростью v_0 точек мембраны.
3. Найти закон остывания однородного стержня длиной l , если на левом конце стержня ($x = 0$) поддерживается нулевая температура, а правый конец стержня ($x = l$) теплоизолирован. Теплообмен свободный. Начальная температура точек стержня задается равенством
$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq l/2, \\ u_0, & l/2 < x \leq l. \end{cases}$$
4. Дан однородный круговой цилиндр радиусом R . Найти распределение температуры внутри цилиндра, если поверхность цилиндра поддерживается при температуре 10^0 , а начальная температура равна нулю.

Вариант № 3

1. Найти продольные колебания стержня, один конец которого $x=0$ закреплен жестко, а другой $x=l$ свободен, при начальных условиях

$$u(x,0) = kx, \quad u'_l(x,0) = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq l.$$

2. Найти распределение температуры в бесконечном цилиндре радиусом R , если начальное распределение температуры $u(r,0) = r^2$, а на боковой поверхности цилиндра происходит теплообмен со средой нулевой температуры.
3. Решить задачу о колебаниях стержня, закрепленного на краях $x=0$ $x=\pi$, если на стержень действует равномерно распределенное давление $p = (t-2)\sin x$. Начальные отклонения и скорости отсутствуют.
4. Цилиндр, радиус основания которого R и высота h , имеет теплоизолированные основания, а температура боковой поверхности есть функция $f(z)$. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

Вариант № 4

1. Найти закон выравнивания начальной температуры $u(x,0) = Ax(l-x)$ в пластине, грани которой $x=0$, $x=l$ теплоизолированы.
2. Найти закон свободных колебаний круглой мембраны радиусом l , закрепленной вдоль контура, если все точки мембраны в начальный момент получили скорость, равную $c \cdot a$ (c – заданная безразмерная величина, a – постоянная уравнения колебания мембраны). Начальное отклонение равно нулю.
3. На однородную струну плотности γ , закрепленную на концах $x=0$, $x=l$, действует внешняя сила, плотность которой $p(x,t) = \gamma \cdot \sin t$. Найти смещения точек струны, если начальные отклонения и начальные скорости отсутствуют.
4. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра с радиусом основания R и высотой 1, если основания цилиндра теплоизолированы, а температура боковой поверхности равна z .

Вариант № 5

1. Найти закон распределения температуры внутри стержня длиной l , лежащего на отрезке $[0, l]$, если в начальный момент температура внутри стержня

$$\text{была распределена следующим образом: } u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x}{l} u_0, & 0 \leq x \leq l/2 \\ \frac{l-x}{l} u_0, & l/2 \leq x \leq l \end{cases}.$$

На концах стержня поддерживается нулевая температура.

2. Однородная круглая мембрана радиусом R с центром в начале координат и закрепленным краем совершает поперечные колебания в среде без сопротивления. Определить колебания мембраны, вызванные начальным отклонением $f(r) = A(R^2 - r^2)$.
3. Дан тонкий однородный стержень, начальная температура которого равна нулю, левый конец стержня поддерживается при постоянной температуре 3^0 , а на правый конец подается постоянный тепловой поток плотностью 5 ед. Найти распределение температуры в стержне, если боковая поверхность теплоизолирована.
4. Найти распределение потенциала электростатического поля $U(x, y)$ внутри прямоугольника $0 < x < a$, $0 < y < b$, если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника $x = 0$ равен v_0 , а три другие стороны прямоугольника заземлены. Внутри прямоугольника электрических зарядов нет.

Вариант № 6

1. Найти закон свободных колебаний круглой мембраны радиусом R , если в начальный момент отклонение в каждой точке определялось равенством $u(r, 0) = 0.1 J_0(\mu_1 r / R)$, где μ_1 - первый положительный корень бесселевой функции J_0 . Начальная скорость равна нулю. Вдоль контура мембрана закреплена.
2. Найти закон остывания неограниченной пластины толщиной l , если на поверхности $x = 0$ происходит конвективный теплообмен со средой имеющей температуру T_0 , а на поверхности $x = l$ поддерживается температура тающего льда. Начальная температура равна нулю.
3. Один конец стержня $x = l$ закреплен упруго, а к другому $x = 0$ приложена продольная сила $F_0 = \text{const}$, под действием которой стержень находится в равновесии. Найти колебания стержня после того, как в начальный момент времени сила мгновенно исчезает, если начальные скорости равны нулю.
4. Найти стационарную температуру $u(r, z)$ внутренних точек цилиндра радиусом R и высотой h , если основания цилиндра теплоизолированы, а температура боковой поверхности изменяется по закону $u(R, z) = A \cos \frac{\pi z}{h}$.

Вариант № 7

1. Однородная круглая мембрана радиусом R с центром в начале координат и закрепленным краем совершает поперечные колебания в среде без сопротивления. Определить колебание мембраны, вызванной постоянной начальной скоростью v_0 .
2. Найти распределение температуры в неограниченной пластине толщиной l , если на поверхностях пластины поддерживается нулевая температура, а начальное распределение температуры по толщине пластины $u(x, 0) = A \sin \frac{3\pi}{l} x$.
3. Боковая поверхность цилиндра радиусом $R=1$ и высотой h покрыта непроницаемым для тепла чехлом. Температура нижнего основания поддерживается постоянной и равной нулю, а температура верхнего основания есть функция от r . Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.
4. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < 1$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры в стержне, если конец $x=0$ поддерживается при нулевой температуре, а на конец $x=1$ подается постоянный тепловой поток q . Начальная температура стержня равна нулю.

Вариант № 8

1. Концы струны закреплены жестко, начальное отклонение равно нулю. Найти колебание струны, если начальная скорость $u_t(x, 0) = \sin \frac{2\pi}{l} x$, а длина струны равна l .
2. Найти распределение температуры в стержне длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью, если его конец $x=0$ теплоизолирован, на конце $x=l$ поддерживается нулевая температура, а начальная температура $u_0 = l - x$.
3. Найти концентрацию в растворе, помещенном внутри цилиндрической трубки радиусом $R=2$ с непроницаемыми стенками, если начальное распределение концентрации задано равенством $f(r) = 0.5r^2 + 1$.
4. Найти стационарное распределение температуры внутри твердого тела, имеющего форму цилиндра с радиусом основания R и высотой h , если к нижнему основанию $z=0$ подводится постоянный тепловой поток q , а боковая поверхность $r=R$ и верхнее основание $z=h$ поддерживаются при нулевой температуре.

Вариант № 9

1. Найти колебания струны, если один конец $x=0$ закреплен жестко, а второй $x=l$ свободен. Начальное отклонение равно $\sin \frac{5\pi x}{2l}$. Начальная скорость равна $\sin \frac{\pi x}{2l}$.
2. Найти распределение температуры в неограниченной пластине толщиной l , если на поверхностях пластины поддерживается нулевая температура, а начальное распределение температуры по толщине пластины $u(x,0) = Ax$.
3. Найти распределение потенциала электростатического поля $U(x,y)$ внутри прямоугольника $0 < x < a$, $0 < y < b$, если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника $y=0$ равен V_0 , а три другие стороны прямоугольника заземлены. Внутри прямоугольника зарядов нет.
4. Исследовать радиальное распределение тепла в бесконечном круговом цилиндре радиусом R , боковая поверхность которого поддерживается при постоянной температуре θ градусов. Начальная температура внутри цилиндра равна нулю.

Вариант № 10

1. Найти колебания струны, если один конец ($x=0$) закреплен жестко, а второй ($x=l$) — свободен. Начальное отклонение $u(x,0) = x$, начальные скорости $u_t(x,0) = \sin \frac{\pi x}{2l} + \sin \frac{3\pi x}{2l}$, ($0 \leq x \leq l$).
2. Найти закон выравнивания заданного осесимметричного начального распределения температуры $U(r,0) = r^2$ в бесконечном цилиндре радиусом R , боковая поверхность которого теплоизолирована.
3. Решить задачу о колебаниях однородной круглой мембраны радиусом 1, закрепленной по краю, если эти колебания вызваны равномерно распределенным давлением $p = 3 \sin t$, приложенным к одной стороне мембраны.
4. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x,y)$ внутри коробки прямоугольного сечения, одна грань которой $x=0$ имеет потенциал V_0 , а три другие $x=a$, $y=0$, $y=b$ заземлены.

Вариант № 11

1. Один конец струны ($x=0$) свободен, а второй ($x=l$) — закреплён жёстко.

Найти колебания струны, если начальное отклонение равно $\cos \frac{\pi x}{2l}$, начальная

скорость равна $\cos \frac{3\pi x}{2l} + \cos \frac{5\pi x}{2l}$.

2. Цилиндр радиусом R нагрет до температуры T_0 и охлаждается с поверхности таким образом, что ее температура, начиная с момента $t=0$, поддерживается равной нулю. Найти закон охлаждения цилиндра, считая, что распределение температуры во всех поперечных сечениях одинаково.

3. Найти температуру однородного стержня, левый конец которого и боковая поверхность теплоизолированы, а правый конец поддерживается при температуре 8 град. Начальная температура стержня равна нулю.

4. Найти стационарное распределение температуры твердого тела, имеющего форму цилиндра единичного радиуса и высотой h , если основания цилиндра теплоизолированы, а температура боковой поверхности изменяется по закону

$$u(R, z) = \cos \frac{2\pi z}{h}.$$

Вариант № 12

1. Найти поперечные колебания струны длиной 1 , если концы свободны, начальное отклонение $u(x, 0) = x$, начальная скорость u_0 .

2. Однородная круглая мембрана радиусом R с центром в начале координат и закрепленным краем совершает поперечные колебания в среде без сопротивления. Определить колебания мембраны, вызванные постоянной начальной скоростью u_0 точек мембраны.

3. Определить температуру в каждой точке медного стержня длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня поддерживается температура, равная нулю, а начальная температура $u(x, 0) = 50 \sin \frac{2\pi x}{l}$.

4. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндрического бруска радиусом R и высотой h , если температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность свободно охлаждается в среде нулевой температуры, а температура верхнего основания постоянна и равна u_0 .

Вариант № 13

1. Найти колебания струны, если один конец $x=0$ свободен, а другой конец $x=l$ закреплен жестко, начальное отклонение равно нулю, начальная скорость $v_0 = 1$.
2. Найти концентрацию в растворе, помещенном внутри цилиндрической трубки $0 \leq r \leq b$ с непроницаемыми стенками, если начальное распределение концентрации задано равенством $C|_{t=0} = \begin{cases} C_0, & 0 \leq r \leq c \\ 0, & c < r \leq b \end{cases}$.
3. Найти распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура $u(x,0) = u_0$.
4. Дан тонкий однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью. Найти распределение температуры в стержне, если левый конец поддерживается при температуре 4 град., а на правый подается постоянный тепловой поток q . Начальная температура стержня равна нулю.

Вариант № 14

1. Найти отклонения точек $u(x,t)$ однородной конечной струны при $t > 0$, если ее концы $x=0$ и $x=l$ закреплены жестко, начальное отклонение $u(x,0) = A \sin \frac{\pi x}{l}$ при $0 \leq x \leq l$; начальные скорости равны нулю.
2. Однородная круглая мембрана радиусом R с центром в начале координат и закрепленным краем совершает поперечные колебания в среде без сопротивления. Определить колебание мембраны, вызванное постоянной начальной скоростью v_0 точек мембраны.
3. Дан неограниченный круговой цилиндр радиусом R , найти распределение температуры внутри цилиндра при $t > 0$, если с поверхности цилиндра происходит лучеиспускание в окружающую среду, температура которой равна 10, а начальная температура равна нулю.
4. Найти распределение потенциалов электростатического поля $U(x,y)$ внутри прямоугольника $0 < x < a$, $0 < y < b$, если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника $x=a$ равен V_0 , а три другие стороны заземлены. Внутри прямоугольника электрических зарядов нет.

Вариант № 15

1. Найти отклонения точек $u(x,t)$ однородной струны, если ее концы $x=0$, $x=l$ закреплены жестко, начальное отклонение равно $5\sin\frac{4\pi x}{l} + 12\sin\frac{2\pi x}{l}$; начальные скорости равны $3\sin\frac{5\pi x}{l}$.
2. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < 1$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры в стержне, если конец $x=0$ поддерживается при нулевой температуре, а на конец $x=1$ подается постоянный тепловой поток плотностью q . Начальная температура стержня равна нулю.
3. Найти закон выравнивания заданного осесимметричного начального распределения температуры $T(r,0) = 0.2r^2 - 0.3$ в бесконечном цилиндре радиусом R , боковая поверхность которого теплоизолирована.
4. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра с радиусом основания R и высотой h , если температура оснований равна нулю, а температура боковой поверхности изменяется по закону $u(R,z) = 2z$.

Вариант № 16

1. Найти закон свободных колебаний круглой мембраны радиусом $l=10$, если в начальный момент отклонение в каждой точке равнялось $2J_0(0.1\mu_1 r)$, где μ_1 — первый положительный корень бесселевой функции J_0 . Начальная скорость равна нулю. Вдоль контура мембрана закреплена.
2. Грани пластины толщиной $2a$ нагреты до температуры u_0 ; начиная с момента времени $t=0$ температура граней поддерживаются равной u_1 . Найти распределение температуры в пластине.
3. Найти распределение температуры в бесконечном цилиндре радиусом R , начальная температура $u(r,0) = 100$, а на поверхности цилиндра происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры (коэффициент теплообмена $h = 2$).
4. Найти распределение потенциала электростатического поля внутри коробки прямоугольного сечения $0 < x < a$, $0 < y < b$, две противоположные грани которой $x=0$, $x=a$ имеют потенциал A , а две другие заземлены.

Вариант № 17

1. Однородная круглая мембрана радиусом R с центром в начале координат и закрепленным краем совершает поперечные колебания в среде без сопротивления. Определить колебания мембраны, вызванные постоянной скоростью v_0 точек мембраны.
2. Найти закон выравнивания заданного начального распределения $u(x, 0) = f(x)$ температуры в пластине, грани которой $x = 0$, $x = l$ не пропускают тепла.
3. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра с радиусом основания R и высотой h , если температура нижнего основания и боковой поверхности цилиндра равна нулю, а температура верхнего основания изменяется по закону $u(r, h) = 3r^2$.
4. Решить задачу о колебаниях стержня, закрепленного на краях $x = 0$, $x = \pi$, если на стержень действует равномерно распределенное давление $p = t \sin 3x$. Начальные отклонения и скорости отсутствуют.

Вариант № 18

1. Найти закон остывания бесконечного цилиндра радиусом R , если в начальный момент температура всех его внутренних точек равна u_0 , а на его поверхности поддерживается постоянная температура u_1 .
2. Найти закон свободных колебаний круглой мембраны радиусом R , закрепленной вдоль контура, если все точки мембраны в начальный момент получили скорость $5a$ (где a – постоянная в уравнении колебания мембраны). Начальное отклонение равно нулю.
3. Пластина толщиной $2a$ ($0 < x < 2a$) с заданным начальным распределением температуры $u(x, 0) = x$ излучает, начиная с момента времени $t = 0$, тепло в окружающую среду, температура которой принимается равной нулю. Считая, что излучение подчиняется закону Ньютона, найти распределение температуры в пластине в произвольный момент времени.
4. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x, y)$ внутри прямоугольника $0 < x < a$, $0 < y < b$, если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника $x = 0$ равен u_0 , а три другие стороны прямоугольника заземлены. Внутри прямоугольника электрических зарядов нет.

Вариант № 19

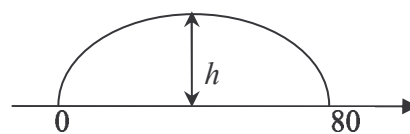
1. Найти отклонения точек $u(x, t)$ однородной струны, если ее концы $x=0$, $x=l$ закреплены жестко; начальное отклонение равно $5 \sin \frac{4\pi x}{l}$; начальные скорости равны $13\pi \cdot \sin \frac{5\pi x}{l} + 7\pi \cdot \sin \frac{8\pi x}{l}$.
2. Однородная круглая мембрана радиусом R с центром в начале координат и закрепленным краем совершает поперечные колебания в среде без сопротивления. Определить колебания мембраны, вызванные начальным отклонением $f(r) = 0.2(2 - r^2)$.
3. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < 1$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры в стержне, если конец $x=0$ поддерживается при нулевой температуре, а на конец $x=1$ подается постоянный тепловой поток q . Начальная температура стержня равна нулю.
4. Найти распределение потенциалов электростатического поля $u(x, y)$ внутри прямоугольника $0 < x < a$, $0 < y < b$, если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника $y=b$ равен u_0 , а три другие стороны заземлены. Внутри прямоугольника электрических зарядов нет.

Вариант №20

1. Бесконечный цилиндр радиусом R с начальным распределением температуры $u(r, 0) = r^2$ охлаждается, излучая тепло в окружающую среду по закону Ньютона. Найти закон остывания цилиндра, если температура среды равна u_0 .
2. Струна, закрепленная на концах $x=0$ $x=l$, в начальный момент оттянута в точке $x=l/2$ на расстояние h , а затем отпущена без толчка. Определить отклонения $u(x, t)$ точки x струны для любого момента времени t .
3. Найти температуру стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если левый конец его поддерживается при температуре u_0 , а на правый подается постоянный тепловой поток плотностью q . Начальная температура равна нулю.
4. Найти стационарную температуру $u(r, z)$ внутренних точек цилиндра радиусом R и высотой h , если основания цилиндра теплоизолированы, а температура боковой поверхности изменяется по закону $u(R, z) = A \cos \frac{\pi z}{h}$.

Вариант №21

1. Закрепленная на концах однородная струна длиной 80 см в начальный момент имеет форму симметричного относительно середины отрезка параболического сегмента высотой $h = 5/16$ см. Изучить свободные колебания этой струны.



2. В пространство между двумя параллельными плоскими стенками ($0 < x < a$) налит раствор с заданным начальным распределением концентрации растворенного вещества $c(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq c \\ c_0, & c < x \leq a \end{cases}$. Проследить последующий процесс выравнивания концентрации, предполагая стенки непроницаемыми для вещества.
3. Найти закон остывания бесконечного цилиндра радиусом R , если в начальный момент времени температура внутри цилиндра определялась по формуле $u(r,0) = 89J_0(\mu_1 r / R)$, где μ_1 – первый положительный корень бесселевой функции J_0 . На поверхности цилиндра поддерживается все время постоянная температура, равная нулю.
4. Найти стационарную температуру внутри цилиндрического бруска единичного радиуса и высоты, если его основания теплоизолированы, а боковая поверхность имеет температуру $u(R,z) = z$.

Вариант №22

1. Найти закон колебания струны длиной l , если в начальный момент всем точкам струны сообщена скорость, равная $\frac{a}{10}$ (где a – постоянная из уравнения колебания струны). Начальное отклонение отсутствует. Концы струны закреплены.
2. Найти распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq 10$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной u_0 , а начальная температура u_1 .
3. Исследовать радиальное распределение тепла в бесконечном круговом цилиндре радиусом R , боковая поверхность которого поддерживается при нулевой температуре. Начальная температура внутри цилиндра равна u_0 .
4. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра радиусом R и высотой h , если температура верхнего и нижнего оснований равна нулю, а температура боковой поверхности изменяется по закону $u(R,z) = z(h-z)$.

Вариант №23

1. Найти закон свободных колебаний струны, расположенной на отрезке $[0, l]$, если в начальный момент времени струне была придана форма кривой $u(x, 0) = \frac{l}{100} \sin \frac{\pi x}{2l}$ и затем струна была отпущена без начальной скорости. Струна закреплена в левом конце, а правый может свободно перемещаться так, что касательная в правом конце все время остается горизонтальной.
2. Однородная круглая мембрана радиусом R с центром в начале координат и закрепленным краем совершает поперечные колебания в среде без сопротивления. Определить колебания мембраны, вызванные начальным отклонением $f(r) = 1 - r^2$.
3. Бесконечный цилиндр радиусом R_0 , нагретый до температуры u_0 , охлаждается, излучая тепло в окружающую среду по закону Ньютона. Найти закон остывания цилиндра, если температура среды равна нулю.
4. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x, y)$ внутри прямоугольника $0 < x < a$, $0 < y < b$, если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника $x = 0$ равен u_0 , а три другие стороны прямоугольника заземлены. Внутри прямоугольника электрических зарядов нет.

Вариант №24

1. Найти продольные колебания стержня, один конец которого $x = 0$ закреплён жестко, а другой $x = l$ свободен; начальное отклонение равно $0.1x$, начальная скорость равна нулю.
2. Найти распределение температуры в неограниченной пластине толщиной l , если на поверхностях пластины поддерживается нулевая температура, а начальное распределение температуры по толщине пластины $u(x, 0) = 7 \sin \frac{3\pi x}{l}$.
3. Найти распределение температуры внутри неограниченного кругового цилиндра радиусом, равным единице, если начальная температура цилиндра равна нулю, а поверхность поддерживается при температуре u_0 .
4. Найти стационарное распределение температуры внутри твердого тела, имеющего форму цилиндра единичного радиуса и единичной высоты, если к верхнему основанию подводится постоянный тепловой поток плотностью q , нижнее основание поддерживается при нулевой температуре, а боковая поверхность теплоизолирована.