



Чердынцева Г.А., Кравченко Н.М., Трясцина Т.С.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Методические указания и варианты к расчетно-графической работе
для студентов физических специальностей ФТИ

Екатеринбург 2012

Лабораторная работа №1

Первичная обработка результатов наблюдений двух измеримых признаков и статистические точечные оценки генеральных параметров

Цель работы. Ознакомиться с методикой первичной обработки двумерной выборки, составить интервальные и дискретные вариационные ряды распределения признаков X и Y , эмпирическую функцию распределения одного из признаков, построить полигон, гистограмму и график эмпирической функции распределения. Оценить генеральные параметры.

Порядок выполнения работы.

1. Найти минимальные (x_{\min}, y_{\min}) и максимальные (x_{\max}, y_{\max}) значения выборочной совокупности X и Y . Установить границы интервалов α_i для признака $X: \alpha_i = \alpha_{i-1} + h_x$, $i = 1 \div l$, где α_0 — начало первого интервала, h_x — длина интервалов, l — число интервалов ($\alpha_0 < x_{\min} < \alpha_1 < \dots < x_{\max} < x_l$). Для признака $Y: \beta_j = \beta_{j-1} + h_y$, $j = 1 \div m$, где β_0 — начало первого интервала, h_y — длина интервалов, m — число интервалов ($\beta_0 < y_{\min} < \beta_1 < \dots < y_{\max} < \beta_m$).

2. По данным выборки заполнить корреляционную таблицу абсолютных частот.

3. Найти середины интервалов x_i, y_j и составить вариационный ряд каждого признака.

Вычислить относительные $n_{\text{отн}}(x) = \frac{n_{x_i}}{n}$, $n_{\text{отн}}(y) = \frac{n_{y_j}}{n}$ и накопленные $n_{\text{накоп}}(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_{x_i}}{n}$,

$n_{\text{накоп}}(y) = \sum_{y_j < y} \frac{n_{y_j}}{n}$ частоты.

4. Построить полигон частот и гистограмму относительных частот. Найти эмпирическую

функцию распределения признака X по формуле: $F^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_{x_i}}{n}$

5. Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, а также несмещенные оценки дисперсии и среднеквадратического отклонения генеральной совокупности по формулам:

$$\bar{x} = \bar{x}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l x_i n_{x_i}, \quad D_{x_g} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l (x_i)^2 n_{x_i} - (\bar{x}_g)^2,$$

$$\bar{y} = \bar{y}_g = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m y_j n_{y_j}, \quad D_{y_g} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m (y_j)^2 n_{y_j} - (\bar{y}_g)^2,$$

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1} D_{x_g}, \quad s_x = \sqrt{S_x^2},$$

$$S_y^2 = \frac{n}{n-1} D_{y_g}, \quad s_y = \sqrt{S_y^2}.$$

Рассмотрим на примере данной выборки как выполнить первичную обработку данных и оценить параметры генеральной совокупности. Система количественных признаков (X, Y)

задана таблицей. Объем выборки, начало первого интервала и рекомендуемая длина интервала для каждого признака указаны.

Таблица 1

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
73	577	63	495	74	578	70	558	79	627	63	496
69	548	80	635	68	537	61	480	77	607	63	495
72	575	71	564	69	550	62	486	78	618	67	530
72	573	74	583	71	559	63	500	66	521	68	534
65	519	68	534	60	479	71	560	63	497	55	437
67	530	65	518	56	446	65	517	69	546	56	446
56	443	73	574	71	565	70	558	74	582	58	460
70	555	57	454	68	538	70	559	68	538	70	551
63	502	71	566	66	520	63	496	62	495	59	465
64	506	66	522	60	478	73	580	70	554	68	543
70	554	76	599	70	554	68	542	70	552	69	550
67	535	70	554	69	542	59	462	65	511	63	497
60	478	68	542	72	566	64	504	70	555	70	558

Объем выборки $n = 78$	X	Y
Начало первого интервала	53	420
Длина интервала	5	34

1. Для данной выборки минимальные и максимальные значения X и Y равны:

$$x_{\min} = 55, \quad x_{\max} = 80,$$

$$y_{\min} = 437, \quad y_{\max} = 635.$$

Найдем границы интервалов α_i и β_j :

$$\alpha_0 = 53, \quad \alpha_1 = 58, \quad \alpha_2 = 63, \quad \alpha_3 = 68, \quad \alpha_4 = 73, \quad \alpha_5 = 78;$$

$$\beta_0 = 420, \quad \beta_1 = 454, \quad \beta_2 = 488, \quad \beta_3 = 522, \quad \beta_4 = 556, \quad \beta_5 = 590, \quad \beta_6 = 624.$$

2. Составим корреляционную таблицу.

Таблица 2

Y\X	[53, 58)	[58, 63)	[63, 68)	[68, 73)	[73, 78)	[78, 83)	n_{y_j}
[420, 454)	4						4
[454, 488)	1	8	16				9
[488, 522)		1	4	21			17
[522, 556)				12	6		25
[556, 590)					2	1	18
[590, 624)						2	3
[624, 658)							2
n_{x_i}	5	9	20	33	8	3	78

3. Найдем середины интервалов и вычислим относительные и накопленные частоты. Составим дискретные и интервальные вариационные ряды для признаков X и Y . Полученные данные занесем в таблицы (табл.3, табл.4).

Таблица 3

№	$[\alpha_{i-1}, \alpha_i)$	x_i	n_{x_i}	$n_{\text{отн}}$	$n_{\text{накоп}}$	$\frac{n_{x_i}}{n \cdot h_x}$
1	[53, 58)	55,5	5	0,064	0	0.013
2	[58, 63)	60,5	9	0,115	0,064	0,023
3	[63, 68)	65,5	20	0,257	0,179	0,051
4	[68, 73)	70,5	33	0,423	0,436	0,085
5	[73, 78)	75,5	8	0,103	0,850	0,021
6	[78, 83)	80,5	3	0,038	0,962	0,008
					1,000	

$$n = 78, \quad h_x = 5.$$

Таблица 4

№	$[\beta_{j-1}, \beta_j)$	y_j	n_j	$n_{\text{отн}}$	$n_{\text{накоп}}$	$\frac{n_{y_j}}{n \cdot h_y}$
1	[420, 454)	437	4	0,051	0	0.0015
2	[454, 488)	471	9	0,115	0.051	0,0034
3	[488, 522)	505	17	0,218	0,166	0,0064
4	[522, 556)	539	25	0,321	0,384	0,0094
5	[556, 590)	573	18	0,231	0,705	0,0068
6	[590, 624)	607	3	0,038	0,936	0,0011
7	[624, 658)	641	2	0,026	0,974	0,0008
					1,000	

$$n = 78, \quad h_y = 34.$$

4. Построим гистограмму относительных частот и полигон частот для признака X . Гистограмма – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной $h_x = 5$, а высоты равны плотности относительной частоты $\frac{n_{отн}}{h_x} = \frac{n_{x_i}}{n \cdot h_x}$.

Гистограмма изображена на рис.1.

Полигон частот – ломаная линия, соединяющая точки (\bar{x}_i, n_{x_i}) , изображен на рис 2.

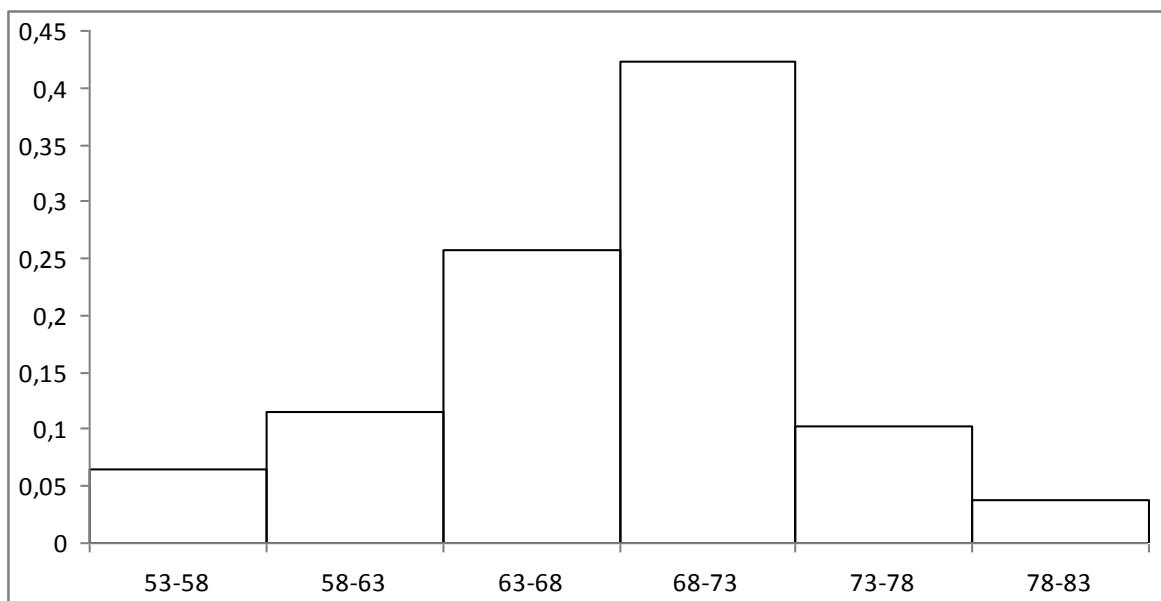


Рис.1. Гистограмма относительных частот

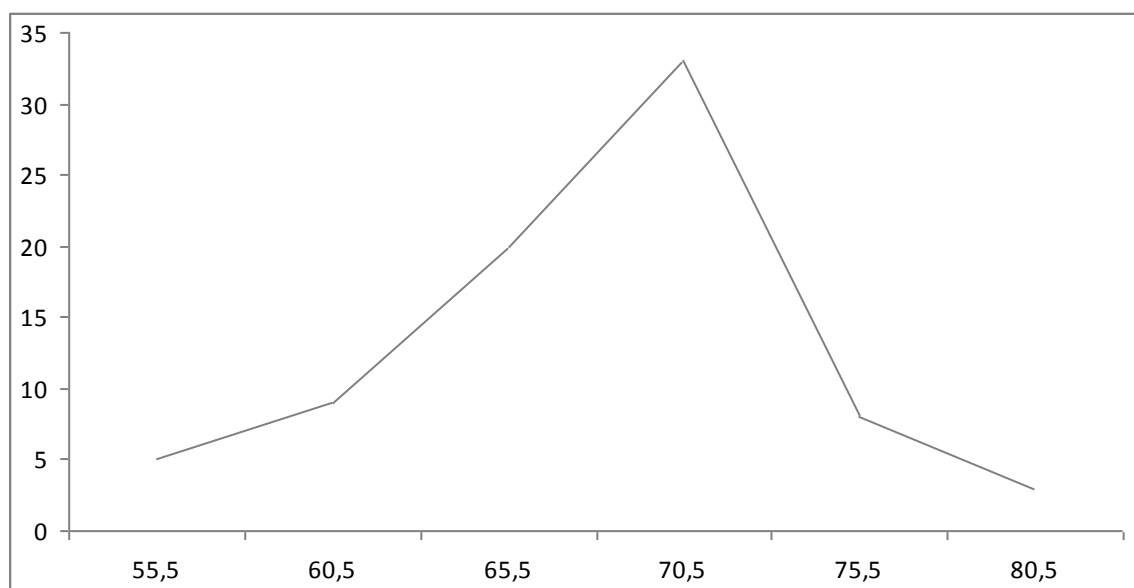


Рис. 2 Полигон частот

Запишем эмпирическую функцию распределения признака X , значения которой уже вычислены в колонке $n_{накоп}$ таблицы 3.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 55,5, \\ 0,064, & 55,5 < x \leq 60,5, \\ 0,179, & 60,5 < x \leq 65,5, \\ 0,436, & 65,5 < x \leq 70,5, \\ 0,859, & 70,5 < x \leq 75,5, \\ 0,962, & 75,5 < x \leq 80,5, \\ 1, & x > 80,5. \end{cases}$$

5. Чтобы найти выборочное среднее и выборочную дисперсию признака X , подставим соответствующие значения x_i и n_{x_i} из таблицы 3 и получим: $\bar{x}_g = 68$, $D_{xg} = 32,45$. Аналогично выборочное среднее и выборочная дисперсия признака Y равны: $\bar{y}_g = 531,656$, $D_{yg} = 1973,67$. Объем выборки равен $n = 78$. Подставив это значение в соответствующие формулы для исправленной выборочной дисперсии и исправленного среднеквадратического отклонения, получим:

$$S_x^2 = 32,87, \quad s_x = \sqrt{32,87} = 5,73,$$

$$S_y = 1999,3, \quad s_y = \sqrt{1999,3} = 44,71.$$

Лабораторная работа № 2

Статистическая проверка гипотезы о нормальном распределении признак X (или Y) генеральной совокупности (X, Y)

Цель работы: проверить по критерию Пирсона согласуется ли гипотеза о нормальном распределении одного из признаков генеральной совокупности при уровне значимости $\alpha = 0,05$. Если нет, то определить уровень значимости, при котором гипотезу о нормальном распределении можно принять. Найти интервальные оценки параметров a и σ с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$.

Порядок выполнения работы:

Выдвинуть гипотезу H_0 о нормальном распределении признака X (или Y).

1. Если частоты первых и последних интервалов малы (меньше пяти [1]), то объединить их с соседними интервалами. l' — новое число интервалов.
2. Вычислить по выборке значение статистики $\chi^2 = \sum_{i=1}^{l'} \frac{(n_{x_i} - n'_{x_i})^2}{n'_{x_i}}$. Случайная величина χ^2 имеет χ^2 -распределение Пирсона.

n_{x_i} — наблюдаемая частота, соответствующая i -му интервалу;

n'_{x_i} — теоретическая частота, которую вычисляется по формуле $n_{x_i} = n \cdot p_{x_i}$, где p_{x_i}

теоретическая вероятность попадания случайной величины X в интервал $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$

$$p_{x_i} = \Phi\left(\frac{\alpha_i - \bar{x}}{s_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_{i-1} - \bar{x}}{s_x}\right), \quad \text{где } \Phi(u) \text{ — функция Лапласа.}$$

3. В таблице χ^2 -распределения Пирсона найти критическое значение статистики $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$ по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = l' - r - 1$, где l' — число интервалов с учетом их объединения. Для нормального распределения $r = 2$. Сравнить значение $\chi^2_{набл}$, вычисленное по выборке, с табличным критическим значением $\chi^2_{кр}$ и сделать вывод о возможности принятия гипотезы H_0 при уровне значимости $\alpha = 0,05$. Если окажется, что при уровне значимости $\alpha = 0,05$ $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то по таблице Пирсона найти наименьшее критическое значение статистики $\chi^2_{кр}(\alpha', k)$ и определить уровень значимости α' , при котором можно считать, что данная выборка подчиняется нормальному закону распределения.
4. Найти доверительный интервал для неизвестного параметра a по формуле:

$$\bar{x} - \frac{t_\gamma s_x}{\sqrt{n}} \leq a \leq \bar{x} + \frac{t_\gamma s_x}{\sqrt{n}} \quad (1),$$

где t_γ — коэффициент Стьюдента, значение которого определяется объемом выборки и надежностью $\gamma = 1 - \alpha_1$ оценки. Значение t_γ находим по таблице распределения Стьюдента [1].

Доверительный интервал для неизвестной дисперсии определяется формулой

$$s_x(1 - q) \leq \sigma \leq s_x(1 + q) \quad (2).$$

Значение $q(\gamma, n)$ приведено в таблице (см. приложение 4 [1]).

Проверим гипотезу о нормальном распределении X по критерию Пирсона и найдем интервальные оценки a и σ .

1. Объединим пятый и шестой интервалы, так как значения частоты в шестом интервале меньше 5 (см. табл. 2).
2. Для вычисления по данным выборки значений статистики $\chi^2_{набл}$ составим расчетную таблицу 4.

Таблица 4

№	$\alpha_{i-1} - \alpha_i$	n_{x_i}	$u_i = \frac{\alpha_{i-1} - \bar{x}}{s_x}$	$\Phi(u_i)$	$p'_i = \Delta\Phi$	$n'_{x_i} = n \cdot p'_i$	Целое n'_{x_i}	$\frac{(n_{x_i} - n'_{x_i})^2}{n'_{x_i}}$
1	53 – 58	5	-2,62	-0,4591	0,0365	2,85	3	1,33
2	58 – 63	9	-1,74	-0,4591	0,1513	11,80	12	0,75
3	63 – 68	20	-0,87	-0,3078	0,3078	24,01	24	0,66
4	68 – 73	33	0	0	0,3078	24,01	24	3,37
5	73 – 83	11	0,87	0,3078	0,1878	14,63	15	1,01
Σ		78					78	7,12

При расчетах использовались значения, полученные в лабораторной работе №1: $\bar{x} = 68$, $s_x = 5,73$, $n = 78$.

3. Наблюдаемое значение статистики $\chi^2_{набл} = 7,12$. По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 5 [1]) по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = 2$ находим $\chi^2_{кр}(0,05; 2) = 6$. Так как $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$, то при уровне значимости $\alpha = 0,05$ нельзя признать распределение нормальным. Однако нулевая гипотеза может быть признана с уровнем значимости $\alpha' = 0,025$, так как $\chi^2_{кр}(0,025; 2) = 7,4$. В этом случае $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$, то есть, нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.
4. Оценим по формуле (1) неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью $\gamma = 1 - \alpha' = 1 - 0,025 = 0,975$. При $\gamma = 0,975$, $n = 80$ $t_\gamma \approx 2,24$ (см. приложение 3 [1]).

$$68 - \frac{2,24 \cdot 5,73}{\sqrt{78}} \leq a \leq 68 + \frac{2,24 \cdot 5,73}{\sqrt{78}}$$

$$66,55 \leq a \leq 69,45.$$

По таблице $q(\gamma, n)$ (см. приложение 4 [1]) найдем значение $q = q(0,975; 78) \approx 0,19$.

По формуле (2) находим интервальную оценку параметра σ :

$$5,73 \cdot (1 - 0,19) \leq \sigma \leq 5,73 \cdot (1 + 0,19).$$

$$4,64 \leq \sigma \leq 6,82.$$

Корреляционная зависимость между двумя признаками, построение эмпирической и теоретической линии регрессии

Цель работы: построить эмпирическую линию линейной регрессии, вычислить выборочный коэффициент корреляции, составить теоретическое уравнение линии линейной регрессии и найти доверительный интервал для коэффициента корреляции с надежностью $\gamma = 0,95$

1. Найти условные средние \bar{y}_{x_i} записать их в корреляционные таблицы.
2. Построить эмпирическую линию регрессии Y на X . Для этого в системе координат XOY отметить точки (x_i, \bar{y}_{x_i}) и соединить их отрезками прямой.
3. Вычислить исправленный выборочный корреляционный момент по формуле

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m n_{ij} x_i y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \right).$$

Найти выборочный коэффициент корреляции

$$r_g = \frac{S_{xy}}{s_x \cdot s_y}.$$

4. Если значение выборочного коэффициента корреляции существенно отличается от единицы, то следует проверить гипотезу H_0 : о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции r при конкурирующей гипотезе $H_1: r \neq 0$. Если нулевая гипотеза будет принята, то выборочный коэффициент незначим, следовательно, X и Y некоррелированы. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем значение

статистики $T = \frac{r_g \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_g^2}}$. Величина T имеет распределение Стьюдента с $k = n-2$

степенями свободы. При $|T| < t_{кр}$ нет оснований опровергнуть гипотезу H_0 , то есть, X и Y некоррелированы. Если $|T| > t_{кр}$, то гипотеза H_0 отвергается. В этом случае следует принять, что коэффициент корреляции существенно отличен от нуля и признаки X и Y коррелированы. Критические точки распределения Стьюдента приведены в таблице (см. приложение 6 [1]).

5. Если выборочный коэффициент корреляции будет признан значимым, то записать уравнение линейной регрессии Y на X .

$$\hat{y}_x - \bar{y} = r_g \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}).$$

6. Найти доверительный интервал для коэффициента корреляции надежностью $\gamma = 0,95$ по формуле:

$$r_g - t_\gamma \frac{1-r_g^2}{\sqrt{n}} < r < r_g + t_\gamma \frac{1-r_g^2}{\sqrt{n}},$$

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ — коэффициент Стьюдента.

Найдем корреляционную зависимость между X и Y , используя вариационный ряд лабораторной работы №1.

1. Дополним корреляционную таблицу строчкой условных значений признака Y . Для этого вычислим значения признака Y при условии, что X принимает значения x_i :

$$\begin{aligned} \bar{y}_{x=55,5} &= \frac{437 \cdot 4 + 471 \cdot 1}{5} = 443,8; & \bar{y}_{x=70,5} &= \frac{539 \cdot 21 + 573 \cdot 12}{39} = 551,4; \\ \bar{y}_{x=60,5} &= \frac{471 \cdot 8 + 505 \cdot 1}{9} = 474,8; & \bar{y}_{x=75,5} &= \frac{573 \cdot 6 + 607 \cdot 2}{8} = 581,5; \\ \bar{y}_{x=65,5} &= \frac{505 \cdot 16 + 539 \cdot 4}{20} = 511,8; & \bar{y}_{x=80,5} &= \frac{607 \cdot 1 + 641 \cdot 2}{3} = 629,7. \end{aligned}$$

Таблица 5

$Y \backslash X$	55,5	60,5	65,5	70,5	75,5	80,5	n_{y_j}
437	4						4
471	1	8	16				9
505		1	4	21			17
539				12	6		25
573					2	1	18
607						2	3
641							2
n_{x_i}	5	9	20	33	8	3	78
\bar{y}_{x_i}	443,8	474,8	511,8	551,4	581,5	629,7	

2. В системе координат XOY отметим точки с координатами $(x_i; \bar{y}_{x_i})$ и соединим их отрезками прямой. Получим ломаную эмпирическую линию регрессии Y на X .

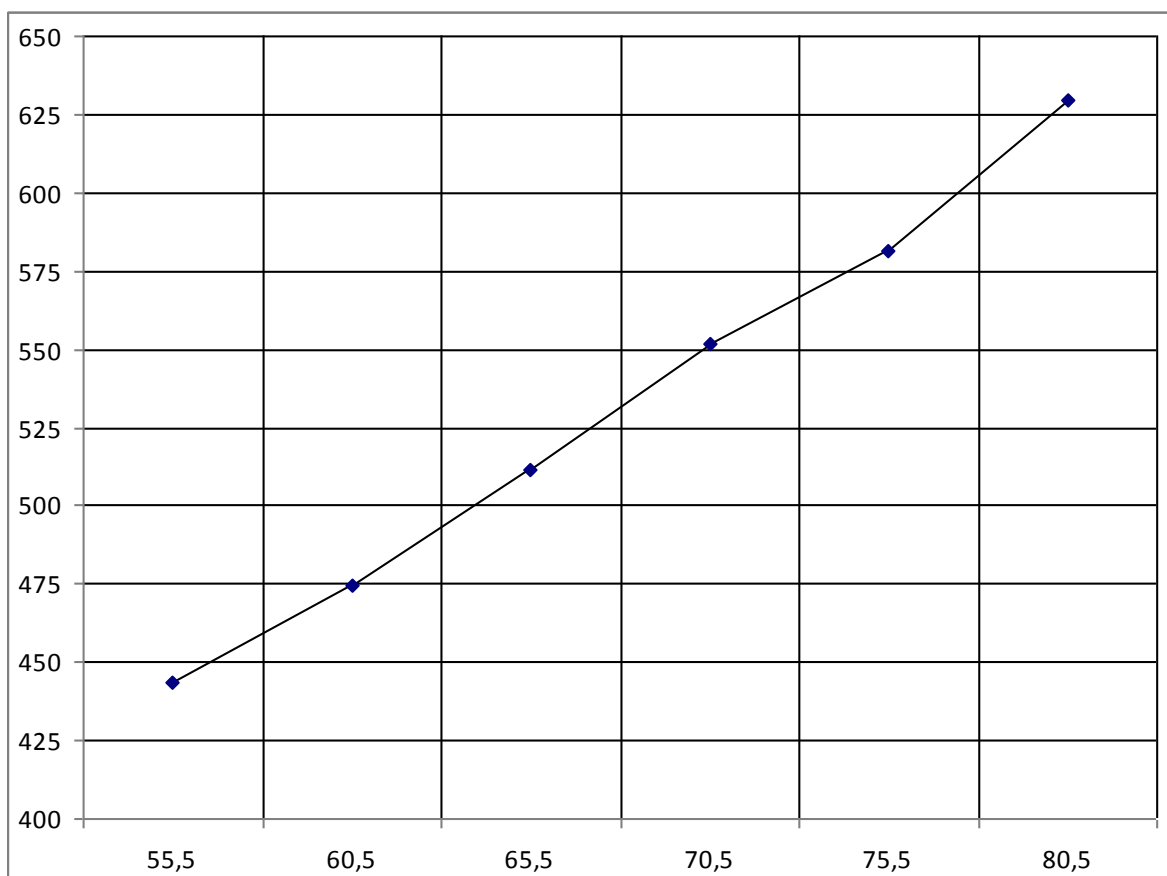


Рис. 3 Эмпирическая линия регрессии Y на X

3. Для вычисления значения суммы в формуле выборочного корреляционного момента S_{xy} составим расчетную таблицу 6.

Таблица 6

x_i	y_i	n_{ij}	$x_i \cdot y_j \cdot n_{ij}$
55,5	437	4	97014,0
55,5	471	1	26140,5
60,5	471	8	227964,0
60,5	505	1	30552,5
65,5	505	16	529240,0
65,5	539	4	141218,0
70,5	539	21	797989,5
70,5	573	12	484758,0
75,5	573	6	259569,0
75,5	607	2	91657,0
80,5	607	1	48863,5
80,5	641	2	103201,0
Σ			2838167

$$S_{xy} = \frac{1}{78-1} \cdot (2838167 - 78 \cdot 68 \cdot 531,656) = 237,19$$

$$r_e = \frac{237,19}{5,73 \cdot 44,71} = 0,93$$

4. Так как полученное значение выборочного коэффициента корреляции $r_e = 0,93$ близко к единице, то X и Y следует признать коррелированными.
5. Запишем уравнение теоретической прямой линии регрессии Y на X :

$$\hat{y}_x - 531,656 = 0,93 \cdot \frac{44,71}{5,73} (x - 68) \quad \text{или}$$

$$\hat{y}_x = 7,26x + 38,21.$$

Найдем значения $\hat{y}(x_i)$ и занесем их в таблицу 7 .

Таблица 7

x_i	55,5	60,5	65,5	70,5	75,5	80,5
\bar{y}_{x_i}	443,8	474,8	511,8	551,4	581,5	629,7
$\hat{y}(x_i)$	441,1	477,4	513,7	550,0	586,3	622,6

Вывод: сравнивая \bar{y}_{x_i} и $\hat{y}(x_i)$, видим, что уравнение регрессии хорошо согласуется с данными выборки.

Построим теоретическую прямую регрессии Y на X рис.4 .

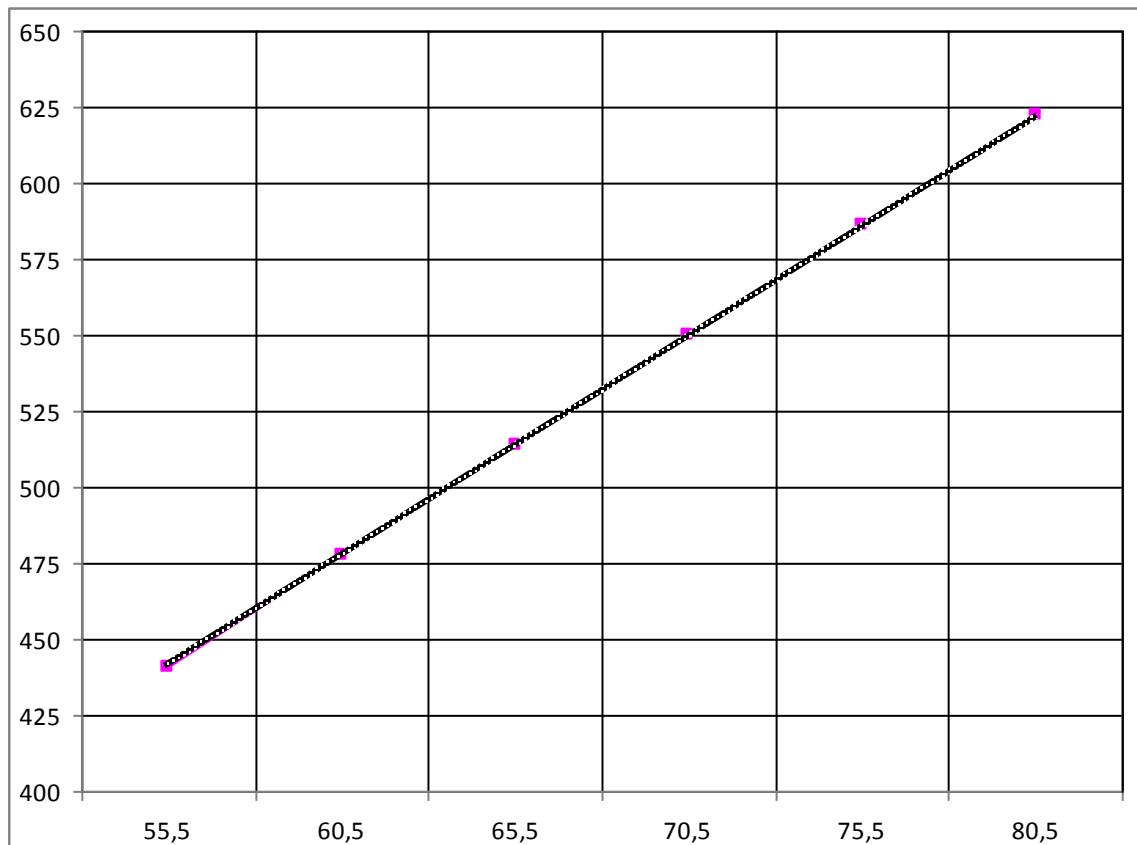


Рис.4 Теоретическая прямая регрессии Y на X

5. Найдем доверительный интервал для коэффициента корреляции r . Значение $t_\gamma = t(\gamma, n)$ найдем по таблице значений коэффициента Стьюдента (см. приложение 3 [1]). Для $\gamma = 0,95$ и $n = 78$ $t_\gamma = 1,991$.

$$0,93 - 1,991 \cdot \frac{1 - 0,93^2}{\sqrt{78}} < r < 0,93 + 1,991 \cdot \frac{1 - 0,93^2}{\sqrt{78}},$$
$$0,90 < r < 0,96.$$

Литература

1. Гмурман В.Е., Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высшая школа, 2005.
2. Гмурман В.Е., Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 2005.
3. Колде Я.К., Практикум по теории вероятностей и математической статистике. — М. Высшая школа, 1991.

Образец титульного листа отчета по лабораторной работе

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Кафедра вычислительных методов и уравнений математической физики

Оценка работы _____

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № ____
Название лабораторной работы

Отчет

Преподаватель _____ ФИО Преподавателя

Студент _____ ФИО студента

Группа _____

Екатеринбург
УрФУ
20__ г

Выборки для задач математической статистики

Вариант №1

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
-262	533	-256	520	-273	550	-270	555
-261	537	-288	573	-270	537	-264	536
-268	537	-269	549	-266	530	-269	551
-255	520	-276	549	-264	531	-268	534
-261	533	-266	536	-270	536	-262	539
-275	551	-248	508	-285	562	-280	562
-263	537	-281	556	-268	544	-263	539
-279	558	-266	531	-268	547	-289	572
-269	550	-282	563	-272	537	-278	567
-276	548	-281	554	-269	542	-279	561
-274	560	-265	539	-273	542	-265	540
-272	551	-288	573	-283	580	-273	550
-284	575	-290	577	-269	543	-283	568
-276	555	-278	554	-284	572	-252	516
-275	556	-282	562	-270	548	-283	566
-276	547	-276	550	-271	549	-285	581
-250	501	-271	540	-271	547	-279	557
-278	566	-279	554	-289	573	-264	520
-267	543	-273	538	-294	587	-270	544
-288	586	-271	536	-271	544	-281	564
-266	526	-264	536	-271	545	-268	541
-275	562	-270	556	-279	551	-277	568
-285	587	-261	518	-277	551	-273	552
-259	530	-	-	-	-	-	-
	N=93				X	Y	
	Начало первого интервала				-298	494	
	Длина интервала				8	15	

Вариант №2

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
23	38	19	28	20	35	42	58
38	63	18	27	37	55	35	45
34	55	31	56	47	79	45	64
16	16	31	55	42	65	32	58
42	64	43	74	25	39	30	33
44	70	49	84	22	35	32	46
33	50	26	31	28	47	30	46
18	22	42	58	26	28	34	50
29	44	31	54	25	31	36	63
42	76	45	78	46	77	42	70
39	71	28	47	42	59	27	52
36	58	49	79	32	45	29	49
27	45	23	35	36	58	38	57
30	49	57	95	31	45	41	77
36	65	29	39	43	66	21	32
31	44	23	33	44	75	32	50
38	55	25	41	49	76	27	40
35	54	32	40	28	38	53	92
45	75	25	39	50	90	42	65
48	89	29	38	34	63	50	81
18	22	36	59	40	59	39	75
30	48	39	69	42	70	37	62
50	76	-	-	-	-	-	-
	N=89				X	Y	
	Начало первого интервала				12	9	
	Длина интервала				8	14	

Вариант №3

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
299	205	295	199	247	161	316	219
373	250	289	196	374	255	295	197
325	227	254	176	296	200	216	145
277	187	273	191	354	243	302	208
383	267	224	152	148	99	322	221
291	198	320	218	359	245	399	276
331	229	331	229	284	194	254	174
240	168	260	170	323	222	345	237
435	300	281	197	355	242	408	287
327	229	373	257	337	233	239	164
251	173	252	175	198	136	279	193
310	205	401	274	386	271	372	250
152	96	288	195	420	294	298	208
310	212	296	198	342	231	287	198
198	136	265	176	320	218	343	243
365	250	371	250	329	228	302	203
416	288	306	213	283	196	240	160
413	286	296	199	414	288	322	218
353	240	294	209	400	279	369	254
404	276	377	262	252	168	273	182
409	281	293	197	238	162	302	214
288	196	174	113	301	209	323	219
288	204	337	237	239	137	272	188
310	205	340	230	233	160	287	202
	N=96				X	Y	
	Начало первого интервала				124	79	
	Длина интервала				49	35	

Вариант №4

Y	Z	Y	Z	Y	Z	Y	Z
122	339	133	373	138	365	151	420
138	353	148	396	137	352	137	359
137	377	144	375	141	378	131	340
133	349	154	419	160	429	128	363
132	394	140	372	151	412	148	373
143	385	153	396	131	373	151	417
137	395	148	385	141	407	130	331
131	389	150	423	157	405	138	368
142	353	145	376	121	334	140	384
138	405	124	368	145	385	137	365
143	365	135	383	149	377	137	369
114	310	160	421	137	376	140	364
136	395	135	394	130	379	147	374
130	368	139	362	144	358	148	386
143	361	151	386	148	388	140	374
137	383	123	338	145	396	145	371
138	401	139	404	131	373	149	388
140	398	134	388	143	372	158	446
153	401	148	405	145	404	130	375
152	388	129	364	158	450	137	347
153	408	130	374	138	353	159	432
149	388	144	376	123	343	150	420
158	417	147	372	152	387	138	379
126	375	128	360	139	374	-	-
	N=95			X	Y	Z	
	Начало первого интервала			53	110	298	
	Длина интервала			4	8	24	

Вариант №5

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
-177	260	-145	223	-204	309	-162	238
-146	221	-135	203	-110	169	-151	239
-226	342	-172	254	-152	230	-111	171
-184	266	-181	275	-161	238	-143	222
-152	237	-259	387	-167	259	-201	304
-155	237	-133	196	-109	158	-180	269
-230	347	-161	244	-186	283	-167	248
-155	244	-189	285	-203	316	-176	254
-199	302	-208	318	-99	149	-176	269
-227	346	-220	323	-168	256	-234	344
-244	364	-191	291	-159	251	-163	242
-172	256	-141	218	-266	401	-166	249
-184	273	-163	252	-159	242	-188	287
-170	256	-188	279	-237	355	-130	201
-183	272	-170	254	-222	334	-215	314
-218	321	-203	300	-147	225	-191	293
-240	357	-204	299	-188	278	-176	256
-180	279	-186	286	-211	329	-170	248
-232	347	-172	256	-138	208	-161	248
-158	238	-255	381	-157	244	-232	351
-183	280	-207	308	-183	274	-163	247
-184	271	-168	252	-217	330	-150	224
-162	242	-174	268	-167	251	-123	191
-198	299	-172	252	-208	309	-256	378
-171	262	-	-	-	-	-	-
	N=97				X	Y	
	Начало первого интервала				-280	128	
	Длина интервала				29	43	

Вариант №6

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
298	-69	308	-59	270	-63	301	-69
291	-73	310	-67	304	-76	338	-73
301	-68	308	-71	295	-62	318	-78
283	-60	326	-65	293	-69	246	-77
337	-82	305	-63	307	-74	306	-69
311	-78	316	-79	332	-82	318	-62
306	-68	308	-63	302	-64	304	-70
307	-71	328	-73	309	-72	320	-77
293	-60	300	-62	303	-64	306	-79
291	-64	299	-73	303	-66	294	-66
307	-74	290	-71	283	-66	305	-80
306	-73	293	-68	324	-74	312	-62
298	-66	303	-68	303	-67	304	-63
310	-72	303	-78	297	-77	300	-72
292	-68	294	-71	310	-80	284	-58
311	-73	309	-63	309	-73	304	-80
298	-58	302	-66	303	-61	303	-64
315	-75	286	-66	299	-71	307	-67
303	-63	274	-58	303	-70	304	-66
329	-76	289	-67	293	-76	316	-67
309	-76	336	-73	328	-75	307	-71
306	-77	297	-73	310	-77	289	-62
292	-69	327	-80	315	-67	301	-64
297	-63	343	-83	306	-76	297	-69
	N=96				X	Y	
	Начало первого интервала				264	-85	
	Длина интервала				13	5	

Вариант №7

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
233	-7	443	-9	392	-10	473	-8
432	-6	201	-6	245	-7	392	-1
385	-10	440	-2	445	-1	442	-2
347	-1	274	-2	323	-2	356	-7
274	-2	261	-8	331	-10	386	-3
276	-6	270	-9	140	-2	338	-5
294	-6	345	-2	303	-6	277	-4
348	-5	334	-8	247	-7	247	-4
315	-10	498	-9	387	-3	170	-5
307	-4	342	-7	426	-7	380	-7
377	-9	250	-2	304	-6	221	-8
338	-5	403	-5	257	-9	287	-10
353	-7	434	-3	377	-5	244	-5
332	-3	320	-6	535	-1	313	-6
307	-10	318	-10	208	-5	219	-5
264	-1	256	-4	357	-4	392	-5
285	-3	358	-7	337	-3	415	-4
377	-5	347	-2	447	-2	341	-8
137	-5	318	-4	238	-7	321	-6
245	-1	369	-10	182	-3	255	-7
421	-1	400	-10	437	-9	206	-1
313	-10	277	-9	292	-10	324	-10
359	-3	395	-10	-	-	-	-
	N=90				X	Y	
	Начало первого интервала				104	-11	
	Длина интервала				67	2	

Вариант №8

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
-34	96	-14	75	-24	66	-26	86
-20	86	-36	80	-18	84	-28	86
-35	96	-22	92	-21	71	-33	80
-28	68	-29	86	-25	86	-23	80
-35	92	-31	77	-23	85	-17	86
-13	54	-22	99	-33	78	-20	74
-19	81	-34	94	-16	75	-26	86
-31	89	-22	104	-18	97	-21	80
-23	78	-29	86	-31	67	-26	79
-26	71	-15	74	-19	83	-26	92
-24	77	-17	75	-27	74	-16	77
-27	79	-33	84	-22	93	-24	81
-27	81	-22	88	-35	109	-31	87
-17	81	-30	67	-30	99	-24	71
-13	66	-27	78	-17	76	-18	81
-30	85	-19	87	-30	77	-19	76
-37	92	-27	74	-19	70	-27	77
-21	68	-27	107	-31	92	-17	95
-35	104	-34	76	-29	79	-21	78
-31	83	-18	102	-22	101	-26	99
-27	81	-28	79	-21	93	-35	78
-18	102	-36	86	-28	74	-31	94
-33	92	-20	70	-	-	-	-
	N=90			X	Y		
	Начало первого интервала			-39	49	-	
	Длина интервала			5	10		

Вариант №9

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
89	533	88	520	92	550	93	555
90	537	96	573	90	537	91	536
91	537	92	549	89	530	92	551
87	520	92	549	90	531	90	534
89	533	91	536	91	536	90	539
93	551	85	508	95	562	94	562
90	575	94	556	92	544	90	539
92	550	89	531	92	547	97	572
93	548	94	563	91	537	95	567
94	560	94	554	91	542	94	561
92	551	90	539	92	542	91	540
97	575	96	573	97	580	93	550
93	555	97	577	92	543	95	568
89	526	94	554	96	572	87	516
94	536	95	562	92	548	96	566
92	547	93	550	93	549	98	581
99	501	91	540	92	547	93	557
89	566	93	554	97	573	88	520
94	543	91	538	99	587	92	544
98	586	91	536	92	544	95	564
89	526	91	536	91	545	91	541
88	562	92	556	93	551	95	568
98	587	87	518	93	551	93	552
89	530		-	-	-	-	-
	N=93				X	Y	
	Начало первого интервала				84	494	
	Длина интервала				3	15	

Вариант №10

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
23	7	19	6	20	36	42	11
38	11	18	5	37	10	35	9
34	10	31	10	47	14	45	12
16	4	31	10	42	12	32	10
42	11	43	13	25	6	30	7
44	12	49	15	22	6	32	8
33	9	26	6	28	8	30	9
18	5	42	11	26	6	34	9
29	8	31	10	25	6	36	11
42	13	45	14	46	13	42	13
39	12	28	8	42	11	27	9
36	10	49	14	32	9	29	9
27	9	23	6	36	10	38	10
30	9	57	16	31	8	41	13
36	11	29	8	43	12	21	7
31	9	23	6	44	14	32	9
38	10	25	8	49	14	27	8
35	10	32	8	28	7	53	16
45	13	25	7	50	16	42	12
48	15	29	8	34	11	50	15
18	4	36	10	40	11	39	13
30	9	39	12	42	12	37	11
50	14	-	-	-	-	-	-
					X	Y	
					12	3	
					8	3	

Вариант №11

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
42	205	41	199	34	161	45	219
52	250	41	196	53	255	41	197
46	227	36	176	41	200	30	145
39	187	39	191	50	243	43	208
54	267	32	152	21	99	45	221
41	198	45	218	51	245	57	276
47	229	36	229	40	194	35	174
34	168	36	170	46	222	48	237
62	300	40	197	50	242	58	287
46	229	52	257	48	233	34	164
35	173	36	175	28	136	39	193
43	205	56	274	55	271	52	250
21	96	41	195	60	294	42	208
44	212	41	198	48	231	40	198
28	136	37	176	45	218	49	243
52	250	52	250	47	228	42	203
59	288	43	213	40	196	33	160
59	286	41	199	58	288	45	218
50	240	42	209	57	279	52	254
57	276	53	262	35	168	38	182
58	281	41	197	34	162	43	214
41	196	24	113	43	209	45	219
41	204	48	237	33	137	38	188
43	205	48	230	33	160	41	202
	N=96				X	Y	
	Начало первого интервала				17	79	
	Длина интервала				8	35	

Вариант №12

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
58	339	63	373	62	365	72	420
62	353	68	396	62	352	61	359
65	377	64	375	66	378	58	340
61	349	70	419	73	429	63	363
66	394	63	372	70	412	60	373
67	385	67	396	64	373	70	417
67	395	65	385	69	407	58	331
65	389	71	423	70	405	62	368
62	353	64	376	59	334	66	384
68	405	62	368	65	385	64	365
64	365	64	383	65	377	64	369
55	310	72	421	64	376	64	364
68	395	66	394	64	379	64	374
64	368	63	362	63	358	67	386
63	361	67	386	68	388	64	374
64	383	59	338	67	396	65	371
67	401	69	404	63	373	67	388
69	398	67	388	63	372	75	446
70	401	69	405	68	404	63	375
68	388	64	364	77	450	60	347
69	408	64	374	62	353	73	432
68	388	65	376	59	343	73	420
70	417	65	372	67	387	66	379
63	375	61	360	63	374	-	-
	N=95				X	Y	
	Начало первого интервала				53	298	
	Длина интервала				4	24	

Вариант №13

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
45	260	38	223	53	309	41	238
38	221	34	203	29	169	40	239
58	342	44	254	40	230	30	171
46	266	47	275	41	238	38	222
40	237	65	387	44	259	51	304
41	237	34	196	28	158	45	269
58	347	42	244	48	283	43	248
41	244	48	285	53	316	44	254
51	302	54	318	26	149	46	269
58	346	55	323	43	256	59	344
62	364	50	291	42	251	42	242
44	256	37	218	68	401	43	249
47	273	43	252	42	242	49	287
43	256	47	279	60	355	34	201
47	272	44	254	56	334	54	314
55	321	51	300	39	225	49	293
61	357	51	299	47	278	44	256
47	279	48	286	55	329	43	248
58	347	43	256	35	208	42	248
40	238	64	381	41	244	59	351
47	280	53	308	47	274	42	247
46	271	43	252	56	330	39	224
42	242	45	268	42	251	33	191
50	299	43	252	53	309	64	378
45	262	-	-	-	-	-	-
	N=97				X	Y	
	Начало первого интервала				22	128	
	Длина интервала				8	43	

Вариант №14

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
233	25	443	49	392	43	473	52
432	47	201	42	245	27	392	43
385	42	440	48	445	49	442	49
347	38	274	30	323	35	356	39
274	30	261	29	331	36	386	42
276	30	270	29	140	15	338	37
294	32	345	38	303	33	277	30
348	38	334	37	247	27	247	27
315	34	498	55	387	43	170	18
307	34	342	38	426	47	380	42
377	41	250	27	304	33	221	24
338	37	403	44	257	28	287	31
353	39	434	48	377	41	244	27
332	36	320	35	535	59	313	34
307	34	318	35	208	23	219	24
264	29	256	28	357	39	392	43
285	31	358	39	337	37	415	46
377	41	347	38	447	49	341	37
137	15	318	35	238	26	321	35
245	27	369	40	182	20	255	28
421	46	400	44	437	48	206	22
313	34	277	30	292	32	324	35
359	39	395	43	-	-	-	-
	N=90				X	Y	
	Начало первого интервала				11	104	
	Длина интервала				8	67	

Вариант №15

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
7	38	6	28	6	35	11	58
11	63	5	27	10	55	9	45
10	55	10	56	14	79	12	64
4	16	10	55	12	65	10	58
11	64	13	74	6	39	7	33
12	70	15	84	6	35	8	46
9	50	6	31	8	47	9	46
5	22	11	58	6	28	9	50
8	44	10	54	6	31	11	63
13	76	14	78	13	77	13	70
12	71	8	47	11	59	9	52
10	58	14	79	9	45	9	49
9	45	6	35	10	58	10	57
9	49	16	95	8	45	13	77
11	65	8	39	12	66	7	32
9	44	6	33	14	75	9	50
10	55	8	41	14	76	8	40
10	54	8	40	7	38	16	92
13	75	7	39	16	90	12	65
15	89	8	38	11	63	15	81
4	22	10	59	11	59	13	75
9	48	12	69	12	70	11	62
14	76						-
	N=89				X	Y	
	Начало первого интервала				3	9	
	Длина интервала				3	14	

Вариант №16

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
-262	89	-256	88	-273	92	-270	93
-261	90	-288	96	-270	90	-264	91
-268	91	-269	92	-266	89	-269	92
-255	87	-276	92	-264	90	-268	90
-261	89	-266	91	-270	91	-262	90
-275	93	-248	85	-285	95	-280	94
-263	90	-281	94	-268	92	-263	90
-279	92	-266	89	-268	92	-289	97
-269	93	-282	94	-272	91	-278	95
-276	94	-281	94	-269	91	-279	94
-274	92	-265	90	-273	92	-265	91
-272	97	-288	96	-283	97	-273	93
-284	93	-290	97	-269	92	-283	95
-276	89	-278	94	-284	96	-252	87
-275	94	-282	95	-270	92	-283	96
-276	92	-276	93	-271	93	-285	98
-250	99	-271	91	-271	92	-279	93
-278	89	-279	93	-289	97	-264	88
-267	94	-273	91	-294	99	-270	92
-288	98	-271	91	-271	92	-281	95
-266	89	-264	91	-271	91	-268	91
-275	88	-270	92	-279	93	-277	95
-285	98	-261	87	-277	93	-273	93
-259	89						-
	N=93				X	Y	
	Начало первого интервала				-298	84	
	Длина интервала				8	3	

Вариант №17

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
42	299	41	295	34	247	45	316
52	373	41	289	53	374	41	295
46	325	36	254	41	296	30	216
39	277	39	273	50	354	43	302
54	383	32	224	21	148	45	322
41	291	45	320	51	359	57	399
47	331	36	331	40	284	35	254
34	240	36	260	46	323	48	345
62	435	40	281	50	355	58	408
46	327	52	373	48	337	34	239
35	251	36	252	28	198	39	279
43	310	56	401	55	386	52	372
21	152	41	288	60	420	42	298
44	310	41	296	48	342	40	287
28	198	37	265	45	320	49	343
52	365	52	371	47	329	42	302
59	416	43	306	40	283	33	240
59	413	41	296	58	414	45	322
50	353	42	294	57	400	52	369
57	404	53	377	35	252	38	273
58	409	41	293	34	238	43	302
41	288	24	174	43	301	45	323
41	288	48	337	33	239	38	272
43	310	48	340	33	233	41	287
	N=96				X	Y	
	Начало первого интервала				17	124	
	Длина интервала				8	49	

Вариант №18

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
122	58	133	63	138	62	151	72
138	62	148	68	137	62	137	61
137	65	144	64	141	66	131	58
133	61	154	70	160	73	128	63
132	66	140	63	151	70	148	60
143	67	153	67	131	64	151	70
137	67	148	65	141	69	130	58
131	65	150	71	157	70	138	62
142	62	145	64	121	59	140	66
138	68	124	62	145	65	137	64
143	64	135	64	149	65	137	64
114	55	160	72	137	64	140	64
136	68	135	66	130	64	147	64
130	64	139	63	144	63	148	67
143	63	151	67	148	68	140	64
137	64	123	59	145	67	145	65
138	67	139	69	131	63	149	67
140	69	134	67	143	63	158	75
153	70	148	69	145	68	130	63
152	68	129	64	158	77	137	60
153	69	130	64	138	62	159	73
149	68	144	65	123	59	150	73
158	70	147	65	152	67	138	66
126	63	128	61	139	63	-	-
	N=95			X	Y		
	Начало первого интервала			110	53		
	Длина интервала			8	44		

Вариант №19

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
7	38	6	28	6	35	11	58
11	63	5	27	10	55	9	45
10	55	10	56	14	79	12	64
4	16	10	55	12	65	10	58
11	64	13	74	6	39	7	33
12	70	15	84	6	35	8	46
9	50	6	31	8	47	9	46
5	22	11	58	6	28	9	50
8	44	10	54	6	31	11	63
13	76	14	78	13	77	13	70
12	71	8	47	11	59	9	52
10	58	14	79	9	45	9	49
9	45	6	35	10	58	10	57
9	49	16	95	8	45	13	77
11	65	8	39	12	66	7	32
9	44	6	33	14	75	9	50
10	55	8	41	14	76	8	40
10	54	8	40	7	38	16	92
13	75	7	39	16	90	12	65
15	89	8	38	11	63	15	81
4	22	10	59	11	59	13	75
9	48	12	69	12	70	11	62
14	76						-
	N=89				X	Y	
	Начало первого интервала				3	9	
	Длина интервала				3	14	

Вариант №12

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
58	339	63	373	62	365	72	420
62	353	68	396	62	352	61	359
65	377	64	375	66	378	58	340
61	349	70	419	73	429	63	363
66	394	63	372	70	412	60	373
67	385	67	396	64	373	70	417
67	395	65	385	69	407	58	331
65	389	71	423	70	405	62	368
62	353	64	376	59	334	66	384
68	405	62	368	65	385	64	365
64	365	64	383	65	377	64	369
55	310	72	421	64	376	64	364
68	395	66	394	64	379	64	374
64	368	63	362	63	358	67	386
63	361	67	386	68	388	64	374
64	383	59	338	67	396	65	371
67	401	69	404	63	373	67	388
69	398	67	388	63	372	75	446
70	401	69	405	68	404	63	375
68	388	64	364	77	450	60	347
69	408	64	374	62	353	73	432
68	388	65	376	59	343	73	420
70	417	65	372	67	387	66	379
63	375	61	360	63	374	-	-
	N=95				X	Y	
	Начало первого интервала				53	298	
	Длина интервала				4	24	