Е.А. Голикова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

Е.А. Голикова

Элементы теории вероятностей

*Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программе
бакалавриата и специалитета по направлениям подготовки
010900.62 "Прикладные математика и физика",
140800.62 "Ядерные физика и технологии",
210100.62 "Электроника и наноэлектроника",
201000 "Биотехнические системы и технология",
200100 "Приборостроение", 221700 "Стандартизация и метрология"*

Екатеринбург
УрФУ
2012

УДК 517.9 (075.8)
ББК 22.161.6я73
Г56

Р е ц е н з е н т ы:

отдел алгебры и топологии ИММ УрО РАН (зав. отделом чл.-кор. РАН, проф., д-р физ.-мат. наук А.А. Махнев);

доц., канд. физ.-мат. наук Ю.Б. Мельников (Уральский государственный экономический университет)

Научный редактор доц., канд. физ.-мат. наук А.Л. Крохин

Голикова, Е.А.

Г56 Элементы теории вероятностей: учебное пособие / Е.А. Голикова.– Екатеринбург: УрФУ, 2012.– 127 с.

ISBN 978-5-321-02152-1

Учебное пособие подготовлено на основе лекций и практических занятий по дисциплине "Теория вероятностей и математическая статистика"для студентов физических специальностей физико-технического факультета УрФУ второго курса. В каждом разделе пособия приведены формулировки необходимых определений и теорем, а также подробно разобраны основные типы задач. Параграфы заканчиваются подборкой задач (с ответами) для самостоятельного решения. Пособие может быть использовано как руководство к решению задач.

Издание подготовлено при поддержке физико-технического факультета УрФУ.

Библиогр.: 12 назв. Рис. 26.

УДК 517.9 (075.8)
ББК 22.161.6я73

ISBN 978-5-321-02152-1

Глава 1

Случайные события

1.1. Элементы комбинаторики

В теории вероятностей приходится довольно часто считать количество исходов некоторого стохастического эксперимента, т.е. решать комбинаторные задачи. Предметом комбинаторики является вычисление количества элементов в различных конечных множествах. Решение комбинаторных задач зачастую носит алгоритмический характер: строится алгоритм пересчета элементов нужного сорта. Рассмотрим здесь некоторые стандартные комбинации, составленные из элементов конечных множеств, и методы их пересчета.

Пусть имеется два конечных множества: A, состоящее из k_1 элементов ($|A| = k_1$), и B, состоящее из k_2 элементов ($|B| = k_2$). Тогда

1) если $A \cap B = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A| + |B| = k_1 + k_2$;

2) если $C = \{(a, b)|\ a \in A, b \in B\}$ — множество упорядоченных пар, то $|C| = |A| \cdot |B| = k_1 k_2$.

Эти два очевидных теоретико-множественных утверждения принято формулировать на языке выборок как правила суммы и произведения.

Правило суммы. Если некоторый объект A можно выбрать k_1 способами, а другой объект B можно выбрать k_2 способами, то выбор "либо A, либо B"можно осуществить $k_1 + k_2$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать k_1 способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) k_2 способами, то пары объектов A и B можно выбрать $k_1 k_2$ способами.

Пересчитаем все упорядоченные пары (a, b), где $a \in A$, $b \in B$ и $|A| = k_1$,

$|B| = k_2$. Для этого разместим все пары в матрице размерности $k_1 \times k_2$:

$$\begin{array}{l} (a_1, b_1)(a_1, b_2) \dots (a_1, b_{k_2}) \\ (a_2, b_1)(a_2, b_2) \dots (a_2, b_{k_2}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_{k_1}, b_1)(a_{k_1}, b_2) \dots (a_{k_1}, b_{k_2}) \end{array}$$

Поскольку $(a, b) = (a', b')$ тогда и только тогда, когда $a = a', b = b'$, то все элементы матрицы различны; т. е. количество пар равно $|A| \cdot |B| = k_1 k_2$. Этот простой принцип с помощью индукции можно перенести на пересчет количества произвольных упорядоченных $m-$к $(a_1, a_2, \dots, a_m), a_i \in A_i$, $1 \le i \le m$.

Теорема 1.1 *Если* $C = \{(a_1, a_2, \dots, a_m)|\ a_i \in A_i, 1 \le i \le m\}$ *— множество упорядоченных* $m-$*к, составленных из элементов множеств* A_i*, где* $|A_i| = k_i, 1 \le i \le m$*, то* $|C| = k_1 k_2 \dots k_m$*. В частности, если* $A_i = A, 1 \le i \le m$ *и* $|A| = k$*, то* $|C| = k^m$*.*

Пусть множество A состоит из k элементов ($|A| = k$). Из этого множества разными способами будем делать выборки по m элементов. Качество выборки будем характеризовать по двум признакам: 1) упорядочена выборка (т. е. является ли она упорядоченной $m-$кой элементов множества A) или нет; 2) с повторениями (т. е. возможно ли в выборке появление одного и того же элемента больше, чем один раз) или нет. Свойства выборки зависят, разумеется, от способа выбора. Наша ближайшая цель — пересчитать выборки разного вида.

★ Для наглядности будем в рассуждениях использовать "урновую модель": из урны, в которой находится k шаров (которые будем считать перенумерованными), наудачу извлекаем m шаров. При этом, во-первых, шары могут быть разных цветов, а могут быть одного цвета; во-вторых, извлечение может быть двух видов: с возвращением (запомнили номер шара и вернули его в урну) или без; в-третьих, с фиксацией номера извлечения (при первом извлечении — шар номер 3, при втором — шар номер 1 и т.д.) или без. Различные соединения перечисленных трех качеств дают разные виды выборок.

I. Перестановки

1). Шары одного цвета; выбор происходит без возвращения и с фиксацией номера извлечения. Потребуем также, чтобы $m = k$. Тогда каждый раз в качестве исхода такого опыта мы будем иметь упорядоченную $m-$ку чисел $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, где a_i — номер шара при $i-$м извлечении и $a_i \ne a_j$, если $i \ne j$.

Итак, имеем упорядоченную выборку без повторений из m-элементого множества по m элементов. Фактически, это упорядоченный список элементов множества A. Такого сорта выборки называются *перестановками.* Подсчитаем их количество, которое обозначается P_m. На первое место можно поставить любой из m элементов множества A (A — множество номеров шаров, $m = k$), после выбора первого элемента, на второе место имеется $m - 1$ претендентов (в силу невозможности повторений), на третье $m - 2$ и т.д. Применим правило произведения (теорема 1.1):

$$P_m = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot 1 = m!.$$

2). В урне шары s цветов: n_1 шаров первого цвета, n_2 шаров второго цвета и т.д. Причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_s = k$. Выбор происходит без возвращения и с фиксацией номера извлечения. Потребуем также, чтобы $m = k$. Однако, если в выборке поменять местами шары одного цвета, то исход опыта не изменится.

Чтобы пересчитать комбинации указанного типа, заметим, что все перестановки множества номеров шаров A (а их количество $P_m = m!$) разбиваются на классы. Две перестановки попадают в один класс, если они различаются порядком шаров одного цвета, а поэтому, с точки зрения данной постановки опыта, представляют одинаковый исход . Пересчитать эти классы и значит пересчитать нужные комбинации. Поясним алгоритм на примере: пусть $m = k = 5, n_1 = 2, n_2 = 3$. Причем шары номер 1 и 2 — белые, а шары номер 2, 3, 4 — черные. Зафиксирум перестановку, т. е. упорядоченную пятерку: $(1, 2, 3, 4, 5)$. Если поменять местами белые шары 1 и 2: $(2, 1, 3, 4, 5)$, то исход по расстановке цветов будет тот же. Так же не отличима от первоначальной перестановка $(1, 2, 4, 3, 5)$. Сколькими способами можно в данной перестановке поменять местами белые шары? Ясно, что $2! = n_1!$. То же самое с черными шарами: $3! = n_2!$. По правилу произведения — всего перестановок, попавших в один класс с $(1, 2, 3, 4, 5)$, будет $2!3! = n_1!n_2!$. Далее нужно взять перестановку, не попавшую в данный класс: $(1, 3, 2, 4, 5)$ и снова менять лишь белые шары местами $2!$ способами, или лишь черные — $3!$ способами. Но тогда перестановок в этом классе вновь столько же: $2!3! = n_1!n_2!$. Теперь понятно, что поскольку классы равномощны, их количество равно $\frac{5!}{2!3!}$. Получена формула *перестановок с повторениями*:

$$P_m(n_1, n_2, \ldots, n_s) = \frac{m!}{n_1!n_2! \cdot \ldots \cdot n_s!}\ , \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_s = m.$$

II. Размещения

1). В урне k шаров одного цвета. Из нее изалекаем m шаров без возвращения и с фиксацией номера извлечения. Но тогда исход опыта — упорядоченная $m-$ка чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, причем $m \le k$ и $a_i \ne a_j$, если $i \ne j$, a_i — номер шара при $i-$м извлечении. Понятно, что при $m = k$ получим перестановки.

Вновь имеем упорядоченные выборки без повторений из k-элементного множества по m элементов, $m \leq k$, которые называются *размещениями.* Количество размещений (A_k^m) вычислим с помощью разбиения перестановок на $k-$элементном множестве номеров шаров A на классы. Две перестановки на k элементах попадают в один класс, если первые m элементов у них одинаковы. Но тогда мощность такого класса равна количеству перестановок оставшихся $k-m$ элементов: $(k-m)!$. Итак, количество классов, т. е. количество размещений A_k^m, равно отношению

$$A_k^m = \frac{k!}{(k-m)!} \ , \quad m \leq k \ , \quad A_k^k = P_k.$$

2). Из урны, содержащей k шаров одного цвета, изалекаем m шаров с возвращением и с фиксацией номера извлечения. Исходом опыта здесь будет упорядоченная $m-$ка номеров шаров $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Заметим, что, поскольку каждый шар после запоминания его номера возвращается обратно в урну, значение параметра m никак не ограничено, а числа a_i могут повторяться.

Полученные упорядоченные выборки из k-элементного множества по m элементов называются *размещениями с повторениями.* Их количество ($\overline{A}_k^m$) вычисляется по теореме 1.1:

$$\overline{A}_k^m = k^m.$$

III. Сочетания

1). В урне k шаров одного цвета. Из нее изалекается m шаров без возвращения и без фиксации номера извлечения. Но тогда исход опыта — *не*упорядоченная $m-$ка номеров шаров $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, т. е. $m-$элементное множество, состоящее из различных элементов a_i, причем $m \leq k$.

Здесь имеем в качестве исхода опыта неупорядоченную выборку без повторений из $k-$элементного множества по m элементов. Такие выборки называются *сочетания.* Количество сочетаний (C_k^m) подсчитаем, используя размещения. Каждое размещение — это упорядоченное множество из m элементов. Но тогда каждое множество из m элементов (т. е. сочетание) порождает $m!$ размещений (т. е. порядков на множестве). Так что каждому сочетанию (т. е. определенному составу $m-$элементного множества) соответствует класс размещений мощности $m!$. Таким образом, количество сочетаний (иначе — классов размещений) есть отношение

$$C_k^m = \frac{A_k^m}{m!} = \frac{k!}{m!(k-m)!} \ , \quad m \leq k.$$

2). В урне k шаров одного цвета. Из нее изалекается m шаров с возвращением и без фиксации номера извлечения. Но тогда исход опыта — неупорядоченная выборка из $k-$элементного множества по m элементов с повторениями. В частности, ограничений на значения параметра m нет. Такого сорта выборки называются *сочетания с повторениями.* Их количество вычисляется по формуле

$$\overline{C}_k^m = C_{k+m-1}^m \ .$$

Поясним вывод этой формулы. В качестве исхода опыта выступает неупорядоченное $m-$элементное множество с повторениями $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, состоящее из номеров шаров a_i. Для пересчета подобных множеств заготовим k ячеек, перенумерованных по номерам шаров: №1, №2 и т.д., №k и "метку" , пусть это будет единица. Если из урны вынут шар №1, то в ячейку №1 ставим метку 1, если в какой-то момент вынут шар №2, то ставим метку 1 в ячейку №2, и т.д. Таким образом, исходу опыта $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ будет взаимно однозначно соответствовать распределение m неразличимых единиц по k различимым ячейкам (см. модель "шарики-лунки"на с. 9):

11	1	111	...	
№1	№2	№3		№k

Теперь введем в нашу запись "разделитель" — число 0. Его мы поставим между ячейками:

11	0	1	0	111	0	...	0	
№1		№2		№3				№k

Теперь каждому исходу нашего опыта взаимно однозначно соответствует упорядоченный набор из m единиц и $k-1$ нуля. Пересчитать эти наборы не сложно: нужно количество перестановок на всех $m+k-1$ элементах $((m+k-1)!)$ поделить на количество перестановок единиц $(m!)$ и нулей $((k-1)!)$:

$$\frac{(m+k-1)!}{m!(k-1)!} = C_{k+m-1}^m \ .$$

Что и требовалось доказать.

Заметим, что в ходе доказательств комбинаторных формул использовались различные приемы полезные при решении задач.

Сведем в таблицу полученные формулы.

Тип выборок		Количество выборок из $k-$элементного множества по m элементов и их название
упорядоченные	с повторениями	
да	нет	размещения $A_k^m = \dfrac{k!}{(k-m)!}\ ,\quad m \le k\ (0! = 1)$
да	да	размещения с повторениями $\overline{A}_k^m = k^m$
нет	нет	сочетания $C_k^m = \dfrac{k!}{m!(k-m)!}\ ,\quad m \le k\ (0! = 1)$
нет	да	сочетания с повторениями $\overline{C}_k^m = C_{k+m-1}^m$

Тип порядков	Количество порядков на $k-$элементном множестве
пеорестановки	$P_k = k!$
перестановки с повторениями	$P_k(n_1, n_2, \ldots, n_s) = \dfrac{k!}{n_1!n_2! \cdot \ldots \cdot n_s!}$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_s = k$

★ Довольно часто в задачах по комбинаторике (и по теории вероятностей) основной трудностью является формализация задачи. Другими словами, необходимо создать адекватную и удобную для счета математическую модель. Развлекательная литературная форма задачи должна быть переведена на язык чисел.

П р и м е р 1 . Сколько различных обедов П.И. Чичиков мог насчитать из блюд, выставленных на столе у П.П. Петуха, если бы на каждый обед выбирать только одно холодное блюдо, одно первое блюдо и одно второе блюдо? На столе у П.П. Петуха на этот раз были выставлены из холодных блюд студень с хреном, свежая икра, свежепросоленная белужина; на первое — уха из стерлядей, щи с грибами; на второе — осетрина жареная и теленок, жареный на вертеле.

Р е ш е н и е . Итак, зададимся вопросом: что является исходом данного опыта? Понятно, что исход — это конкретный набор из трех различных блюд. Запишем такой исход как упорядоченную тройку букв (X, Y, Z). На первом месте X — название холодного блюда, на втором Y — первое, на третьем Z — второе. Менять местами буквы в тройке мы не можем, т.к. это означало бы, что икра вдруг стала бы вторым блюдом. А это немыслимо! Стало быть имеем упорядоченную тройку элементов из множеств A_1, A_2, A_3, где A_1 — холодные блюда, A_2

— первые блюда, A_3 — вторые блюда. Тогда по правилу произведения (теорема 1.1) количество всех троек есть произведение мощностей этих трех множеств: $|A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

П р и м е р 2 . Сколько слов (в том числе бессмысленных) можно составить из слова АБРАКАДАБРА перестановкой букв? А сколько из слова БРАК?

Р е ш е н и е . Понятно, что слово есть упорядоченная последовательность букв. Значит нам на данном слове нужно подсчитать количество порядков. Если среди букв есть одинаковые (как в первом слове), то речь идет о перестановках с повторениями (см. таблицу на с.8). Поскольку количество букв А — $n_А = 5$, Б — $n_Б = 2$, Р — $n_Р = 2$, К — $n_К = 1$, Д — $n_Д = 1$, а длина слова равна 11 и $11 = n_А + n_Б + n_Р + n_К + n_Д$ букв, то $P_{11}(5, 2, 2, 1, 1) = \dfrac{11!}{5!2!2!1!1!} = 83160$.

В слове БРАК одинаковых букв нет, а значит количество порядков на этом слове есть количество перестановок на четырех элементах: $P_4 = 4! = 24$.

П р и м е р 3 . Сколько существует вариантов заполнения лотерейного билета "Спортлото 5 из 35"?

Р е ш е н и е . Исход данного опыта — неупорядоченный набор из пяти различных чисел, т. е. выборка из 35-элементного множества по 5 элементов, неупорядоченная и без повторений. Такие выборки и есть сочетания (см таблицу на стр.8). Осталось подсчитать их количество по формуле $C_{35}^5 = \dfrac{35!}{5!30!} = 324632$.

П р и м е р 4 . Четыре человека вошли в лифт на первом этаже 9-этажного дома. Каждый из них может выйти на любом этаже, начиная со второго. Сколькими способами могут распределиться по этажам пассажиры лифта?

Р е ш е н и е . Каждому исходу опыта сопоставим упорядоченную четверку чисел $(a_1, a_2, a_3, a_4), 2 \leq a_i \leq 9$, где a_i — номер этажа, на котором вышел $i-$й пассажир. Необходимость вводить упорядоченные выборки возникает потому, что не только этажи различаются, но и люди. Теперь по таблице на с.8 классифицируем тип выборок: упорядоченные, с повторениями (более одного человека может выйти одновременно на одном этаже) — размещения с повторениями. Считаем их количество: $\overline{A}_8^4 = 8^4 = 4096$.

★ Рассмотрим комбинаторную модель "шарики – лунки" , равносильную "урновой модели". Пусть имеется m шариков и k лунок ("дробинок и ящиков," "частиц и состояний" и т.п.). Количество способов распределения шариков по лункам зависит от двух факторов: первое — различимы (т. е. перенумерованы) шарики или нет и второе — вместимость лунки (т. е. сколько шариков одновременно может находиться в данной лунке, при этом лунки всегда различимы).

1. Имеется m *различных* шаров и k различных лунок неограниченной вмести-

мости. Каждому способу распределения шаров по лункам поставим в соответствие упорядоченную $m-$ку $(a_1, a_2, \ldots, a_m), 1 \leq m \leq k$, где a_i —номер лунки, в которой находится $i-$й шар. Но тогда мы имеем размещения с повторениями (см. таблицу на стр.8), количество которых вычисляется по формуле $\overline{A}_k^m = k^m$.

2. Рассматривается случай, когда шары *неразличимы* и в одной лунке могут находиться несколько шаров. Фактически, исход опыта — это набор номеров занятых лунок, сопоставить ему удобно неупорядоченную $m-$ку номеров лунок с повторениями. Но тогда это сочетания с повторениями, количество которых $\overline{C}_k^m = C_{k+m-1}^m$.

3. Для этого случая шары считаем *неразличимыми*, а лунки одноместными. В частности, $m \leq k$. Исходу опыта соответствует неупорядоченная $m-$ка номеров лунок без повторений, т. е. сочетания. Количество всех исходов опыта считаем по формуле $C_k^m = \dfrac{k!}{m!(k-m)!}$.

★ Заметим, в заключение этого параграфа, что перечисленные стандартные комбинации далеко не исчерпывают постановки комбинаторных задач. Поэтому довольно часто для пересчета нужных комбинаций приходится создавать специальный алгоритм.

1.2. Математическая модель опыта со случайным исходом

Предмет теории вероятностей — изучение массовых случайных явлений. Например, производится опыт, который может быть повторен сколько угодно раз при неизменных условиях (это условие — уже идеализация). При этом фиксируется исход опыта — явление, которое может произойти или не произойти в данном опыте, т. е. исход опыта носит случайный характер, поэтому количество исходов больше, чем один.

1.2.1. *Пространство элементарных событий (ПЭС)*

Событие, которое может произойти или не произойти в рамках данного опыта, называется *случайным событием* (СС). Исходы опыта тоже СС. Будем говорить, что СС A является *следствием* СС B, если A происходит, когда происходит B (B влечет A, $B \Rightarrow A$). СС B назовем *элементарным событием* (ЭС), или, по-другому, — элеменарным исходом опыта, если B является следствием только самого себя.

П р и м е р 1. Опыт состоит в однократном бросании кубика. В качестве исхода фиксируем количество выпавших очков. Для данного опыта описать

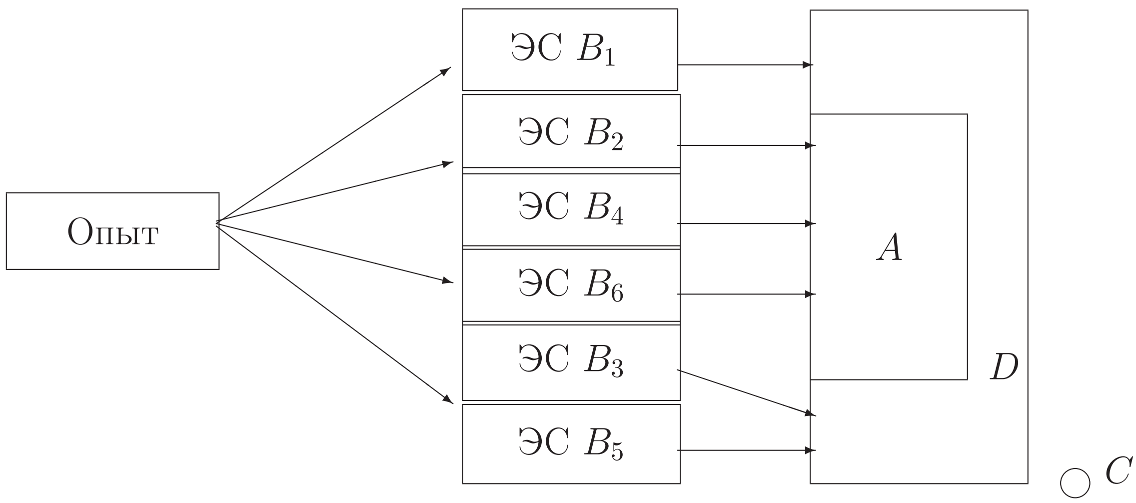


Рис. 1.1. Иллюстрация к примеру 1

элементарные события, привести примеры других случайных событий.

Решение. Рассмотрим естественный список исходов:

B_1 — "на кубике выпало 1" , B_2 — "выпало 2" , B_3 — "выпало 3" , ..., B_6 — "выпало 6."

В рамках опыта могут произойти или не произойти и другие СС. Например, A — "выпало четное число очков" , C — "число выпавших очков делится на 7" , D — "число выпавших очков не превосходит 6" и т.п. При этом СС A является следствием СС B_2 и, одновременно, A — следствие B_4 и, кроме того, A — следствие B_6. Т. е. СС A не является ЭС. В то же время каждое СС B_i есть ЭС. Что касается СС C, то оно не является следствием никакого ЭС и произойти не может. СС D — следствие любого из ЭС B_i и происходит всегда (см. рис.1.1).

СС, которое в рамках данного опыта произойти не может, т. е. не является следствием никакого ЭС, называется *невозможным.* СС, которое в рамках данного опыта происходит всегда, т. е. является следствием любого ЭС, называется *достоверным.* Два СС A и B называются *совместными,* если найдется такое ЭС C, что и A и B являются следствиями C, т. е. A и B могут произойти одновременно. В противном случае два СС называются *несовместными.*

В примере 1 любая пара ЭС B_i, B_j — несовместна, СС D — достоверное, а СС C — невозможное.

Множество всех ЭС для данного опыта назовем *пространством элементарных событий* (ПЭС).

Для задач по теории вероятностей описание ПЭС — один из этапов решения. Можно делать это описание на традиционном языке случайных событий: для опыта, приведенного в примере 1, ПЭС состоит из шести ЭС B_i — "выпадение на кубике i очков." Однако есть и язык теории множеств, позволяющий отвлечься от "литературной" формы задачи и построить формальную математическую модель. Для этого возьмем некоторое множество Ω, между элементами которого ω и ЭС B_i данного эксперимента можно установить взаимно-однозначное соответствие. Но тогда каждому СС A соответствует подмножество $A_\omega \subset \Omega$, состоящее из всех таких ω_{B_i}, что A — следствие B_i : $A_\omega = \{\omega_{B_i} | B_i \Rightarrow A\}$.

П р и м е р 2 . Описать ПЭС Ω и вычислить его мощность $|\Omega|$ для следующих экспериментов :

1) человек наугад набирает трехзначный код замка;

2) покупатель наугад выбирает в кондитерском магазине 5 пирожных четырех видов, фиксируя качественный состав (по сортам);

3) школьницы Маша, Катя, Аня наугад выбирают кисточки для рисования (всего их 7) по одной на каждую девочку;

4) трем игрокам в покер раздают из карточной колоды в 52 карты по четыре карты каждому;

5) шахматист играет матч, состоящий из 8 партий, фиксируя в протоколе после каждой партии выигрыш, проигрыш или ничью.

Р е ш е н и е . 1). Элементарным исходом опыта является упорядоченный набор чисел $(a_1, a_2, a_3) = \omega$, где $0 \le a_i \le 9$ и возможны повторения. Это размещения с повторениями из 10 по 3, $|\Omega| = \overline{A}_{10}^3 = 10^3$ (см. таблицу на с.8).

2). ЭС опыта — неупорядоченный (т.к. важен только сорт, а не порядок покупки данного пирожного) набор из пяти чисел: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \omega$, где a_i —номер сорта пирожного, $1 \le a_i \le 4$ и возможны повторения. Такого сорта наборы — сочетания с повторениями из 4 по 5, а их количество $|\Omega| = \overline{C}_4^5 = C_8^5$.

3). ЭС опыта — упорядоченная (т.к. девочки различаются) тройка чисел $(a_1, a_2, a_3) = \omega$, где a_i — номер карандаша и повторения не возможны. Это — размещения из 7 по 3. $|\Omega| = A_7^3$.

4). ЭС опыта — три четверки чисел:

$$\omega = (\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \{c_1, c_2, c_3, c_4\}),$$

где все числа различны, внутри четверок порядок не фиксируется, сами четверки различаются. Создадим алгоритм пересчета таких карточных раздач. Сначала нужно выбрать из всех карт (52) — 12 для того, чтобы распределить их по игрокам. Поскольку пока порядок не важен, а повторений среди двенадцати карт нет, то выборки — сочетания из 52 по 12, а их количество C_{52}^{12}. Далее распределим уже выбранные 12 карт между игроками. Это схема распределения 12 элементов по трем ящикам вместимости $n_1 = n_2 = n_3 = 4$. Количество таких распределений равно количеству перестановок с повторениями: $P_{12}(4,4,4)$. Но тогда количество всех раздач $|\Omega| = C_{52}^{12} P_{12}(4,4,4)$.

Конечно есть и другие алгоритмы пересчета. Например: сначала набираем первую четверку. Сделать это можно C_{52}^4 способами, затем из оставшихся 48 карт набираем вторую четверку, для нее C_{48}^4 способов. Аналогично для третьей — C_{44}^4 способов. Далее применяем правило произведения: всего возможных карточных раздач

$$|\Omega| = C_{52}^4 \cdot C_{48}^4 \cdot C_{44}^4.$$

Легко проверить по формулам из таблицы на с. 8, что оба способа дают одинаковый результат.

5). ЭС опыта — упорядоченный набор из восьми букв (чисел, если угодно) $\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_8)$, где $a_i \in$ {В,П,Н} (В — выигрыш, П — проигрыш, Н — ничья) и возможны повторения. Тогда имеем размещения с повторениями из трехэлементного множества по 8. Следовательно, $|\Omega| = \overline{A}_3^8 = 3^8$.

Напомним, что всякое СС есть подмножество из ПЭС. Проиллюстрируем это для случая геометрической интерпретации ПЭС.

П р и м е р 3 . (*Задача о встрече двоих.*) Двое уговорились встретиться на следующих условиях: каждый появляется на месте встречи в произвольный момент времени от 13 до 14 часов, ожидает другого не более 10 минут, затем уходит. Построить пространство элементарных событий (ПЭС).

Р е ш е н и е . В качестве исхода будем фиксировать моменты прихода участников на место встречи. Получаем множество упорядоченных пар чисел $(t_1, t_2) = \omega$, каждое из которых принимает любое значение из отрезка $[13; 14]$. Для простоты можно отсчитывать время в минутах от 13 часов. Если рассматривать пару чисел (t_1, t_2) как координаты точки на плоскости, то геометрическим образом ПЭС Ω будет квадрат (см. рис. 1.2). Теперь построим событие А — "двое встретились" . Условие встречи: $|t_1 - t_2| \le 10$. Раскрывая модуль, получим совокупность двух систем

$$\begin{cases} t_1 - t_2 \ge 0 \\ t_1 - t_2 \le 10 \end{cases} \text{или} \begin{cases} t_1 - t_2 < 0 \\ t_1 - t_2 \le 10, \end{cases}$$

задающих области (полосы) на плоскости, стыкующиеся по прямой $t_1 = t_2$. В итоге получим шестиугольную “полоску” вдоль диагонали квадрата (на рис.1.2 заштрихованная область).

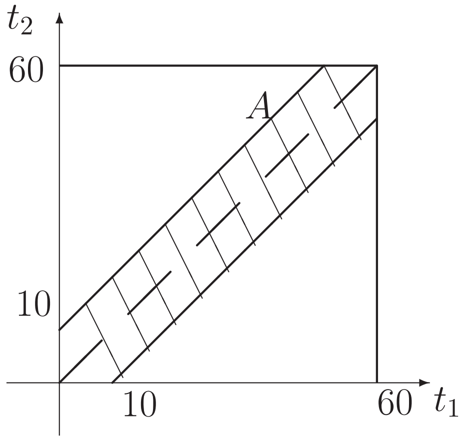


Рис. 1.2. К задаче "о встрече двоих"

1.2.2. *Алгебра событий*

Все СС, которые не являются элементарными, будем называть *сложными* событиями.

Сложные СС можно конструировать с помощью операций на множестве событий. Однако заметим, что параллельно языку случайных событий (традиционный язык теории вероятностей) мы уже имеем язык теории множеств, в котором СС интерпретируется как подмножество множества ЭС Ω. Но есть и третий параллельный язык — язык логики высказываний. Высказывание — есть предложение русского языка, относительно которого можно утверждать истинно оно или ложно. Например: "при бросании кубика выпало 6 очков." Это высказывание истинно, если в данном опыте так и было, и соответственно ложно, если выпало другое количество очков. Из двух высказываний A и B можно сконструировать другие, если соединить их логическими связками — союзами "и" , "или". Можно также получить отрицание высказывания A, присоединив к нему частицу "не." Теперь понятно, что СС формулируется в виде высказывания, но, с другой стороны, может быть интерпретировано как подмножество некоторого универсального множества. По этой причине все основные определения алгебры событий сведем в таблицу, параллельно формулируя их на трех языках.

Язык теории вероятностей	Язык теории множеств	Язык логики
СС A следствие B $B \Rightarrow A$	$B \subseteq A$	если B – истинно, то A – истинно
Если СС C происходит тогда и только тогда, когда происходит одно из СС A или B, то $C = A + B$	$C = A \cup B$	$C = A \vee B$ C – "A или B"
Если СС C происходит тогда и только тогда, когда происходят оба СС A и B, то $C = A \cdot B$	$C = A \cap B$	$C = A \wedge B$ C – "A и B"
Если СС B происходит тогда и только тогда, когда не происходит СС A, то B — СС, противоположное A	$B = \Omega \setminus A = \overline{A}$	$B = \overline{A}$ B – "не A"

Свойства операций на множестве СС дублируют известные свойства операций теории множеств:
1) $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$;
2) $A(BC) = (AB)C = ABC$;
3) $A(B + C) = AB + AC; (A + B)C = AC + BC$;
4) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$;
5) $A + \Omega = \Omega$; $A \cdot \Omega = A$, Ω — достоверное событие;
6) $A + \emptyset = A$; $A \cdot \emptyset = \emptyset$, $\emptyset$ — невозможное событие;
7) $B + \overline{B} = \Omega$; 8) $A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$; 9) $A + A = A \cdot A = A$ и т.д.

★ Заметим, что если $C = A + B$, то это значит, что происходит *хотя бы одно* из событий A или B. Понятно, что высказывание C — "происходит хотя бы одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$" означает, что $C = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. Отметим также, что знакомое уже нам понятие несовместности пары событий A и B в алгебре СС можно выразить так $A \cdot B = \emptyset$ (произведение A и B — невозможное СС).

Группа СС $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется *полной*, если $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$.

Теорема 1.2 *Множество всех элементарных событий $\omega_1, \omega_2, \ldots$ для данного опыта образует полную группу попарно несовместных событий, причем каждое СС A, происходящее в данном опыте, есть сумма соответствующего набора элементарных событий.*

Пример 1. Поражение боевого самолета может наступить или в результате повреждения обоих его двигателей (СС D_1, D_2), или в результате попадания в кабину пилота (СС K). При обстреле любое попадание в соответствующий агрегат самолета приводит к его повреждению. Пусть СС A — поражение самолета.

1). Описать множество ЭС.

2). Записать A в алгебре событий как непосредственно с помощью СС D_1, D_2, K, так и через элементарные события.

3). Получить из второй записи первую с помощью допустимых алгебраических преобразований.

Р е ш е н и е . 1). После обстрела в качестве ЭС фиксируем наличие или отсутствие поражения всех трех узлов самолета: двух двигателей и кабины. Например: никакой из узлов не поражен (ЭС ω_1); или только первый двигатель поражен (ЭС ω_2); или поражен первый двигатель и кабина (ЭС ω_3) и т.д. Для того чтобы подсчитать количество ЭС, сопоставим каждому ЭС упорядоченную тройку из нулей и единиц. Ставим на первое место 1, если 1-й двигатель поражен, и 0, если не поражен. Аналогично, второе место в тройке отвечает за второй двигатель, а третье — за поражение кабины. Но тогда тройки — есть размещения с повторениями из двух элементов (0 и 1) по 3 (см. табл. 1.1 на с.8). Всего элементарных исходов $2^3 = 8$. Запишем элементарные события с помощью операций на СС D_1, D_2, K, учитывая логические связки, соединяющие эти события в формулировке соответствующего ω_i (см. таблицу на с. 14):

ω_1 — "{*не* поражен 1-й двигатель} *и* {*не* поражен 2-й двигатель} *и* {*не* поражена кабина}" ,т. е. $\omega_1 = \overline{D_1} \cdot \overline{D_2} \cdot \overline{K}$;

ω_2 — "{поражен 1-й двигатель} *и* {*не* поражен 2-й двигатель} *и* {*не* поражена кабина}" ,т. е. $\omega_2 = D_1 \cdot \overline{D_2} \cdot \overline{K}$;

ω_3 — "{не поражен 1-й двигатель} *и* { поражен 2-й двигатель} *и* {*не* поражена кабина}" ,т. е. $\omega_2 = D_1 \cdot \overline{D_2} \cdot \overline{K}$;

ω_4 — "{поражен 1-й двигатель} *и* {поражен 2-й двигатель} *и* {*не* поражена кабина}" ,т. е. $\omega_3 = D_1 \cdot D_2 \cdot \overline{K}$ и т.д. ...;

ω_8 — "{поражен 1-й двигатель} *и* { поражен 2-й двигатель} *и* { поражена кабина}" ,т. е. $\omega_8 = D_1 \cdot D_2 \cdot K$.

2). Сформулируем СС A, обращая внимание на логические связки и отмечая СС, к которым они относятся, фигурными скобками:

A — "самолет поражен" происходит тогда и только тогда, когда "{{поражен 1-й двигатель} *и* {поражен 2-й двигатель}} *или* {поражена кабина}" , т. е.
$A = D_1 \cdot D_2 + K$.

Что касается ЭС, следствием которых является A, то нужно выбрать те из них, которые содержат комбинацию $D_1 \cdot D_2$ или K. Сумма таких ЭС образует $A : A = D_1 \cdot D_2 \cdot K + D_1 \cdot D_2 \cdot \overline{K} + \overline{D_1} \cdot D_2 \cdot K + \overline{D_1} \cdot \overline{D_2} \cdot K + D_1 \cdot \overline{D_2} \cdot K$.

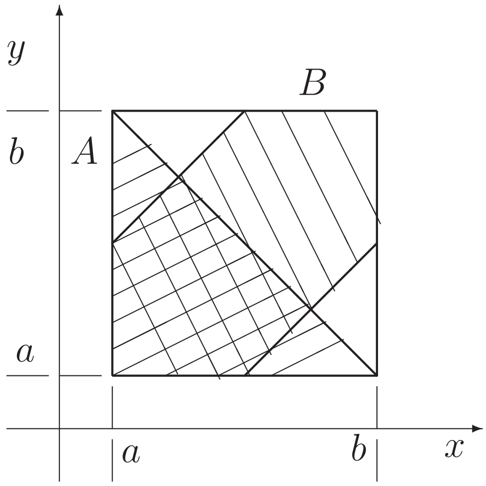


Рис. 1.3. К примеру 2

3). Используем свойства операций для преобразования выражения $A = D_1 \cdot D_2 \cdot K + D_1 \cdot D_2 \cdot \overline{K} + \overline{D_1} \cdot D_2 \cdot K + \overline{D_1} \cdot \overline{D_2} \cdot K + D_1 \cdot \overline{D_2} \cdot K$ к выражению $A = D_1 \cdot D_2 + K$.

а) по свойствам 3) и 5):
$D_1 \cdot D_2 \cdot K + D_1 \cdot D_2 \cdot \overline{K} = D_1 \cdot D_2 \cdot (K + \overline{K}) = D_1 \cdot D_2 \cdot \Omega = D_1 \cdot D_2$;

б) по свойствам 9), 3), 4), 7):
$D_1 \cdot D_2 \cdot K + \overline{D_1} \cdot D_2 \cdot K + D_1 \cdot \overline{D_2} \cdot K + \overline{D_1} \cdot \overline{D_2} \cdot K + \overline{D_1} \cdot \overline{D_2} \cdot K =$
$= (D_1 \cdot D_2 + \overline{D_1}(D_2 + \overline{D_2}) + \overline{D_2}(D_1 + \overline{D_1})) \cdot K = (D_1 \cdot D_2 + \overline{D_1} + \overline{D_2})K =$
$= (D_1 \cdot D_2 + \overline{D_1 D_2})K = K$;

теперь собираем а) и б): $A = D_1 \cdot D_2 + K$.

П р и м е р 2 . На отрезке $[a, b]$ наудачу ставятся две точки. Построить математическую модель эксперимента, описать ПЭС Ω. Пусть СС A и B формулируюися следующим образом: A — "вторая точка ближе к левому концу отрезка, чем первая к правому" ; B — "расстояние между точками меньше половины длины отрезка." Описать СС $A, B, AB, A + B, \overline{B}$ как подмножества Ω.

Р е ш е н и е . ЭС опыта — упорядоченная пара чисел (x, y), $x, y \in [a, b]$. Будем интерпретировать эту пару как координаты точки на плоскости, тогда множество всех ЭС Ω — квадрат со стороной $b - a$. Далее, ЭС (x, y) влечет СС A, если $x - a < b - y$. На плоскости этому условию удовлетворяют все точки треугольника, отсеченного диагональю квадрата (см. рис. 1.4).Для СС B условие для точек выглядит так: $|x - y| < \frac{b-a}{2}$. В квадрате Ω это условие задает полосу вдоль другой диагонали квадрата. Что касается СС $AB, A + B$, то это пересечение и объединение фигур A и B. Последнее СС $\overline{B}$ задает на плоскости два треугольника, лежащие вне полосы B.

1.2.3. *Вероятность*

Нами уже рассмотрены два этапа построения математической модели эксперимента со случайным исходом: построение ПЭС и алгебры случайных событий. Однако, из опыта известно, что разные СС характеризуются разной частотой появления. Но частота появления — числовая характеристика СС. Следующий этап создания математической модели — введение числовой *меры* возможности наступления случайного события. Эту меру и называют *вероятность.* Существует несколько способов введения понятия вероятность. Далее мы рассмотрим классическую и геометрическую модели.

Классическая модель

Пусть множество ЭС конечно, т. е. $|\Omega| = n$. Кроме того, все элементарные события $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ *равновозможны*, то есть у нас нет никаких оснований предполагать, что какой-то исход будет встречаться чаще остальных. Это свойство ЭС отражает свойства реального эксперимента, модель которого мы строим.

По теореме 1.2 любое событие из рассматриваемой алгебры событий представимо в виде суммы ЭС. Тогда для СС A, равного сумме m штук ЭС (т. е. $|A| = m$), положим

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

Введенная нами функция на случайных событиях $p(A)$ называется *классической вероятностью.* Другими словами, вероятность события A есть отношение числа исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу возможных исходов опыта.

Пример 1. В опыте два раза подбрасывается монета. Найти вероятность того, что герб выпадет хотя бы один раз.

Решение. Начинаем с построения математической модели. В качестве исхода опыта фиксируется количество выпадений герба. Поэтому в качестве ПЭС рассмотрим набор СС: ω_1 — "герб выпал 1 раз," ω_2 — "герб выпал 2 раза," ω_3— "герб не выпал ни разу." Перечисленные три СС образуют полную группу попарно несовместных событий, и наблюдаемое в опыте событие A — "герб выпал хотя бы один раз" записывается в алгебре этих ЭС: $A = \omega_1 + \omega_2$. Можно ли считать построенную модель классической и применить формулу (1.1)? Но ответ на этот вопрос зависит от того *равновозможны* ли ЭС $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Хорошо известно, что СС – "герб выпал 2 раза," происходит реже, чем СС — "герб выпал 1 раз". И понятно почему: ведь комбинация "герб, герб" при двух бросаниях выпадает одним способом, а СС "герб выпал 1 раз" может выпасть двумя способами: "герб, решетка" и "решетка, герб". Но тогда ЭС ω_1 и ω_2 не равновозможны. Значит построенная математическая модель не является классической и формула (1.1) на с. 18 не применима.

Из приведенного рассуждения можно сделать вывод: необходимо различать бросания — первое и второе. Построим другое ПЭС: ω_1' — "при 1-м бросании выпал герб, при втором — решетка (имеем упорядоченную пару (Г,Р))," ω_2' — "(Р,Г)" ω_3' — "(Г,Г)," ω_4' — "(Р,Р)." Эти ЭС равновозможны, $|\Omega'| = 4$,
$A = \omega_1' + \omega_2' + \omega_3'$, $|A| = 3$. Новая математическая модель является классической и, применяя формулу (1.1)(с. 18), получим

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}.$$

Остается добавить, что вычисленная вероятность вполне согласуется с практическими наблюдениями.

П р и м е р 2 . Из группы в 15 студентов, среди которых четверо отличников, наугад для тестирования выбирают 7 человек. Какова вероятность, что среди отобранных студентов не более двух отличников?

Р е ш е н и е . Исход данного опыта — набор из семи человек. Если сформулировать формально: неупорядоченная выборка из 15-элементного множества по 7 элементов без повторений. Так что каждому ЭС сопоставляем выборку указанного свойства. В силу случайности выбора, все ЭС равновозможны. Значит мы находимся в условиях классической модели. Подсчитаем количество ЭС — это сочетания из 15 по 7 (см. таблицу на с. 8): $|\Omega| = C_{15}^7$. Осталось описать на языке ЭС СС A — "в выборке из 7 человек не более двух отличников." Конкретизируем СС A — "в выборке из 7 человек отличников или нет, или один отличник, или два отличника ." Но тогда СС A состоит из этих трех типов выборок (ЭС). Пересчитаем их количество. Все множество студентов состоит из двух классов: отличники (4 человека) и все остальные (11 человек). Сначала посчитаем выборки, содержащие ровно одного отличника: выбрать отличника можно $4 = C_4^1$ способами, а неотличники выбираются из оставшихся 11 человек по 6 (на оставшиеся места) C_{11}^6 способами. Применим правило произведения (см. теорему 1.1): число всех возможных семерок, содержащих ровно одного отличника, равно $C_4^1 C_{11}^6$. Тот же принцип используем для подсчета всех семерок, содержащих ровно двух отличников: $C_4^2 C_{11}^5$. И, наконец, число семерок без отличников C_{11}^7. Таким образом, все ЭС, составляющие СС A, подсчитаны:

$C_4^1 C_{11}^6 + C_4^2 C_{11}^5 + C_{11}^7 = |A|$. По определению классической вероятности имеем:

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_4^1 C_{11}^6 + C_4^2 C_{11}^5 + C_{11}^7}{C_{15}^7} = \frac{\frac{4 \cdot 11!}{6!5!} + \frac{4!11!}{2!2!5!6!} + \frac{11!}{7!4!}}{\frac{15!}{7!8!}} = \frac{10}{13} \approx 0,77.$$

Геометрическая модель

Далеко не всегда множество исходов опыта конечно. Если ПЭС Ω бесконечно и каждому ЭС ω_x сопоставляется число x (или упорядоченная пара чисел (x,y), или тройка (x,y,z)), такое, что

$$\omega_x \in \Omega \Leftrightarrow x \in [a,b] \text{ (или } \omega_{(x,y)} \in \Omega \Leftrightarrow (x,y) \in G_\Omega \text{ или } \omega_{(x,y,z)} \in \Omega \Leftrightarrow (x,y,z) \in \Sigma_\Omega)$$

(G_Ω — множество точек на плоскости, Σ_Ω — в пространстве), то мы имеем геометрическую модель опыта. Введем для множеств на прямой, на плоскости и в пространстве числовую функцию $\mu(A)$ — *мера* множества A:

1) если A — отрезок $[a,b]$, то $\mu([a,b])$ — его длина: $\mu([a,b]) = b - a$;

2) если A — ограниченная область G на плоскости, то $\mu(G)$ — площадь области: $\mu(G) = S_G$;

3) если A — ограниченная область Σ в простpнстве, то $\mu(\Sigma)$ — объем трехмерной области: $\mu(\Sigma) = V_\Sigma$.

Если ЭС опыта равновозможны и мы имеем геометрическую модель опыта, то

$$p(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

называется *геометрической вероятностью* СС A.

С геометрическим определением вероятности связана одна известная задача — парадокс Бертрана.

П р и м е р 1. (*Парадокс Бертрана*). Для некоторой окружности случайным образом выбирается хорда. Найти вероятность того, что хорда длиннее стороны правильного треугольника, вписанного в данную окружность.

Р е ш е н и е. Парадокс состоит в неоднозначности величины вероятности. А неоднозначность обусловлена тем, что возможны разные способы выбора хорды, т. е. условия постановки эксперимента разные, а значит, решаются разные задачи. Поставим задачу более корректно тремя способами.

П е р в ы й с п о с о б. Возьмем произвольную точку внутри круга. Проведем хорду, серединой которой эта точка является. Для такой постановки опыта каждой хорде однозначно соответствует точка (середина хорды) внутри круга. Но тогда ЭС — "точка ω на плоскости внутри круга радиуса R." ПЭС Ω — множество всех точек круга. Опишем в рамках построенной математической модели СС A — "хорда длиннее стороны правильного треугольника, вписанного

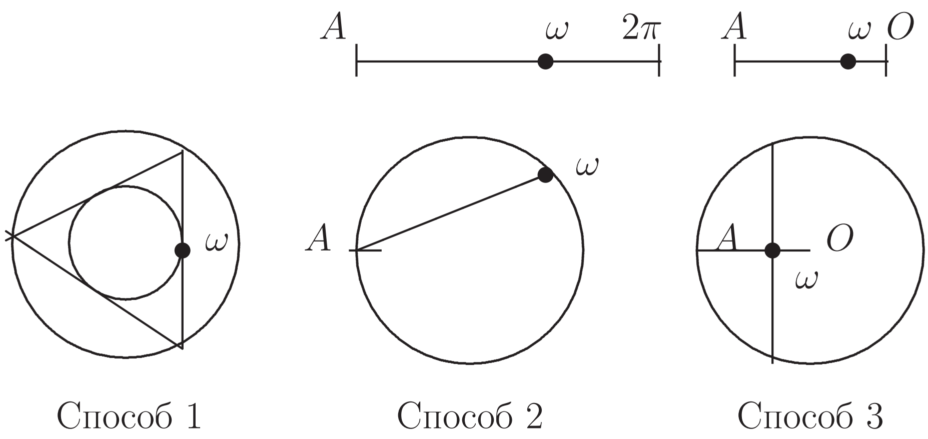


Рис. 1.4. К примеру 1

в данную окружность." Поясним здесь, что длина хорды равна длине стороны правильного треугольника, когда ее середина (точка ω) лежит на окружности, вписанной в треугольник. Поэтому $\omega \in A$ тогда и только тогда, когда ω лежит внутри круга, вписанного в треугольник (см. рис.1.4). Радиус этого круга равен R/2. Значит, в рамках геометрической модели, вероятность можно посчитать как отношение площадей кругов

$$p(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{1}{4}.$$

В т о р о й с п о с о б. Изменим способ выбора хорды. За один из концов хорды примем фиксированную точку окружности. Тогда случайно берется вторая точка и каждому ЭС однозначно соответствует точка ω (второй конец хорды) на окружности. Таким образом, в качестве ПЭС формируется множество Ω — все точки окружности. Геометрическая модель в данном случае одномерная, а Ω — есть отрезок длиной $l_\Omega = 2\pi R$ (см. рис.1.4). Опишем СС A. "Критическое" положение хорды, когда ее длина равна стороне правильного треугольника, получим, если случайная точка делит окружность в отношении 1:3. Таких точек на окружности две. СС A соответствует отрезок между указанными точками длиной $l_A = \frac{2\pi R}{3}$. Геометрическую вероятность находим как отношение длин соответствующих отрезков:

$$p(A) = \frac{l_A}{l_\Omega} = \frac{2\pi R}{3 \cdot 2\pi R} = \frac{1}{3}.$$

Т р е т и й с п о с о б. Теперь проведем произвольный радиус и выберем на нем наудачу точку. Хорду проведем перпендикулярно радиусу через эту точку. В этом эксперименте каждой выбранной хорде однозначно соответствует точка ω на отрезке Ω длины R (см. рис.1.4). Причем длина хорды равна длине стороны

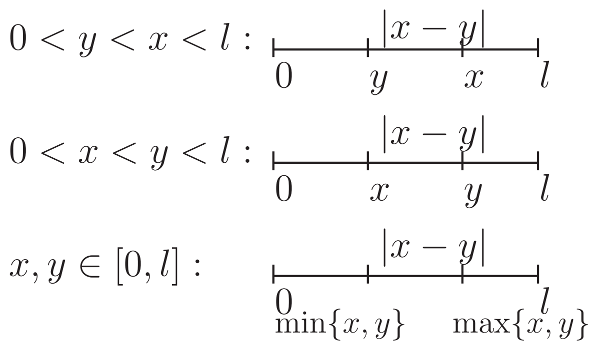


Рис. 1.5. К примеру 2

треугольника, если $\omega = \frac{R}{2}$, а $\omega \in A$ тогда и только тогда, когда $0 \leq \omega \leq \frac{R}{2}$ (0 — центр окружности). Составляем отношение длин отрезков и получаем

$$p(A) = \frac{l_A}{l_\Omega} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}.$$

П р и м е р 2 . Отрезок длиной l делится случайным образом на три части. Какова вероятность, что из полученных частей можно составить треугольник?

Р е ш е н и е . Опишем два способа введения ПЭС.

П е р в ы й с п о с о б . ЭС для данного опыта — две случайные точки на отрезке $[0, l]$. Точнее два случайных числа x и y. Каждому ЭС сопоставим упорядоченную пару — точку на плоскости с координатами (x, y). ПЭС Ω— квадрат со стороной длиной l. В рамках данной модели опишем СС A — "из полученных частей можно составить треугольник." Для того чтобы $\omega \in A$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство треугольника во всех трех возможных комбинациях для полученных трех частей: $c = \min\{x, y\}, a = |x - y|$, $b = l - \max\{x, y\}$ (рис.1.5).

Множество A на плоскости задается системой неравенств:

$$\begin{cases} c + a \geq b \\ c + b \geq a \\ a + b \geq c \end{cases}. \tag{1.2}$$

Раскроем модуль в данной системе:

$$1)\ x \leq y\ \Rightarrow \begin{cases} y \geq l - y \\ x + l - y \geq y - x \\ l - x \geq x \end{cases}; \quad 2)\ x > y\ \Rightarrow \begin{cases} x \geq l - x \\ l \geq x - y \\ l - y \geq y \end{cases}.$$

Таким образом, множество A есть объединение областей, задаваемых системами 1) и 2), симметричными относительно прямой $y = x$ (рис. 1.6).

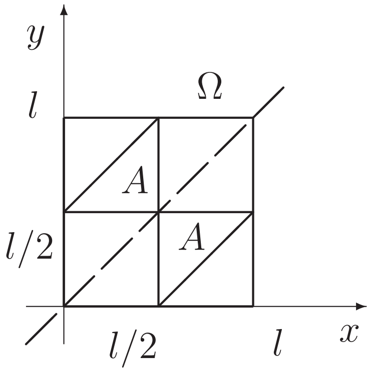


Рис. 1.6. К примеру 2 (способ 1)

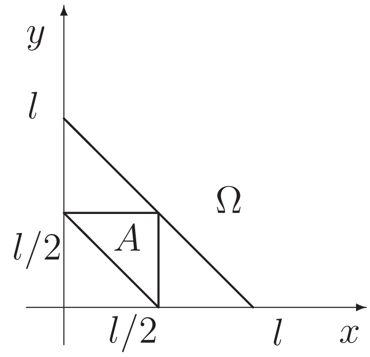


Рис. 1.7. К примеру 2 (способ 2)

Осталось вычислить отношение площадей

$$p(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1}{4}.$$

В т о р о й   с п о с о б . Вычисления будут короче, если предложить в качестве ЭС упорядоченную пару чисел (x, y), где x — длина первого отрезка, y — длина второго отрезка. Но в этом случае x и y не любые числа отрезка $[0, l]$, а удовлетворяющие условию $x + y \le l$. Это неравенство задает ПЭС Ω на плоскости в виде треугольника (рис.1.7). СС A описывается системой (1.2) на неравенствах треугольника для случая $a = x, b = y, c = l - x - y$. Соответствующая система тогда выглядит так:

$$\begin{cases} l - y \ge y \\ l - x \ge x \\ x + y \ge l - x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le \frac{l}{2} \\ x \le \frac{l}{2} \\ x + y \ge \frac{l}{2} \end{cases}.$$

Система задает маленький треугольник внутри большого. Вычисляем вероятность как отношение площадей:

$$p(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{1}{4}.$$

Задача решена.

Аксиоматическое определение вероятности

Пусть проводится некоторый эксперимент, которому соответствует ПЭС Ω . Рассмотрим возникающую алгебру случайных событий, т. е. множество СС $\mathcal{A}$ с определенными на нем операциями. Пусть на множестве событий $\mathcal{A}$ определена функция $p(A),\ A \in \mathcal{A}$, обладающая следующими свойствами:

1) $p(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{A}$;

2) $p(\Omega) = 1$;

3) если $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ — последовательность попарно несовместных событий A_i,тогда

   а) $p(A_1+A_2+\ldots+A_n) = p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n)$, если последовательность СС конечна;

   б) $p(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p(A_i)$, причем в правой части — сходящийся ряд.

Тогда такая функция p называется в е р о я т н о с т ь ю. Для события A величина $p(A)$ называется в е р о я т н о с т ь ю с о б ы т и я A. Тройка $< \Omega, \mathcal{A}, p >$ называется в е р о я т н о с т н ы м п р о с т р а н с т в о м .

Три свойства, отмеченные в аксиоматическом определении, присущи вероятности, как числовой мере случайности, вне зависимости от вида модели случайного опыта. Перечислим некоторые следствия определения.

Свойства вероятности.

1. Если A и B несовместны ($A \cdot B = \emptyset$), то $p(A+B) = p(A) + p(B)$;

2. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$, в частности $p(\emptyset) = 0$;

3. Если СС A влечет СС B ($A \Rightarrow B$), то $p(A) \leq p(B)$.

★ *Создание математической модели* $< \Omega, \mathcal{A}, p >$ случайного эксперимента можно разбить на следующие этапы:

1) сопоставить исходу опыта элементарное событие ω как элемент абстрактного множества Ω (например, ω — неупорядоченная без повторений выборка из 10 элементов по 6);

2) на полученном ПЭС Ω определить вероятность ЭС ω в соответствии с условиями опыта: например, если $|\Omega| = n$ и ЭС ω равновозможны, то мы находимся в условиях классической модели; если $|\Omega|$ бесконечно и Ω можно сопоставить область (одномерную, двумерную или трехмерную), то применяем геометрическую модель (есть и другие виды вероятностных пространств, некоторые рассмотрим позже);

3) в алгебре событий $\mathcal{A}$ сформировать СС, вероятность которого нужно вычислить.

1.2.4. *Задачи для самостоятельного решения*

Задача 1. По каналу связи передаются последовательно 3 сообщения, каждое из которых может быть передано правильно или искажено. Построить ПЭС для данного опыта и в рамках данной модели

1) описать, как подмножества ПЭС следующие СС:
A_i — "i-е сообщение передано правильно" , $1 \leq i \leq 3$,
C — "хотя бы одно сообщение передано правильно" ,
D — "ровно одно сообщение передано правильно" ,
E_{ij} — "i-е и j-е сообщения искажены" ,
F_{ij} — "i-е и j-е сообщения переданы правильно" ,
B — "все сообщения искажены" ;

2) из списка пункта 1) привести примеры противоположных СС, несовместных СС, полной группы попарно несовместных СС;

3) в алгебре СС A_i, $1 \leq i \leq 3$, выразить следующие СС:
S_1 — "все сообщения переданы правильно" ,
S_2 — "хотя бы одно сообщение передано правильно" ,
S_3 — "хотя бы одно сообщение искажено" ,
S_4 — "не более одного сообщения передано правильно" ,
S_5 — "подряд два сообщения искажены" ,
S_6 — "ровно два сообщения искажены."

Задача 2. Двое играют в шахматы. Рассмотрим события:
A — "выиграл первый игрок" , B — "выиграл второй игрок" .
Что означают события

$$A \cdot B,\ \overline{A} \cdot \overline{B},\ \overline{B} \setminus A,\ \overline{B} \setminus A + A \setminus \overline{B}?$$

Задача 3. Какова вероятность того, что сумма двух случайных положительных правильных дробей не больше 1, а их произведение не больше $2/3$?

Ответ: 0,478.

Задача 4. За круглым столом случайно рассаживаются n мужчин и n женщин. Найти вероятности следующих СС: H — "никакие два лица одного пола не сядут рядом" , G — "если эти мужчины и женщины образуют n супружеских пар, то супруги сядут рядом."

Ответ: $p(H) = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}$, $p(G) = \frac{n! \cdot 2^n}{(2n)!}$.

Задача 5. На конференции должны выступать 5 человек: A, B, C, D, E. Оргкомитет наугад формирует список ораторов. Найти вероятности событий: Q — "B выступает после A," R — "B выступает непосредственно после A."

Ответ: $p(Q) = 1/2$, $p(R) = 1/5$.

Задача 6. Из 11 студентов (в том числе 4 отличника) наугад для тестирования выбираются 6 студентов. Какова вероятность, что среди них окажется не менее двух отличников?

О т в е т : $p = 1 - \frac{C_7^6 + C_4^1 C_7^5}{C_{11}^5}$.

Задача 7. Шесть различимых шаров размещаются наугад в трех различимых урнах. Найти вероятности СС:
D_1 — "в каждой урне окажется по два шара,"
D_2 — "одна из урн окажется пустой,"
D_3 — "в двух урнах окажется по 3 шара."

О т в е т : $p(D_1) = \frac{C_6^2 C_4^2}{3^6}$, $p(D_2) = \frac{2^6}{3^5}$, $p(D_3) = \frac{C_6^3}{3^5}$.

Задача 8. Решить предыдущую задачу (№6) в предположении, что шары не различимы.

О т в е т : $p(D_1) = \frac{1}{\overline{C}_3^6}$, $p(D_2) = \frac{3\overline{C}_2^6}{\overline{C}_3^6}$, $p(D_3) = \frac{3}{\overline{C}_3^6}$.

Задача 9. Из букв слова "ПАРАЛЛЕЛИЗМ"путем их перестановки составляется новое слово. Какова вероятность, что в этом слове порядок гласных не изменится?

О т в е т : $p = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{3!} / \frac{11!}{2! \cdot 3!}$.

Задача 10. На окружности наудачу выбраны три точки. Найти вероятность того, что полученный треугольник будет остроугольным.

О т в е т : $p = 1/4$.

1.3. Вычисление вероятности сложных событий

Создание математической модели опыта (обсужденное в предыдущем разделе) конечно является частью решения задачи. Однако, в значительной части стохастических задач уже известны вероятности некоторых "простых" событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. При этом требуется найти вероятность "сложного" события A. В задачах такого сорта подразумевается, что математическая модель (т. е. вероятностное пространство $< \Omega, \mathcal{A}, p >$) уже построена. Тогда решение задачи заключается в выражении "сложного" СС A через "простые" СС $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в алгебре событий $\mathcal{A}$. Разумеется , что при вычислении вероятности $p(A)$ понадобятся теоремы о вероятности суммы и произведения событий.

1.3.1. *Теоремы о вероятности суммы и произведения событий*

Теорема 1.3 (о вероятности суммы событий)

Для любых событий A и B имеет место равенство

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB).$$

Следствие. Методом математической индукции можно получить теорему сложения для трех и более слагаемых:

1) $p(A+B+C) = p(A)+p(B)+p(C)-p(AB)-p(AC)-p(BC)+p(ABC)$;

$$2)\ p(A_1+A_2+\ldots+A_n) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{i<j}^{n} p(A_iA_j) + \sum_{i<j<k}^{n} p(A_iA_jA_k) + \ldots +$$

$$+(-1)^{n+1}p(A_1A_2\ldots A_n). \tag{1.3}$$

Во второй формуле суммирование ведется по всем различным наборам из множества СС $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$: сначала по одному элементу (в сумме $\sum\limits_{i=1}^{n} p(A_i)$), затем по два элемента (в сумме $\sum\limits_{i<j} p(A_iA_j)$), затем по три (в сумме $\sum\limits_{i<j<k}^{n} p(A_iA_jA_k)$) и т.д., при этом наборы СС A_i различаются по составу , но не по порядку. Следовательно, эти наборы есть сочетания, и количество слагаемых в первой сумме равно $C_n^1 = n$, во второй — C_n^2, в третьей C_n^3 и т.д.

Напомним, что если СС $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны, т. е. $A_iA_j = \emptyset, i \neq j$, то $p(A_1+A_2+\ldots+A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} p(A_i)$ в силу определения вероятности (см. с.24).

Вероятностью события A при условии наступления события B (*условной вероятностью СС* A) называется величина

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)}.$$

Следствием определения является следующая теорема.

Теорема 1.4 (о вероятности произведения событий)
Для любых событий A и B имеет место равенство

$$p(AB) = p(A)\cdot p(B|A).$$

Следствие 1. Методом математической индукции можно получить теорему умножения для трех и более сомножителей:

$$p(ABC) = p(A)\cdot p(B|A)\cdot p(C|AB), \ldots$$

$$p(A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_n) = p(A_1)p(A_2|A_1)\cdot\ldots\cdot p(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}). \tag{1.4}$$

События A и B называются *независимыми*, если $p(A|B) = p(A)$. Понятно, что для пары независимых СС A и B верно равенство $p(AB) = p(A)p(B)$.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности,* если для любого подмножества СС $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}\}$ и для любого СС A_j $p(A_j|A_{i_1}A_{i_2}\cdot\ldots\cdot A_{i_m}) = p(A_j)$. Заметим, что из независимости в совокупности следует попарная независимость группы событий. Обратное неверно. Из теоремы произведения получим следствие для независимых СС.

Следствие 2. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то

$$p(A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_n) = p(A_1)p(A_2)\cdot\ldots\cdot p(A_n).$$

Пример 1. Поражение боевого самолета может наступить или в результате повреждения обоих его двигателей (СС D_1, D_2), или в результате попадания в кабину пилота (СС K). При обстреле любое попадание в соответствующий агрегат самолета приводит к его поражению. Найти вероятность СС A — поражение самолета, если известно, что $p(D_1) = p_1, p(D_2) = p_2, p(K) = p_3$.

Решение. Мы уже рассматривали этот пример на с. 16 в разделе "Алгебра событий." В ходе его решения было сделано следующее:

1) построено ПЭС $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8\}$;

2) СС A представлено в виде суммы ЭС:

$$A = D_1\cdot D_2\cdot K + D_1\cdot D_2\cdot\overline{K} + \overline{D_1}\cdot D_2\cdot K + \overline{D_1}\cdot\overline{D_2}\cdot K + D_1\cdot\overline{D_2}\cdot K = \sum_{i=4}^{8}\omega_i;$$

3) СС A записано вторым способом : $A = D_1\cdot D_2 + K$.

Рассмотрим соответственно два способа вычисления вероятности СС A.

Первый способ (классический).

ПЭС данного опыта состоит из конечного числи ЭС $|\Omega| = 8$, однако, ЭС не являются равновозможными. Поэтому, несмотря на то, что известно $|A| = 5$, воспользоваться классической моделью нельзя. Использовать запись A в алгебре ЭС 2) можно, но вычисление вероятности придется вести по теоремам сложения и умножения.

Второй способ (с использованием теорем).

Воспользуемся разложением СС $A : A = D_1\cdot D_2 + K$. Тогда по теореме сложения (см. теорему 1.3)

$$p(A) = p(D_1\cdot D_2) + p(K) - p(D_1D_2K).$$

Далее, поскольку поражение одного или нескольких агрегатов самолета никак не влияет на поражение других, СС D_1, D_2, K независимы в совокупности. Воспользуемся теоремой умножения 1.4:

$$p(A) = p(D_1)p(D_2) + p(K) - p(D_1)p(D_2)p(K) = p_1p_2 + p_3 - p_1p_2p_3.$$

★ Вопрос о зависимости группы (в частности пары) СС не всегда можно решить лишь по смыслу событий. В предыдущей задаче это было вполне доступно. Но, как правило, изучение независимости нужно проводить по определению. Причем удобнее проверять равенство $p(AB) = p(A)p(B)$ для пары СС, а для группы СС $A_1, A_2, \ldots, A_n$ проверять равенство $p(A_{i_1} A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_m}) = = p(A_{i_1}) p(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot p(A_{i_m})$ для всякого подмножества $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}\}$.

П р и м е р 2. (*Задача Бернштейна.*) Наудачу бросается тетраэдр. Три грани его окрашены соответственно в красный, зеленый и синий цвета, а четвертая частично в каждый из этих трех цветов. Изучить вопрос о независимости событий К, З и С. Здесь буква обозначает выпадение вниз грани, имеющей соответствующий цвет.

Р е ш е н и е. ЭС в данном опыте — выпадение вниз конкретной грани тетраэдра, т. е. $|\Omega| = 4$. Исходы можно считать равновозможными, т. е. мы находимся в условиях классической модели. Тогда СС К — "выпала грань, имеющая красный цвет," раскладывается в сумму двух ЭС (выпала либо красная грань либо цветная). Тогда $p(\text{К}) = \frac{1}{2} = p(\text{З}) = p(\text{С})$. Вычислим вероятности попарных произведений КЗ — "выпали красный и зеленый цвета," КС, ЗС также по классической формуле: $p(\text{КЗ}) = \frac{1}{4} = p(\text{КС}) = p(\text{ЗС})$. Понятно, что

$$p(\text{КЗ}) = p(\text{К})p(\text{З});\ p(\text{СЗ}) = p(\text{С})p(\text{З});\ p(\text{КС}) = p(\text{К})p(\text{С}).$$

Значит попарная независимость имеет место. Рассмотрим вероятность тройного произведения КЗС — "выпали все три цвета". Это ЭС с вероятностью $1/4$, т. е.

$$p(\text{КЗС}) \neq p(\text{К})p(\text{З})p(\text{С}).$$

Отсюда следует, что независимости в совокупности нет.

П р и м е р 3. (*Задача о рассеянной секретарше.*) Некто написал пяти адресатам письма, в каждый конверт вложил по одному письму и затем наудачу написал на каждом из конвертов один из пяти адресов. Какова вероятность, что хотя бы одно письмо попадет по назначению?

Р е ш е н и е. Введем "простые" события $A_i, 1 \le i \le 5,$ — "i-е письмо попало по назначению." Тогда искомое СС A — "хотя бы одно письмо попало по назначению" записывается так: $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$. Воспользуемся теоремой сложения 1.3 формула (1.3):

$$p(A) = \sum_{i=1}^{5} p(A_i) - \sum_{i<j}^{5} p(A_i A_j) + \sum_{i<j<k}^{5} p(A_i A_j A_k) - \sum_{i<j<k<m}^{5} p(A_i A_j A_k A_m) +$$
$$+ p(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5).$$

Вычислим все участвующие в формуле вероятности двумя способами.

П е р в ы й с п о с о б (по теореме произведения). Первое письмо может попасть в любой из 5 конвертов с равной вероятностью, т. е. действуем по классической формуле: $p(A_1) = \frac{1}{5} = p(A_i), 1 \leq i \leq 5$. Далее, по теореме произведения 1.4,

$$p(A_1A_2) = p(A_1)p(A_2|A_1).$$

Значит, нужно вычислить вероятность, того, что второе письмо попадет к адресату при условии, что первое также попало по назначению. Итак, первый конверт уже занят первым же письмом, а для размещения второго есть лишь 4 конверта, среди которых и подходящий для второго письма. Второе письмо равновероятно попадет в один из этих четырех конвертов, т. е. $p(A_2|A_1) = \frac{1}{4}$. Получаем

$$p(A_1A_2) = p(A_1)p(A_2|A_1) = \frac{1}{5}\frac{1}{4} = p(A_iA_j), i < j.$$

Как уже отмечалось в следствии к теореме сложения (см. с.27), количество слагаемых в сумме двойных произведений равно $C_5^2 = 10$, поэтому

$$\sum_{i<j}^{5} p(A_iA_j) = 10p(A_1)p(A_2|A_1) = 10\frac{1}{5}\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Следующее произведение — тройное: $A_1A_2A_3$ и по теореме 1.4, следствие 1, формула (1.4)

$$p(A_1A_2A_3) = p(A_1)p(A_2|A_1)p(A_3|A_1A_2).$$

Вычисляем вероятность попадания 3-го письма по назначению при условии, что первое и второе уже в нужных конвертах. Применяем ту же классическую схему: $p(A_3|A_1A_2) = \frac{1}{3}$ и получим

$$p(A_1A_2A_3) = p(A_1)p(A_2|A_1)p(A_3|A_1A_2) = \frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3} = p(A_iA_jA_k).$$

Поскольку количество слагаемых в сумме тройных произведений $C_5^3 = 10$, то получим

$$\sum_{i<j<k}^{5} p(A_iA_jA_k) = 10p(A_1A_2A_3) = 10p(A_1)p(A_2|A_1)p(A_3|A_1A_2) = 10\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Понятно, что схема рассуждения может быть применена для всех последующих сумм:

$$\sum_{i<j<k<m}^{5} p(A_iA_jA_kA_m) = C_5^4 p(A_1A_2A_3A_4) =$$

$$= 5p(A_1)p(A_2|A_1)p(A_3|A_1A_2)p(A_4|A_1A_2A_3) = 5\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{24};$$

$$p(A_1A_2A_3A_4A_5) = \frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{120}.$$

Окончательно получим

$$p(A) = 5\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{19}{30}.$$

В т о р о й   с п о с о б (по классической формуле). Возможно этот способ несколько короче (см. также продолжение в примере 4). Действительно, обозначая количество писем n и применяя классическую формулу, будем иметь

$$p(A_i) = \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n!},\ p(A_iA_j) = \frac{(n-2)!}{n!},\ p(A_iA_jA_k) = \frac{(n-3)!}{n!}, \dots\ .$$

В качестве ЭС здесь выступают перестановки — упорядоченные n-ки $(a_1, \dots, a_n)$, $1 \le a_i \le n$, письмо номер i попадает по адресу, если $a_i = i$. Поэтому $|\Omega| = n!$, а ЭС, благоприятствующие, например, СС A_1A_2, есть n-ки вида $(1, 2, a_3, \dots, a_n)$. Таких n-к столько, сколько перестановок на $(n-2)$ элементах, т. е. $(n-2)!$. Учитывая количество двойных, тройных и прочих произведений, получим

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = C_n^1 \cdot \frac{1}{n} = 1,\ \sum_{i<j}^{n} p(A_iA_j) = C_n^2 \cdot \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{2!},$$

$$\sum_{i<j<k}^{n} p(A_iA_jA_k) = C_n^3 \cdot \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{3!} \dots\ .$$

Тогда

$$p(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

★ В задаче о рассеянной секретарше может быть и другой вопрос. Например, какова вероятность, что не менее трех писем дошло до адресатов. В этом случае искомое СС B также можно записать в алгебре введенных нами СС A_i :

$$B = A_1A_2A_3 + A_1A_2A_4 + A_1A_2A_5 + A_2A_3A_4 + \dots + A_3A_4A_5,$$

причем слагаемых в этой сумме $C_5^3 = 10$. Далее применяем теоремы сложения и умножения. Однако понятно, что вычисления будут более громоздкими. Применим второй способ решения — по классической формуле. В качестве ЭС берем упорядоченную пятерку чисел: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \omega$, $1 \le a_i \le 5$, где

a_i — номер письма, а i — номер конверта. Понятно, что $|\Omega| = 5! = n!$. А все нужные комбинации индуктивно по количеству писем n, начиная с $n = 1$, можно подсчитать. Результат — таблица в приложении (см. с.123). Использование этой таблицы позволяет ответить на любой вопрос в задаче о секретарше (для небольших n). В нашем случае СС B состоит из тех пятерок — ЭС ω, в которых либо точно 3, либо точно 4, либо точно 5 совпадений a_i с i. Конечно "точно 4" и "точно 5" совпадений это одно и то же событие, что в таблице отмечено прочерком, т. е. $|B| = n_3 + n_5 = C_5^3 + 1 = 11$ (см. таблицу на с.123). Тогда

$$p(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{n_3 + n_5}{5!} = \frac{11}{120}.$$

Пример 4. В задаче о рассеянной секретарше обозначим количество писем n, а вероятность того, что хотя бы одно письмо попало по адресу, — p_n. Требуется найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ и оценить p_{10}.

Решение. В примере 3 мы получили формулу

$$p_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

Заметим, что полученная сумма есть частичная сумма ряда Тейлора функции e^x, если $x = -1$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ причем } \; e^{-1} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} + \ldots .$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = e^{-1}$. Полученный ряд сходится достаточно быстро, а значит, оценивать вероятности p_n можно легко и эффективно. Например, p_{10} отличается от e^{-1} менее чем на $\frac{1}{11!}$ (по теореме Лейбница о знакочередующихся рядах). Учитывая порядок числа 11!, можно утверждать, что p_{10} совпадает с e^{-1} по крайней мере до пятого знака после запятой.

Пример 5. В начальный момент времени в пробирке находилась одна амеба. Известно, что в течение периода времени T амеба может выжить с вероятностью $\frac{1}{2}$, разделиться на две с вероятностью $\frac{1}{4}$ или погибнуть с вероятностью $\frac{1}{4}$. Какова вероятность того, что по истечении двух периодов времени $2T$ в пробирке будет одна амеба?

Решение. В этой задаче для "распутывания" всех возможных вариантов можно нарисовать схему (граф). В узлах схемы (в вершинах графа) пишем количество амеб в данный момент времени. На отрезках (на ребрах графа) подпишем вероятность данного события (рис. 1.8). Интересующие нас исходы опыта помечены пустыми кружочками. Заметим, что разделится (выживет, погибнет)

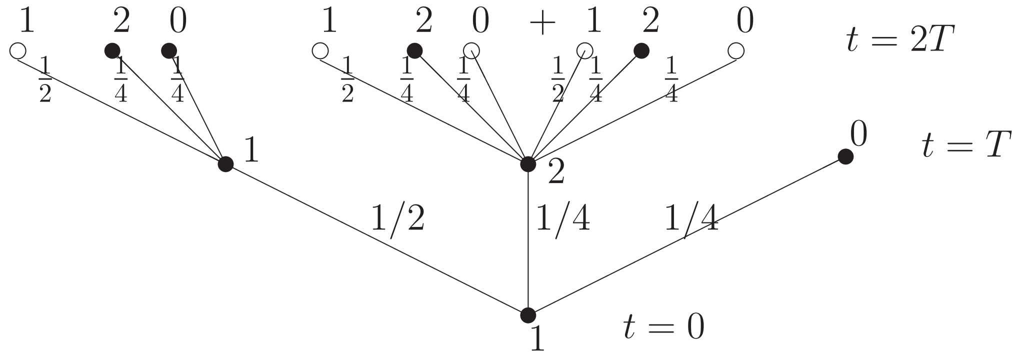


Рис. 1.8. К примеру 5

амеба на втором этапе никак не зависит от того, разделилась или просто выжила она на первом, т. е. соответствующие СС независимы. Первый способ получить одну амебу в пробирке после второго временного отрезка: "амеба выжила за первый промежуток времени" *и* "выжила за второй промежуток времени." Курсивом выделили тип логической связки "и" , соответствующий произведению СС, заключенных в кавычки. Вероятность этого *произведения* независимых СС равна $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ (проходим по графу путь 1-1-1). Второй способ: "амеба разделилась за первый промежуток времени" *и* "первая из получившихся амеб выжила за второй промежуток времени" *и* "вторая погибла за второй промежуток времени." Вероятность этого *произведения* независимых СС равна $\frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. Третий способ: "амеба разделилась за первый промежуток времени" *и* "вторая из получившихся амеб выжила за второй промежуток времени" *и* "первая погибла за второй промежуток времени." Вероятность этого *произведения* та же: $\frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. Все три способа (т. е. СС) несовместны. Таким образом, получим

$$p = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$

1.3.2. *Формулы полной вероятности и Байеса*

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — множество попарно несовместных событий ($H_iH_j = \emptyset, i \neq j$), причем $H_1 + \ldots + H_n = \Omega$. Тогда события $H_1, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий и называются *гипотезами.*

Теорема 1.5 (формула полной вероятности) . *Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная группа событий (гипотез). Тогда*

$$p(A) = p(H_1) \cdot p(A|H_1) + \ldots + p(H_n) \cdot p(A|H_n).$$

Теорема 1.6 (формула Байеса) . *В условиях теоремы о полной вероятности имеет место равенство*

$$p(H_i|A) = \frac{p(H_i)p(A|H_i)}{p(A)} = \frac{p(H_i)p(A|H_i)}{p(H_1)p(A|H_1) + \ldots + p(H_n)p(A|H_n)}.$$

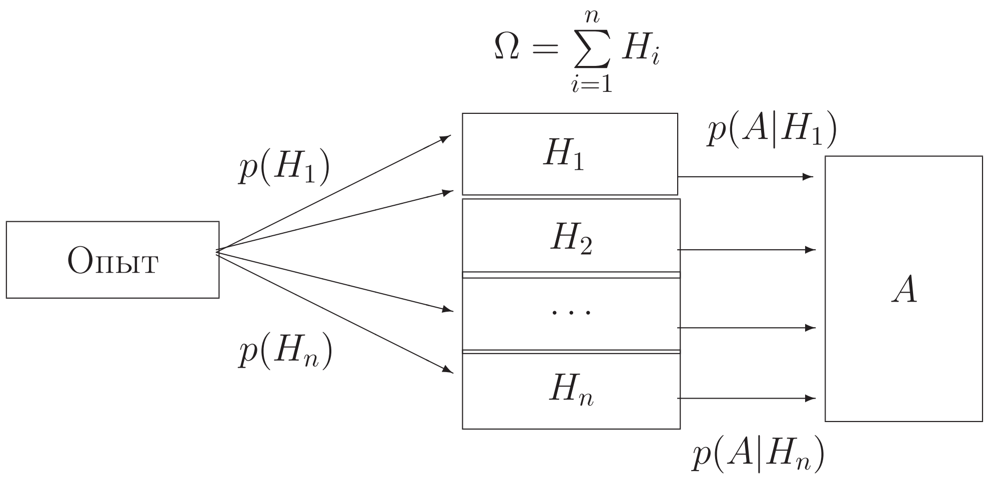


Рис. 1.9. Схема гипотез

★ Сформулированные теоремы являются лишь комбинацией теорем 1.3,1.4 о вероятностях суммы и произведения СС, т. е. частным случаем вычисления вероятности сложного СС A. Однако, распознать "схему гипотез" — значит, быстро решить задачу. Гипотезы возникают тогда, когда есть необходимость рассматривать набор условий (т. е. СС H_i), при выполнении которых может произойти СС A. Причем известны вероятности $p(H_i), p(A|H_i)$. Схема такой задачи изображена на рис. 1.9. В качестве гипотез могут быть сформулированы разные наборы СС. В принципе таким набором может служить набор ЭС, если ПЭС конечно (см. рис. 1.1). Однако, по данным задачи (т. е. по известным $p(H_i), p(A|H_i)$) обычно понятно, какая полная группа СС образует гипотезы.

П р и м е р 1 . Имеются три одинакового вида урны. Известно, что в первой 2 белых и 3 черных шара, во второй — 4 белых и 1 черный шар, в третьей — 3 белых шара. Наудачу выбирается одна из этих урн. Какова вероятность достать из нее белый шар?

Р е ш е н и е . Интересующее нас СС A — "достать из урны белый шар." Вероятность этого СС известна при условии, что известна урна, из которой производится выборка. Таким образом, естественно сформулировать в качестве гипотез СС H_i — "выбрана урна с номером i," $1 \le i \le 3$. Выбранные СС, во-первых, попарно несовместны ($H_iH_j = \emptyset$), во-вторых, в каждом исходе опыта обязательно реализуется одно из них (т. е. $\Omega = H_1 + H_2 + H_3$). Выпишем все известные вероятности

i	$p(H_i)$	$p(A\|H_i)$
1	1/3	2/5
2	1/3	4/5
3	1/3	1

$\sum P(H_i) = 1$

Мы находимся в условиях формулы полной вероятности, следовательно,

$$p(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{11}{15}.$$

П р и м е р 2 . Сообщение может передаваться по одному из пяти каналов, выбираемому случайно. Каналы находятся в различных состояниях: два – в отличном состоянии, один — в хорошем, один — в посредственном и один — в плохом. Вероятность правильной передачи сообщения равна соответственно 1; 0,8; 0,6; 0,2. Для повышения достоверности сообщения оно последовательно передается по двум различным каналам, которые выбираются наугад. Найти вероятность того, что хотя бы по одному каналу сообщение будет передано правильно.

Р е ш е н и е . Обозначим СС A — "хотя бы по одному каналу сообщение будет передано правильно." Перенумеруем каналы: №$1, 2$ — отличные, №3 — хороший, №4 — посредственный, №5 — плохой. Вероятность СС A зависит от номеров (т. е. от качества) выбранных каналов. Выберем двумя способами систему гипотез.

П е р в ы й с п о с о б . Всего число способов выбрать пару каналов из пяти равно $C_5^2 = 10$. Соответственно сформулируем группу гипотез $H_i,\ 1 \leq i \leq 10:$
H_1 — "выбрали каналы №$1, 2$;"
H_2 — "выбрали каналы №$1, 3$;" и т.д.,
H_{10} — "выбрали каналы №$4, 5$."

Понятно, что все эти СС равновозможны: $p(H_i) = 1/10$. Теперь вычислим условные вероятности $p(A|H_i)$. Введем СС $A_{1i},\ A_{2i} : A_{1i}$ — "сообщение передано верно по первому из выбранных каналов, в условиях гипотезы H_i" , A_{2i} — "сообщение передано верно по второму из выбранных каналов в условиях гипотезы H_i."Тогда, в силу независимости СС $A_{1i},\ A_{2i}$,

$$p(A|H_1) = p(A_{11} + A_{21}) = p(A_{11}) + p(A_{21}) - p(A_{11}A_{21}) =$$

$$= p(A_{11}) + p(A_{21}) - p(A_{11})p(A_{21}) = 1 + 1 - 1 \cdot 1 = 1.$$

$$p(A|H_2) = p(A_{12} + A_{22}) = p(A_{12}) + p(A_{22}) - p(A_{12}A_{22}) =$$

$$= p(A_{12}) + p(A_{22}) - p(A_{12})p(A_{22}) = 1 + 0,8 - 1 \cdot 0,8 = 1 \text{ и т.д.}$$

Заметим, что можно посчитать вероятности по-другому. Если в k-й паре присутствует отличный канал (№1 или №2), то $p(A|H_k) = 1$. А вероятности сумм СС для оставшихся пар удобно вычислять через противоположное событие:

$$p(A_{18} + A_{28}) = 1 - p(\overline{A}_{18}) \cdot p(\overline{A}_{28}) = 1 - 0,2 \cdot 0,4 = 0,92 \ ,$$

$$p(A_{19} + A_{29}) = 1 - p(\overline{A}_{19}) \cdot p(\overline{A}_{29}) = 1 - 0,2 \cdot 0,8 = 0,84 \ ,$$

$$p(A_{1\ 10} + A_{2\ 10}) = 1 - p(\overline{A}_{1\ 10}) \cdot p(\overline{A}_{2\ 10}) = 1 - 0,4 \cdot 0,8 = 0,68 \ .$$

Сведем вычисления в таблицу, в которой в первом столбце — номера выбранных каналов.

(i_1, i_2)	$p(H_i)$	$p(A\|H_i) = p(A_{1i}) + p(A_{2i}) - p(A_{1i})p(A_{2i})$
(1,2)	1/10	1
(1,3)	1/10	1
(1,4)	1/10	1
(1,5)	1/10	1
(2,3)	1/10	1
(2,4)	1/10	1
(2,5)	1/10	1
(3,4)	1/10	0,8+0,6-0,48=0,92
(3,5)	1/10	0,8+0,2-0,16=0,84
(4,5)	1/10	0,6+0,2-0,12=0,68

$\sum P(H_i) = 1$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$p(A) = 0,7 + 0,1(0,92 + 0,84 + 0,68) = 0,944.$$

В т о р о й с п о с о б. Сформулируем гипотезы по-другому: отметим качество канала, по которому было передано первое сообщение.
H_1 — "первое сообщение передано по отличному каналу, т. е. по №1, 2" ,
H_2 — "первое сообщение передано по хорошему каналу, т. е. по №3" ,
H_3 — "первое сообщение передано по посредственному каналу, т. е. по №4" ,
H_4 — "первое сообщение передано по плохому каналу, т. е. по №5" .
Вероятности этих событий известны

$$p(H_1) = \frac{2}{5},\ p(H_2) = p(H_3) = p(H_4) = \frac{1}{5}.$$

Рассчитаем условные вероятности $p(A|H_i)$. Понятно, что $p(A|H_1) = 1$, т.к. первый канал отличного качества и неважно какого качества второй канал. Теперь

пусть первый канал хорошего качества, тогда вторым может быть любой из оставшихся 4. Пусть СС B_2 — "сообщение вторым каналом не передано." Его вероятность (при условии H_2) вновь можно посчитать по формуле полной вероятности, рассматривая в качестве гипотез полную группу событий:
G_1 — "второе сообщение передано по отличному каналу," $p(G_1) = \frac{2}{4}$;
G_2 — "второе сообщение передано по посредственному каналу," $p(G_2) = \frac{1}{4}$;
G_3 — "второе сообщение передано по плохому каналу" , $p(G_3) = \frac{1}{4}$.
Тогда

i	$p(G_i)$	$p(B_2 \vert G_i H_2)$
1	1/2	0
2	1/4	0,4
3	1/4	0,8

$\Rightarrow \quad p(B|H_2) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0,4 + \frac{1}{4} \cdot 0,8 = 0,3.$

По такой же схеме просчитываем условные вероятности:

$$p(B_2|H_3) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0,2 + \frac{1}{4} \cdot 0,8 = 0,25,$$

$$p(B_2|H_4) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0,2 + \frac{1}{4} \cdot 0,4 = 0,15 \ .$$

Пусть СС B_1 — "сообщение первым каналом не передано," тогда
$p(A) = 1 - p(B_1 \cdot B_2)$. Теперь применяем формулу полной вероятности для системы гипотез H_i :

i	$p(H_i)$	$p(A \vert H_i) = 1 - p(B_1 B_2 \vert H_i) = 1 - p(B_1 \vert H_i) p(B_2 \vert H_i)$
1	2/5	1
2	1/5	$1 - 0,2 \cdot 0,3 = 0,94$
3	1/5	$1 - 0,4 \cdot 0,25 = 0,9$
4	1/5	$1 - 0,8 \cdot 0,15 = 0,88$

$$p(A) = \frac{1}{5} \cdot (2 + 0,94 + 0,9 + 0,88) = 0,944.$$

Задача решена, при решении продемонстрированы разные способы рассуждений.

★ Формула Байеса позволяет "переоценить"вероятности гипотез по результатам эксперимента. Вероятности $p(H_i|A)$ называют *апостериорными*, поскольку они учитывают результаты опыта, в отличие от *априорных* вероятностей гипотез $p(H_i)$. Схема задачи остается той же, меняется лишь вопрос: найти нужно $p(H_i|A)$, если СС A уже произошло.

П р и м е р 3 . Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 — с вероятностью 0,7; 4 — с вероятностью 0,6 и 2 — с вероятностью 0,5. Выбранный из этих 18 стрелков по жребию стрелок произвел выстрел и в мишень попал. Какова вероятность,что стрелок принадлежит к первой группе?

Р е ш е н и е . Произошло СС A — стрелок попал в мишень. Причем вероятность этого СС связана с гипотезами: H_1 — стрелок принадлежит к первой группе, H_2 — ко второй, H_3 — к третьей, H_4 — к четвертой. Поэтому условия задачи укладываются в схему гипотез:

i	$p(H_i)$	$p(A\|H_i)$
1	5/18	0,8
2	7/18	0,7
3	4/18	0,6
4	2/18	0,5

$\sum P(H_i) = 1$

Применяем формулу полной вероятности

$$p(A) = \frac{5}{18} \cdot 0,8 + \frac{7}{18} \cdot 0,7 + \frac{4}{18} \cdot 0,6 + \frac{2}{18} \cdot 0,5 = \frac{41}{60}$$

и формулу Байеса

$$p(H_1|A) = \frac{p(H_1)p(A|H_1)}{p(A)} = \frac{\frac{5}{18} \cdot 0,8}{\frac{41}{60}} = 40/123.$$

П р и м е р 4 . Имеется две колоды карт по 36 листов. Из первой колоды во вторую переложили 2 карты, а затем из второй колоды наудачу извлекли 2 карты. Среди двух извлеченных оказался один туз. Какова вероятность того, что среди переложенных карт был хотя бы один туз?

Р е ш е н и е . СС A — "среди двух извлеченных оказался один туз" уже произошло. Но зависит оно от состава переложенной пары карт. Поэтому в качестве группы гипотез формулируем следующие СС:
H_1 — "в переложенной паре нет тузов,"
H_2 — "в переложенной паре один туз,"
H_3 — "в переложенной паре два туза."

Для вычисления вероятности СС H_1 применим классическую формулу. Действительно, в качестве ЭС выступает неупорядоченная выборка без повторений из 36 карт по 2. Поэтому $|\Omega| = C_{36}^2$. А благоприятствующие СС H_1 пары (т. е. ЭС) не содержат тузов, поэтому их количество $|H_1| = C_{32}^2$. Следовательно,

$$p(H_1) = \frac{|H_1|}{|\Omega|} = \frac{C_{32}^2}{C_{36}^2} = \frac{248}{315}.$$

В том же ПЭС по классической формуле считаем вероятности H_2, H_3 (см. пример 2 на с. 19):

$$p(H_2) = \frac{|H_2|}{|\Omega|} = \frac{C_{32}^1 \cdot C_4^1}{C_{36}^2} = \frac{64}{315}; \quad p(H_3) = \frac{|H_3|}{|\Omega|} = \frac{C_4^2}{C_{36}^2} = \frac{3}{315}.$$

Вычислим условные вероятности двумя способами.

П е р в ы й с п о с о б. По классической схеме. Например, $p(A|H_1)$. Имеем 38 карт, из которых извлекаем пару без повторений и неупорядоченную. Всего возможностей $|\Omega_1| = C_{38}^2$. Количество ЭС, благоприятствующих СС $A|H_1$, есть количество пар, содержащих ровно 1 туз: $|A|H_1| = C_4^1 \cdot C_{34}^1$. Точно также пересчитываем пары для условий $H_2,\ H_1$. В результате получим:

$$p(A|H_1) = \frac{|A|H_1|}{|\Omega_1|} = \frac{C_4^1 \cdot C_{34}^1}{C_{38}^2} = \frac{136}{703},$$

$$p(A|H_2) = \frac{|A|H_2|}{|\Omega_1|} = \frac{C_5^1 \cdot C_{33}^1}{C_{38}^2} = \frac{165}{703},$$

$$p(A|H_3) = \frac{|A|H_3|}{|\Omega_1|} = \frac{C_6^1 \cdot C_{32}^1}{C_{38}^2} = \frac{192}{703}.$$

В т о р о й с п о с о б. Вычислим $p(A|H_i)$ как вероятность сложного СС — "{{первая карта туз *и* вторая не туз} *или* { первая карта не туз *и* вторая туз}} при условии H_i." Тогда:

$$P(A|H_1) = \frac{4}{38} \cdot \frac{34}{37} + \frac{34}{38} \cdot \frac{4}{37} = \frac{136}{703},$$

$$P(A|H_2) = \frac{5}{38} \cdot \frac{33}{37} + \frac{33}{38} \cdot \frac{5}{37} = \frac{165}{703},$$

$$P(A|H_3) = \frac{6}{38} \cdot \frac{32}{37} + \frac{32}{38} \cdot \frac{6}{37} = \frac{192}{703}.$$

Сведем все в таблицу для схемы гипотез

i	$p(H_i)$	$p(A\|H_i)$
1	$248/315$	$136/703$
2	$64/315$	$165/703$
3	$3/315$	$192/703$

$\sum P(H_i) = 1$

Теперь применяем формулу полной вероятности

$$p(A) = \frac{248}{315} \cdot \frac{136}{703} + \frac{64}{315} \cdot \frac{165}{703} + \frac{3}{315} \cdot \frac{192}{703} = \frac{44864}{221445} \approx 0,203.$$

И, наконец, по форуле Байеса пересчитываем апостериорные вероятности гипотез $H_2,\ H_3$ (поскольку *хотя бы один* туз — означает: либо точно один, либо точно два):

$$p(H_2|A) = \frac{p(H_2)p(A|H_2)}{p(A)} = \frac{10560}{44864} \approx 0,235;$$

$$p(H_3|A) = \frac{p(H_3)p(A|H_3)}{p(A)} = \frac{576}{44864} \approx 0,012.$$

СС $H_2|A,\ H_3|A$ несовместны, поэтому окончательно получаем

$$p(H_2|A + H_3|A) \approx 0,235 + 0,012 = 0,247.$$

1.3.3. *Схема Бернулли и формула Бернулли*

Схемой Бернулли называют последовательность из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p или не происходит с вероятностью $q = 1 - p$. При этом в каждой серии из n испытаний фиксируется число "успехов" — $m,\ 0 \leq m \leq n$, т. е. число появлений СС A.

Теорема 1.7 (формула Бернулли) . *Пусть вероятность наступления события A в каждом из n испытаний, проходящих по схеме Бернулли, равна p. Тогда вероятность того, что в серии из n испытаний событие A наступит ровно m раз, равна*

$$p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},\ \text{где } q = 1 - p. \tag{1.5}$$

Следствие. Наиболее вероятное число "успехов" (M) в серии из n независимых испытаний удовлетворяет неравенству $np - q \leq M < np + p$, где p — вероятность "успеха" , $q = 1 - p$.

П р и м е р 1 . Пара одинаковых игральных костей бросается 7 раз. Какова вероятность следующих СС: 1) C — "сумма очков, равная 7, выпадет дважды;" 2) B —"сумма очков, равная 7, выпадет по крайней мере один раз" ?

Р е ш е н и е . Производится серия из $n = 7$ независимых испытаний. В каждом фиксируется появление СС A —"сумма выпавших очков равна 7" (это "успех"). Вычислим вероятность СС A — "сумма выпавших очков равна 7 при одном бросании двух костей."Сделаем это по классической формуле. ЭС — упорядоченная пара чисел $(a_1, a_2), 1 \leq a_i \leq 6,$ — из числа очков на первом и втором кубиках. Тогда (см. таблицу на с. 8) $|\Omega| = 6^2 = 36$. Теперь отметим пары, дающие в сумме 7: $(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)$, т. е. $|A| = 6$. Поэтому

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = p,\ q = 1 - p = \frac{5}{6}.$$

Теперь можно воспользоваться формулой Бернулли:

$$p(C) = C_7(2) = C_7^2 p^2 q^5 = 42 \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5^5}{6^5} \approx 0,234.$$

СС B есть сумма попарно несовместных СС: "число успехов ровно один" , "число успехов ровно 2" и т.д., "число успехов ровно 7" . т. е. B — сумма шести слагаемых, вероятности которых $p_7(m), 1 \leq m \leq 7$. Конечно, вычислить эту сумму можно, но проще воспользоваться противоположным СС: $\overline{B}$ — "в семи испытаниях ни одного успеха." Тогда

$$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - p_7(0) = 1 - C_7^0 p^0 q^7 = 1 - \frac{5^7}{6^7} \approx 0,721.$$

П р и м е р 2 . На контроль поступила партия деталей из цеха. Известно, что 5 процентов всех деталей не удовлетворяет стандарту. 1) Сколько нужно испытать деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,95 обнаружить хотя бы одну нестандартную деталь? 2) Найти наиболее вероятное число бракованных деталей среди ста проверенных и значение этой максимальной вероятности.

Р е ш е н и е . 1). При каждом испытании детали вероятность обнаружения брака 0,05. Испытания независимы, т. е. проходят по схеме Бернулли $p = 0,05$. Количество испытаний обозначим n. СС B — "хотя бы в одном из n испытаний обнаружен брак" имеет вероятность не менее 0,95. Эту вероятность удобнее выразить через вероятность противоположного СС $\overline{B}$:

$$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - p_n(0) = 1 - (1-p)^n = 1 - 0,95^n \geq 0,95.$$

Решая неравенство, находим n (логарифмированием или подбором): $n \geq 59$.

2). Воспользуемся следствием из теоремы Бернулли для $p = 0,05$, $q = 0,95,\ n = 100$:

$$100 \cdot 0,05 - 0,95 \leq M < 100 \cdot 0,05 + 0,05 \ \Rightarrow M = 5.$$

Вычислим эту наибольшую вероятность:

$$p_{100}(5) = C_{100}^5 \cdot (0,05)^5 \cdot (0,95)^{95} \approx 0,181.$$

Задача решена.

★ Поясним результаты предыдущей задачи. Вероятность брака равна 0,05, поэтому кажется естественным, что среди 100 проверенных деталей наиболее вероятное число нестандартных деталей равно 5. Однако вероятность этого СС $p_{100}(5)$ оказалась мала. Но и это понятно, СС " *точно* 5 деталей браковано" достаточно редкое, хотя и $p_{100}(5)$ принимает максимальное значение среди всех вероятностей $p_{100}(i), 0 \leq i \leq 100$. В сравнении с *точными* вероятностями $p_{100}(i)$ вероятности попадания *в интервал* $p_{100}(k_1, k_2) = p_{100}(k_1 \leq i \leq k_2) = \sum\limits_{i=k_1}^{k_2} p_{100}(i)$ значительно больше. Причем, чем больше интервал, тем больше вероятность в него попасть.

1.3.4. *Асимптотические приближения формулы Бернулли*

Вычисления по формуле (1.5) вызывают определенные сложности при больших значениях n. В таких случаях обычно применяются так называемые асимптотические формулы.

Теорема 1.8 (локальная теорема Муавра-Лапласа) . *Пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления СС A не близка к 0 или 1. Тогда при больших n вероятность $p_n(m)$ того, что в серии из n испытаний событие A наступит ровно m раз может быть вычислена по приближенной формуле*

$$p_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - pn}{\sqrt{npq}}\right), \tag{1.6}$$

где $q = 1 - p$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, причем с ростом n (при постоянном p) эта оценка становится все более точной.

"Большие"n для нас будет означать, что $n \geq 100$. Есть еще один тип условий на n и $p : n > 25,\ npq > 10$.

Теорема 1.9 (интегральная теорема Лапласа) . *В условиях теоремы 1.8 при больших n вероятность того, что в серии из n испытаний событие A наступит не менее k_1 раз, но не более k_2 раз можно вычислить по приближенной формуле*

$$p_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - pn}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - pn}{\sqrt{npq}}\right), \tag{1.7}$$

где $q = 1 - p$, $\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(t)\, dt$, причем с ростом n (при постоянном p) эта оценка становится все более точной.

Следствием интегральной теоремы Лапласа является асимптотическая оценка отклонения вероятности p СС A от относительной частоты СС A — m/n, где n — число независимых испытаний, m — число появлений СС A.

Теорема 1.10 (закон больших чисел для схемы Бернулли) . *В условиях интегральной теоремы Лапласа имеет место приближенное равенство*

$$p(|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{1.8}$$

Функции φ и Φ табулированы; соответствующие таблицы, как правило, находятся на последних страницах учебников и задачников. Эти таблицы приведены и в конце данного пособия, на с.124, 125.

Для того чтобы получить достаточно точный ответ с помощью локальной теоремы Муавра-Лапласа, необходимо не только, чтобы n было велико, но и чтобы число p было сравнительно близко к 1/2. При значениях p, близких к 0 или к 1, расхождение между $p_n(m)$ и $\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{m-pn}{\sqrt{npq}}\right)$ увеличивается. (Рассматривая, при необходимости как "успех" событие $\overline{A}$, можно случай $p \approx 1$ свести к случаю $p \approx 0$.) В этой ситуации более точными обычно являются расчеты по приведенной в следующей теореме *формуле Пуассона.*

Теорема 1.11 (Пуассона) . *Обозначим через $p_{n,\lambda}(m)$ вероятность того, что "успех" наступит ровно m раз в серии из n испытаний, проводимых по схеме Бернулли, причем в каждом из испытаний вероятность "успеха" равна $\frac{\lambda}{n}$. Тогда для любого не малого положительного числа λ и достаточно большого n справедлива формула Пуассона*

$$p_{n,\lambda}(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}. \tag{1.9}$$

Случаи применения различных теорем для схемы Бернулли сведены в таблицу в приложении на с. 123.

П р и м е р 1 . В лотарее разыгрывается в среднем один выигрыш на 1000 номеров. Какова вероятность, имея 100 билетов, получить не менее двух выигрышей?

Р е ш е н и е . Итак, мы находимся в условиях схемы Бернулли для $n = 100,\ p = 0,001$. Нужно вычислить вероятность $p_{100}(m \geq 2)$. Значения n, p подходят для применения формулы Пуассона (см. таблицу на с.123). Применим противоположное СС и формулу Пуассона $\lambda = np = 0,1$:

$$p_{100}(m \geq 2) = 1 - p_{100}(0) - p_{100}(1) \approx 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} = 1 - 1,1 \cdot e^{-0,1} = 0,00468.$$

П р и м е р 2 . Имеется 200 семей, в каждой из которых 4 ребенка. Считая, что вероятности рождения мальчика и девочки одинаковы, найти вероятности следующих СС: 1) число семей , имеющих одного мальчика и трех девочек, равно 20; 2) число семей , имеющих одного мальчика и трех девочек, по крайней мере 20.

Р е ш е н и е . Исследуется 200 семей , т. е. проводится 200 независимых испытаний. При этом в каждом испытании фиксируется СС A — "в семье один мальчик и три девочки." Вычислим вероятность $p(A)$ по формуле Бернулли ("успех" — рождение мальчика) для $n = 4, p = 1/2$:

$$p(A) = p_4(1) = C_4^1 \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4}.$$

Мы снова находимся в условиях схемы Бернулли для $p = 1/4$,$n = 200$. Применять точную формулу Бернулли здесь громоздко. Однако условия задачи подходят для применения локальной и интегральной теорем Лапласа (см. таблицу на с.123). Таким образом, поскольку $npq = 75/2,\ np = 50,\ \sqrt{75/2} \approx 6,12$, имеем:

$$1)\ p_{200}(20) \approx \frac{1}{\sqrt{75/2}} \varphi\left(\frac{20-50}{\sqrt{75/2}}\right) \approx \frac{1}{6,12} \varphi\,(4,89) \approx 1,63 \cdot 10^{-5};$$

$$2)\ p_{200}(m \geq 20) = p_{200}(20 \leq m \leq 200) \approx \Phi\left(\frac{200-50}{\sqrt{75/2}}\right) - \Phi\left(\frac{20-50}{\sqrt{75/2}}\right) \approx$$
$$\approx \Phi(8,17) + \Phi(4,89) \approx 1.$$

Здесь применяем таблицы на с.124, 125 и нечетность функции Лапласа $\Phi(-x) = \Phi(x)$.

П р и м е р 3 . Игральная кость подбрасывается 500 раз. Оценить, в каких пределах с вероятностью $p = 0,95$ заключено число шестерок.

Р е ш е н и е . Опыт проходит по схеме Бернулли для $p = 1/6, n = 500$. Известно, что

$$p(|m/500 - 1/6| < \varepsilon) = 0,95 \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{500}{5/36}}\right)$$

по теореме 1.10. Требуется, пользуясь этим неравенством, оценить m. Сначала по таблице на с.125 найдем ε :

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{3600}\right) = 0,475 \ \Rightarrow\ \varepsilon \cdot 60 = 1,96 \ \Rightarrow\ \varepsilon = 0,0327.$$

Теперь имеем

$$|m/500 - 1/6| < 0,0327 \ \Rightarrow\ 0,134 < \frac{m}{500} < 0,199 \ \Rightarrow\ 67 < m < 99,6.$$

Значит, при 500 бросаниях кости число выпадений шестерки находится в пределах от 68 до 99 с вероятностью 0,95. Задача решена.

1.3.5. *Задачи для самостоятельного решения*

Задача 1. На сборочной линии завода производится сборка 4 изделий. Вероятность бездефектной сборки изделия равна 0,8. После выпуска двух изделий линию перенастроили, что повысило вероятность бездефектной сборки изделия на 0,05. Найти вероятность, что ровно 3 изделия собраны без дефектов.

О т в е т : $p = 0,3944$.

Задача 2. В первой урне находится 3 белых и 2 черных шара, во второй урне 2 белых и 3 черных. Два игрока поочередно вынимают шары без возвращения (каждый из своей урны) до тех пор, пока впервые не появится черный шар. Игрок, вынувший его, считается победителем. Какова вероятность того, что выиграет первый игрок?

О т в е т : $p = 0,53$.

Задача 3. Подбрасываются 3 игральные кости. Рассмотрим СС:
A — "на 1-й и 2-й костях выпало одинаковое число очков,"
B — "на 2-й и 3-й костях выпало одинаковое число очков,"
C — "на 1-й и 3-й костях выпало одинаковое число очков."
Будут ли эти СС попарно независимыми, взаимно независимыми?

О т в е т :A, B, C взаимно независимы.

Задача 4. Брошены 2 игральные кости. Какова вероятность того, что выпало две тройки, если известно, что :
1) сумма выпавших очков делится на 3;
2) произведение выпавших очков равно 9;
3) выпало разное число очков?

О т в е т : 1) $p = 0,1$; 2) $p = 1$; 3) $p = 0$.

Задача 5. Система контроля изделий состоит из двух независимых проверок. В результате k-й проверки годное изделие отбраковывается с вероятностью β_k $(k = 1, 2)$, а дефектное принимается с вероятностью α_k. Изделие принимается, если оно прошло обе проверки. Найти вероятность СС: а) дефектное изделие принято; б) годное изделие отбраковано.

О т в е т : а) $p = \alpha_1\alpha_2$; б) $p = \beta_1 + \beta_2 - \beta_1\beta_2$.

Задача 6. В урне находятся две монеты: симметричная и несимметричная (с вероятностью выпадения герба $1/3$). Наудачу вынимают одну монету и трижды подбрасывают. При этом дважды выпал герб. Какова вероятность того, что подбрасывалась симметричная монета?

О т в е т : $p = 27/43$.

Задача 7. Партия изделий содержит 1% брака. Сколько нужно купить изделий, чтобы вероятность обнаружить в покупке хотя бы одно бракованное изделие была не меньше 0,99?

Ответ: Не менее 459.

Задача 8. В учебном заведении обучаются 730 студентов. Вероятность того, что день рождения каждого наудачу взятого студента приходится на любой день года, равна $1/365$. Найти вероятность того, что на первое января выпадет день рождения: а) трех студентов, б) четырех студентов, в) хотя бы двух студентов.

Ответ: а) $p = 0,18$, б) $p = 0,09$, в) $p = 0,86$.

Задача 9. Радиотелеграфная станция передает цифровой текст. В силу наличия помех каждая цифра независимо от других может быть неправильно принята с вероятностью 0,01. Найти вероятности следующих СС:

A — "в принятом тексте, содержащем 1100 цифр, будет меньше 20 ошибок,"

B — "будет сделано ровно 7 ошибок."

Ответ: а) $p(A) = 0,9964$; б) $p(B) = 0,0176$.

Глава 2

Случайные величины

В первой главе мы рассматривали математические модели случайных явлений, основанные на понятии случайное событие. Однако, возможности этого подхода довольно ограничены. Связано это с тем, что СС, вообще говоря, имеют нечисловую природу. Тем не менее, вполне возможно качественные результаты стохастического (т. е. случайного) эксперимента отобразить на количественной шкале. Достигается эта цель с помощью случайных величин.

Пусть имеется вероятностное пространство $< \Omega, \mathcal{A}, p >$. Тогда числовая функция $\xi(\omega)$, действующая из ПЭС Ω в $\mathbb{R}^n$, называется *n-мерной случайной величиной* (СВ). Если множество значений СВ конечно или счетно, то случайная величина называется *дискретной* (ДСВ). Если множество значений СВ есть конечный или бесконечный интервал, то СВ называется *непрерывной* (НСВ).

2.1. Одномерные СВ

2.1.1. *Законы распределения ДСВ*

Пусть $\xi(\omega)$ — одномерная ДСВ и $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — множество ее значений (X называют также множеством возможных значений). Тогда можно вычислить вероятность каждого из значений x_i:

$$p(\xi = x_i) = p(\sum_j \omega_{i_j} | \xi(\omega_{i_j}) = x_i) = \sum_j p(\omega_{i_j}).$$

Понимать эту запись нужно так: СС "$\xi = x_i$" происходит тогда и только тогда, когда происходит одно из ЭС ω_{i_j}. Поскольку все ЭС попарно несовместны, вероятность СС "$\xi = x_i$" равна сумме вероятностей $p(\omega_{i_j})$. В частности, СС — "ξ примет одно из возможных значений x_i" является достоверным, т. е.

$$\sum_{\omega_i \in \Omega} p(\omega_i) = 1.$$

Это условие называется *условием нормировки.* Полученная функция $p_\xi(x_i)$, $x_i \in X$ называется *распределением вероятностей* ДСВ ξ. Как и всякая функция, она задается формулой, графически, но чаще всего в виде таблицы, называемой *рядом распределения ДСВ:*

x_1	x_2	$\ldots$	x_m	$\ldots$
$p_1 = p(\xi = x_1)$	$p_2 = p(\xi = x_2)$	$\ldots$	$p_m = p(\xi = x_m)$	$\ldots$

, $\sum\limits_i p_i = 1.$

Распределение вероятностей есть исчерпываающая характеристика ДСВ ξ и поэтому является одной из форм закона распределения СВ. Другая форма закона распределения — функция распределения СВ.

Закон распределения СВ есть исчерпывающая (в том смысле, что позволяет вычислить вероятность любого СС, связанного с данной СВ) функциональная характеристика СВ.

Функцией распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ называется действительная функция $F_\xi(x) = p(\xi < x)$ — вероятность попадания СВ ξ в интервал $(-\infty, x)$.

Для ДСВ, значения которой $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$,

$$F_\xi(x) = p(\xi < x) = \sum_{x_i < x} p(\xi = x_i) \Leftrightarrow F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3, & x_3 < x \le x_4, \\ \ldots & \ldots. \end{cases} \tag{2.1}$$

★ Таким образом, математической моделью случайного явления, характеризуемого СВ ξ, является пара $(p_\xi(x), X)$, где X — множество возможных значений , а $p_\xi(x)$ — распределение вероятностей СВ ξ.

П р и м е р 1 . Стрелок ведет огонь по мишени до первого попадания или до исчерпания боекомплекта, составляющего 4 патрона. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Найти закон распределения количества сделанных выстрелов.

Р е ш е н и е . Пусть ξ — количество сделанных выстрелов. Это ДСВ, поскольку множество ее возможных значений $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Найдем обе формы закона распределения СВ ξ : ряд распределения и функцию распределения. Ряд распределения определяется распределением вероятностей $p(\xi = k)$, $1 \le k \le 4$. Понятно, что $p_1 = p(\xi = 1) = 0,8$. Покажем теперь, как вычислить $p_k = p(\xi = k)$ для $k = 2, 3$. Пусть СС A_i — "при i-м выстреле мишень была поражена." Тогда событие $\xi = 2$ запишется так: $\overline{A_1} \cdot A_2$, поэтому, так как события

$\overline{A_1}$ и A_2, по условию, независимы, то

$$p_2 = p\left(\overline{A_1} \cdot A_2\right) = p\left(\overline{A_1}\right) \cdot p(A_2) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16.$$

Аналогично

$$p_3 = p\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3\right) = p\left(\overline{A_1}\right) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot p(A_3) = 0,2^2 \cdot 0,8 = 0,032.$$

Если продолжать в том же духе, то получим

$$p_4 = p\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot A_4\right) = p\left(\overline{A_1}\right) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot p(\overline{A_3}) \cdot p(A_4) = 0,2^3 \cdot 0,8 = 0,0064$$

и условие нормировки $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ нарушается. Конечно здесь неправильно вычислена вероятность p_4. Действительно, $\xi = 4$, если стрелок попал четвертым выстрелом либо промахнулся все 4 раза. Но тогда

$$p_4 = p\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot A_4 + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}\right) = 0,0064 + 0,2^4 = 0,008.$$

Таким образом, ряд распределения СВ ξ:

ξ	1	2	3	4
p_k	0,8	0,16	0,032	0,008

Найдем функцию распределения $F_\xi(x)$ по формуле (2.1):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,8, & 1 < x \le 2, \\ 0,96, & 2 < x \le 3, \\ 0,992, & 3 < x \le 4, \\ 1, & 4 < x. \end{cases}$$

Можно было действовать и по определению. Например, тот факт, что $\xi < 3$, означает, что $\xi = 1$ или $\xi = 2$, причем эти события несовместны, поэтому вероятность события $\xi < 3$ равна

$$F_\xi(3) = p(\xi < 3) = p(\xi = 1) + p(\xi = 2) = 0,8 + 0,16 = 0,96.$$

Задача решена.

Свойства функции распределения $F_\xi(x)$.

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1$.

2. Если $x_1 < x_2$, то $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$, т. е. $F_\xi(x)$ неубывающая функция.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$.

4. $F_\xi(x)$ непрерывная слева, вероятность попадания в точку есть разность:

$$F_\xi(x-0) = F_\xi(x); \quad p(\xi = x) = F_\xi(x+0) - F_\xi(x-0).$$

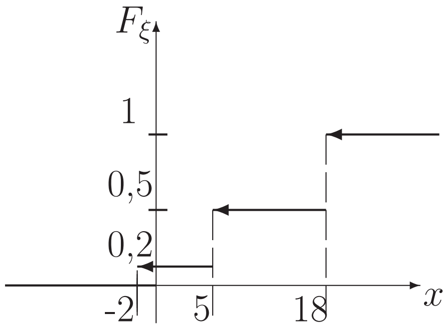


Рис. 2.1. К примеру 2

5. Вероятность попадания в интервал:

$$p(x_1 \le \xi < x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1).$$

П р и м е р 2 . Функция распределения задана графически (рис. 2.1). Описать множество возможных значений СВ, ряд распределения и найти вероятность попадания СВ в отрезок $[-1, 18]$.

Р е ш е н и е . Точки разрыва ступенчатой функции распределения есть значения ДСВ $\xi : X = \{-2, 5, 18\}$. Действительно, по свойству 4 фукции распределения (см. стр. 49) имеем:

$$p(\xi = -2) = F_\xi(-2+0) - F_\xi(-2-0) = 0,2 - 0 = 0,2;$$

$$p(\xi = 5) = F_\xi(5+0) - F_\xi(5-0) = 0,5 - 0,2 = 0,3;$$

$$p(\xi = 18) = F_\xi(18+0) - F_\xi(18-0) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

Для остальных точек x, по тому же свойству 4 фукции распределения, $p(\xi = x) = 0$, т.к. это точки непрерывности. Собственно это и объясняет то, что других значений, кроме $X = \{-2, 5, 18\}$, СВ ξ принимать не может. Таким образом, ряд распределения ДСВ ξ имеет вид

ξ	-2	5	18
p_k	0,2	0,3	0,5

Теперь вычислим вероятность $p(-1 \le \xi \le 18)$. СС "ξ попадает в отрезок $[-1, 18]$" есть сумма несовместных СС "ξ попадает в полуинтервал $[-1, 18)$" и СС "$\xi = 18$". Причем вероятность первого из этих двух СС можно вычислить по свойству 5, а вероятность второго уже вычислена. Итак, имеем

$$p(-1 \le \xi \le 18) = p(-1 \le \xi < 18) + P(\xi = 18) =$$

$$= F_\xi(18) - F_\xi(-1) + 0,5 = 0,5 - 0,2 + 0,5 = 0,8.$$

Задача решена.

2.1.2. *Законы распределения НСВ*

Определения закона распределения и функции распределения (одна из форм закона распределения)(см. с. 48), данные в предыдущем разделе, являются универсальными, т. е. одинаковы как для ДСВ, так и для НСВ. *Функция распределения для НСВ является непрерывной.* Кроме того, свойства функции распределения 1-5, перечисленные на с. 49, также верны для НСВ. Что касается второй формы закона распределения ДСВ — дискретной функции распределения вероятностей $p_\xi(x)$, для НСВ есть аналогичная функциональная характеристика — функция плотности.

Функция плотности распределения вероятностей $f_\xi(x)$ для НСВ ξ в каждой точке непрерывности x есть производная функции распределения[1]:

$$f_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x) = F'_\xi(x).$$

Множество X, удовлетворяющее условию $f_\xi(x) > 0$ для всякого $x \in X$, является *множеством возможных значений НСВ* (носителем распределения).

Свойства плотности распределения вероятностей $f_\xi(x)$.

1. $f_\xi(x) \geq 0$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\, dx = 1$.

3. $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\, dt$ (здесь x — независимая переменная функции $F_\xi(x)$, а t — переменная интегрирования).

4. Вычисление вероятности попадания в интервал

$$p(x_1 \leq \xi < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f_\xi(x)\, dx = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1),$$

в частности, $p(\xi = x) = 0,\ \forall x \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому

$$p(x_1 \leq \xi < x_2) = p(x_1 \leq \xi \leq x_2) = p(x_1 < \xi < x_2) = p(x_1 < \xi \leq x_2).$$

Пример 1. Случайная величина ξ задана функцией распределения $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{при } 0 < x \leq 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$. Указать множество всех возможных значений СВ ξ. Найти ее плотность распределения $f_\xi(x)$.

[1] при этом точки разрыва $f(x)$ образуют множество вероятности 0

Р е ш е н и е . Поскольку $F_\xi(x)$ — непрерывная функция, то множество значений СВ ξ несчетно. По свойству функции плотности 4,

$$p(0 \le \xi < 3) = p(0 \le \xi \le 3) = p(0 < \xi < 3) = p(0 < \xi \le 3) = F_\xi(3) - F_\xi(0) = 1.$$

т. е. все интервалы значений СВ ξ ненулевой вероятности принадлежат отрезку $[0, 3]$. Уменьшить длину полученного интервала значений СВ ξ нельзя. Действительно, если $0 < x_0 < 3$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $x_0 - \delta < 3$ и

$$p(x_0 - \delta < \xi < x_0) = F_\xi(x_0) - F_\xi(x_0 - \delta) = \frac{x_0^2}{9} - \frac{(x_0 - \delta)^2}{9} \ne 0.$$

т. е. выбросить из $[0, 3]$ никакой интервал, содержащий x_0, нельзя, не уменьшив вероятность попадания нашей СВ в $[0, 3]$. Однако множество значений НСВ ξ (как числовой функции на ПЭС) восстанавливается по $F_\xi(x)$ не однозначно: это может быть отрезок $[0, 3]$ или полуинтервалы $(0, 3]$, $[0, 3)$, или интервал $(0, 3)$ и т.п., поскольку для НСВ $p(\xi = a) = 0$[2]. Теперь для нахождения множества *возможных* значений НСВ ξ (по определению на с. 51) вычислим плотность распределения как производную функции $F_\xi(x)$:

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ \frac{2}{9}x & \text{при } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{при } x > 3 \end{cases}.$$

Функция $f_\xi(x)$ в точке $x = 3$ не существует. Поскольку $f_\xi(x) > 0$ на $(0, 3)$, то множество возможных значений для НСВ ξ есть этот интервал. Задача решена.

З а м е ч а н и е . Всякая определенная на $(-\infty, +\infty)$ и интегрируемая функция $f_\xi(x)$, обладающая двумя характеристическими свойствами:

1) $f_\xi(x) \ge 0$ – неотрицательность; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\, dx = 1$ — нормированность,

может рассматриваться как функция плотности некоторой НСВ ξ.

П р и м е р 2 . Для заданной плотности вероятностей $f_\xi(x)$ определить значение параметра C и функцию распределения $F_\xi(x)$:

$$1) f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0,\ x > 0 \\ Cx^2 & \text{при } 0 \le x \le 1 \end{cases};\quad 2) f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ Ce^{-\alpha x} & \text{при } x > 0 \end{cases},\ \alpha > 0.$$

Р е ш е н и е . Согласно замечанию, для определения параметра C достаточно воспользоваться условием нормировки. А функцию $F_\xi(x)$ найдем как первообразную по свойству 3 функции плотности.

[2]в этом случае говорят, что рассуждение верно с точностью до множества точек вероятности ноль.

1). $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\ dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int\limits_{0}^{1} Cx^2 dx + \int\limits_{1}^{+\infty} 0\ dx = \frac{Cx^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{C}{3} = 1$, т. е. $C = 3$.

При вычислении функции распределения придется рассматривать разные возможности расположения аргумента x по отношению к числам 0 и 1.

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\ dt = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0\ dt & \text{при } x \le 0 \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int\limits_{0}^{x} 3t^2\ dt & \text{при } 0 < x \le 1 \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int\limits_{0}^{1} 3t^2\ dt + \int\limits_{1}^{x} 0\ dt & \text{при } x > 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ t^3\Big|_0^x & \text{при } 0 < x \le 1 \\ t^3\Big|_0^1 & \text{при } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ x^3 & \text{при } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases} .$$

2). Эту задачу решаем по той же схеме.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\ dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int\limits_{0}^{+\infty} Ce^{-\alpha x} dx = -\frac{C}{\alpha}\ e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{C}{\alpha} = 1, \text{ т. е. } C = \alpha.$$

Находим функцию распределения, учитывая, что только одна точка $x = 0$ разделяет ось $0x$.

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\ dt = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} 0\ dt & \text{при } x \le 0 \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int\limits_{0}^{x} \alpha e^{-\alpha x}\ dt & \text{при } 0 < x \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ -e^{-\alpha x}\Big|_0^x & \text{при } 0 < x \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{при } 0 < x \end{cases} .$$

Задача решена.

2.1.3. *Функции СВ*

Напомним, что СВ есть числовые функции на множестве ЭС Ω (см. определение на с. 47). Но тогда, как числовые функции, СВ можно складывать, умножать, вкладывать в качестве внутренней функции в действительную функцию $g(x)$. Таким образом получаем новые СВ:

СВ ζ называется *суммой случайных величин* ξ и η, если

$$\zeta(\omega) = \xi(\omega) + \eta(\omega), \ \forall \omega \in \Omega;$$

СВ χ называется *произведением случайных величин* ξ и η, если

$$\chi(\omega) = \xi(\omega) \cdot \eta(\omega), \ \forall \omega \in \Omega;$$

СВ ε называется *функцией случайной величины* ξ , если для некоторой действительной функции $g(x)$

$$\varepsilon(\omega) = g(\xi(\omega)), \ \forall \omega \in \Omega.$$

★ Рассмотрим задачу нахождения закона распределения СВ ζ (χ или ε) по известным законам ξ и η (при известной числовой функции $g(x)$).

I. Для ДСВ решение поставленной задачи состоит из двух этапов :
1) построить множество Z возможных значений СВ ζ (χ или ε);
2) построить распределение вероятностей для всех значений из Z:
$p(\zeta = z_i), \ z_i \in Z$.

Пример 1. ДСВ ξ характеризуется следующим рядом распределения

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p_i = p(\xi = x_i)$	$0,1$	$0,15$	$0,2$	$0,1$	$0,2$	$0,15$	$0,1$

, $\sum\limits_i p_i = 1.$

Найти распределение следующих ДСВ, если они существуют:

$$a) \ \eta = \xi^2, \ b) \ \gamma = \begin{cases} -1, & \text{если } \xi \le -1 \\ 0, & \text{если } \xi = 0 \\ 1, & \text{если } \xi \ge 1 \end{cases}, \ c) \ \delta = \ln(2,9 + \xi).$$

Решение. а). Найдем множество Y возможных значений СВ $\eta = \xi^2$:

$$\eta(\omega) = \xi^2(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi(\omega) = 0 \\ 1, & \text{если } \xi(\omega) = \pm 1 \\ 4, & \text{если } \xi(\omega) = \pm 2 \\ 9, & \text{если } \xi(\omega) = \pm 3 \end{cases} , \text{т. е. } Y = \{0, 1, 4, 9\}.$$

Теперь найдем вероятности полученных возможных значений. Поскольку $\eta(\omega) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi(\omega) = 0$, то $p(\eta = 0) = p(\xi = 0) = 0,1$. Далее, т.к. $\eta(\omega) = 1$ тогда и только тогда, когда $\xi(\omega) = 1$ или $\xi(\omega) = -1$, то СС "$\eta = 1$" есть сумма несовместных СС "$\xi = 1$" и "$\xi = -1$." По теореме сложения $p(\eta = 1) = p(\xi = 1) + p(\xi = -1) = 0,4$. Аналогично получаем

$p(\eta = 4) = p(\xi = 2) + p(\xi = -2) = 0,3$, $p(\eta = 9) = p(\xi = 3) + p(\xi = -3) = 0,2$. Получили искомый закон распределения

y_i	0	1	4	9
$p_i = p(\eta = y_i)$	0,1	0,4	0,3	0,2

, $\sum_i p_i = 1$.

b). Множество Z возможных значений СВ γ ясно из определения: $Z = \{-1, 0, 1\}$. Найдем распределение вероятностей:

$$p(\gamma = -1) = p(\xi \leq -1) = p(\xi = -3) + p(\xi = -2) + p(\xi = -1) = 0,45;$$

$$p(\gamma = 0) = p(\xi = 0) = 0,1;$$

$$p(\gamma = 1) = p(\xi \geq 1) = p(\xi = 3) + p(\xi = 2) + p(\xi = 1) = 0,45.$$

Получен закон распределения СВ γ

z_i	-1	0	1
$p_i = p(\gamma = z_i)$	0,45	0,1	0,45

, $\sum_i p_i = 1$.

c). Функция δ не является СВ, т.к. при $\xi = -3$ $\ln(-0,1)$ не определен. Задача решена.

П р и м е р 2 . Два стрелка независимо друг от друга делают по два выстрела в мишень. Вероятность попадания первого стрелка — 0,8, а второго – 0,7. Найти закон распределения суммарного числа попаданий.

Р е ш е н и е . Введем СВ ξ и η: ξ — число попаданий первого стрелка (из двух выстрелов), η — число попаданий второго стрелка. Множество возможных значений СВ ξ: $X = \{0, 1, 2\}$, аналогично для СВ η : $Y = \{0, 1, 2\}$. Поскольку эксперимент проходит по схеме Бернулли, при вычислении вероятностей воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_2(k) = C_2^k p_i^k (1 - p_i)^{2-k},\ p_1 = 0,8,\ p_2 = 0,7,\ k = 0, 1, 2.$$

Таким образом находим законы распределения СВ ξ и η :

x_i	0	1	2
$p_i = p(\xi = x_i)$	0,04	0,32	0,64

,

y_i	0	1	2
$p_i = p(\eta = y_i)$	0,09	0,42	0,49

.

Пусть СВ γ — суммарное число попаданий, т. е. $\gamma = \xi + \eta$.[3] Найдем множество Z возможных значений γ. Понятно, что $z_i = x_j + y_k$, поэтому $Z = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Вычислим вероятности каждого из значений z_i. Например, СС "$\gamma = 0$" происходит тогда и только тогда, когда одновременно "$\xi = 0$" и "$\eta = 0$." Значит речь

[3]Заметим, что в качестве ПЭС Ω рассматриваем множество ЭС ω_{ij} — "1-й стрелок попал i раз, второй — j раз" , тогда все функции ξ, η, γ определены на Ω.

идет о произведении независимых (в силу постановки опыта) СС. Применяем теорему произведения:

$$p(\gamma=0)=p(\xi=0)\cdot p(\eta=0)=0,04\cdot 0,09=0,0036.$$

СС "$\gamma=1$" также является сложным и раскладывается в сумму несовместных СС "$\xi=0$ и $\eta=1$" , а также "$\xi=1$ и $\eta=0$." Поэтому

$$p(\gamma=1)=p(\xi=0)\cdot p(\eta=1)+p(\xi=1)\cdot p(\eta=0)=0,04\cdot 0,42+0,32\cdot 0,09=0,0456.$$

Продолжая подсчет по тому же принципу, получим

$$p(\gamma=2)=p(\xi=0)\cdot p(\eta=2)+p(\xi=2)\cdot p(\eta=0)+p(\xi=1)\cdot p(\eta=1)=$$

$$=0,04\cdot 0,49+0,64\cdot 0,09+0,32\cdot 0,42=0,2116,$$

$$p(\gamma=3)=p(\xi=1)\cdot p(\eta=2)+p(\xi=2)\cdot p(\eta=1)=0,32\cdot 0,49+0,64\cdot 0,42=0,4256,$$

$$p(\gamma=4)=p(\xi=2)\cdot p(\eta=2)=0,64\cdot 0,49=0,3136.$$

Закон распределения СВ γ:

$z_i=x_j+y_k$	0	1	2	3	4
$p_i=p(\gamma=z_i)$	$0,036$	$0,0456$	$0,2116$	$0,4256$	$0,3136$

, $\sum\limits_i p_i=1.$

Задача решена.

З а м е ч а н и е к п р и м е р у 2. Если нужно по известным законам распределения СВ ξ и η найти закон распределения их произведения $\varepsilon=\xi\cdot\eta$, то действуем по той же схеме, что и для суммы СВ. Находим множество возможных значений СВ ε: $Z=\{0,1,2,4\}$ и считаем их вероятности, учитывая независимость и несовместность соответствующих СС. Например,

$$p(\varepsilon=2)=p(\xi=1)\cdot p(\eta=2)+p(\xi=2)\cdot p(\eta=1)=0,32\cdot 0,49+0,64\cdot 0,42=0,4256.$$

В результате получим

$z_i=x_j\cdot y_k$	0	1	2	4
$p_i=p(\varepsilon=z_i)$	$0,1264$	$0,1344$	$0,4256$	$0,3136$

, $\sum\limits_i p_i=1.$

II. Для НСВ общий метод отыскания закона распределения функции $\zeta=g(\xi)$ (или $g(\xi,\eta)=\left\{\begin{array}{l}\xi+\eta,\\ \xi\cdot\eta\end{array}\right.$ и т.п.) по известным законам распределения аргументов состоит в построении функции распределения

$$F_\zeta(z)=p\ (g(\xi)<z),\ \forall z\in(-\infty,+\infty)\ (\text{или } F_\zeta(z)=p\ (g(\xi,\eta)<z)).$$

К этой задаче мы еще вернемся в разделе "Двумерные СВ" (см. с. 105), а сейчас рассмотрим неслучайную функцию одного случайного аргумента
$\zeta = g(\xi)$.

1. Если $\zeta = g(\xi)$ и $z = g(x)$ — монотонная функция, то существует обратная к ней функция $x = g^{-1}(z)$, причем

$$F_\zeta(z) = p(\zeta < z) = \begin{cases} p(\xi < g^{-1}(z)), & \text{если } g(x) \text{ возрастает} \\ p(\xi > g^{-1}(z)), & \text{если } g(x) \text{ убывает} \end{cases} \Rightarrow$$

$$F_\zeta(z) = \begin{cases} F_\xi(g^{-1}(z)) \ , & \text{если } g(x) \text{ возрастает} \\ 1 - F_\xi(g^{-1}(z)) \ , & \text{если } g(x) \text{ убывает.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Можно получить формулу для функции плотности в случае монотонной функции $z = g(x)$:

$$f_\zeta(z) = F'_\zeta(z) = f_\xi(g^{-1}(z))\left|\frac{dg^{-1}(z)}{dz}\right|. \tag{2.3}$$

2. Если $\zeta = g(\xi)$ и $z = g(x)$ — немонотонная функция, то область определения $z = g(x)$ разбивают на промежутки монотонности (x_i, x_j) и вычисляют функцию распределения $F_\zeta(z)$ на каждом промежутке $z \in (g(x_i), g(x_j))$ (или $(g(x_j), g(x_i))$ для случая убывания $g(x)$ на данном интервале). Функция плотности вычисляется как производная функции распределения. Кроме того, функция плотности может быть найдена как сумма функций, каждая из которых определяется на интервале монотонности по формуле (2.3).

3. Закон распределения для НСВ $\zeta = \xi + \eta$ и $\chi = \xi \cdot \eta$ см. в разделе 2.4.5 на с.105. *формула композиции*

П р и м е р 3. Пусть НСВ ξ принимает значения в интервале (x_1, x_2). По известной функции распределения $F_\xi(x)$ найти функции $F_\zeta(x)$ и $f_\zeta(x)$ для НСВ $\zeta = a\xi + b, \ a \neq 0$.

Р е ш е н и е. Понятно, что функция $z = g(x) = ax + b$ является монотонной $(a \neq 0)$, причем для $a > 0$ $g(x)$ возрастающая и множество возможных значений НСВ ζ — интервал $ax_1 + b < z < ax_2 + b$, а для $a < 0$ $g(x)$ убывающая и $ax_2 + b < z < ax_1 + b$. Вычислим формулу обратной функции, выражая x через z:

$$x = g^{-1}(z) = \frac{z - b}{a}.$$

При вычислении функции распределения $F_\zeta(z)$ учтем множество возможных значений НСВ ζ и воспользуемся формулой (2.2)

$$1) \ \text{ для } a > 0 \ F_\zeta(z) = \begin{cases} p(\zeta < z) = 0 \ , & \text{если } z < ax_1 + b \\ F_\xi(\frac{z-b}{a}) \ , & \text{если } ax_1 + b \le z < ax_2 + b \\ p(\zeta < z) = 1 \ , & \text{если } z \ge ax_2 + b. \end{cases}$$

$$2)\ \text{для } a<0\ F_\zeta(z)=\begin{cases} p(\zeta<z)=0\ , & \text{если } z<ax_2+b \\ 1-F_\xi(\frac{z-b}{a})\ , & \text{если } ax_2+b\le z<ax_1+b \\ p(\zeta<z)=1\ , & \text{если } z\ge ax_1+b. \end{cases}$$

Теперь запишем функцию плотности $f_\zeta(z)$, дифференцируя функцию распределения $F_\zeta(z)$ на соответствующих интервалах:

$$1)\ \text{для } a>0\ f_\zeta(z)=\begin{cases} 0\ , & \text{если } z<ax_1+b, z>ax_2+b \\ \frac{1}{a}F'_\xi(\frac{z-b}{a})\ , & \text{если } ax_1+b<z<ax_2+b. \end{cases}$$

$$2)\ \text{для } a<0\ f_\zeta(z)=\begin{cases} 0\ , & \text{если } z<ax_2+b, z>ax_1+b \\ -\frac{1}{a}F'_\xi(\frac{z-b}{a})\ , & \text{если } ax_2+b<z<ax_1+b. \end{cases}$$

Задача решена.

П р и м е р 4 . НСВ ξ распределена по закону Коши $f_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти плотность распределения случайных величин а) $\zeta=\xi^3+2$; б) $\eta=\xi^2$.

Р е ш е н и е . а). Функция $z=g(x)=x^3+2$ монотонно возрастающая, обратная к ней вычисляется по формуле

$$x=g^{-1}(z)=\sqrt[3]{z-2},\ \text{в частности,}\ \frac{dg^{-1}(z)}{dz}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(z-2)^2}}.$$

Заметим также, что множество возможных значений НСВ ζ — вся действительная ось, т.к. ξ принимает любые значения ($f_\xi(x)>0\ \forall x\in R$). Здесь удобно воспользоваться формулой (2.3):

$$f_\zeta(z)=f_\xi(g^{-1}(z))\Big|\frac{dg^{-1}(z)}{dz}\Big|=\frac{1}{\pi(1+(g^{-1}(z))^2)}\frac{1}{3\sqrt[3]{(z-2)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\pi(1+(\sqrt[3]{z-2})^2)}\frac{1}{3\sqrt[3]{(z-2)^2}}=\frac{1}{3\pi((z-2)^{2/3}+(z-2)^{4/3})}\ ,\ \forall z\in R.$$

б). В отличае от случая а) функция $y=g(x)=x^2$ немонотонная. Построим функцию плотности $f_\eta(y)$ через функцию распределения $F_\eta(y)$. Заметим, что множество возможных значений НСВ $\eta=\xi^2$ — полуось $y\in(0,\infty)$. Тогда по определению функции распределения (см. с. 48)

$$F_\eta(y)=p(\eta<y)=p(\xi^2<y)=\begin{cases} 0\ , & \text{если } y\le 0 \\ p(-\sqrt{y}<\xi<\sqrt{y})\ , & \text{если } y>0. \end{cases}$$

По формуле вычисления вероятности попадания НСВ в интервал (см. с. 51

свойство 4) имеем

$$p(-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}) = \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{y}.$$

Таким образом

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0\ , & \text{если } y \le 0 \\ \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{y}\ , & \text{если } y > 0. \end{cases}$$

Осталось продифференцировать полученную функцию распределения

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \begin{cases} 0\ , & \text{если } y < 0 \\ \frac{1}{\pi(1+y)\sqrt{y}}\ , & \text{если } y > 0. \end{cases}$$

Задача решена.

2.1.4. *Числовые характеристики СВ*

Математическое ожидание (среднее значение) СВ ξ есть число $M[\xi]$, которое вычисляется по формуле

$$M[\xi] = \begin{cases} \sum\limits_{x_i} x_i p(\xi = x_i), & \text{если } \xi \text{ —ДСВ} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\ f_\xi(x)\ dx, & \text{если } \xi \text{ —НСВ} \end{cases} . \tag{2.4}$$

Причем математическое ожидание существует, если соответствующий ряд или интеграл сходятся абсолютно.

Если $\eta = g(\xi)$ для некоторой действительной функции $z = g(x)$, то

$$M[\eta] = M[g(\xi)] = \begin{cases} \sum\limits_{x_i} g(x_i) p(\xi = x_i), & \text{если } \xi \text{ —ДСВ} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ f_\xi(x)\ dx, & \text{если } \xi \text{ —НСВ} \end{cases} . \tag{2.5}$$

СВ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ будем называть *взаимно независимыми*, если любые СС $A_1, A_2, \ldots, A_k$, связанные с данными СВ (например: A_1 — "$\xi_1 < 2$" , A_2 — "$-1 \le \xi_2 < 5$" и т.д.) независимы в совокупности.

Свойства $M[\xi]$

1. Если C — постоянная величина (постоянная функция на ПЭС Ω), то $M[C] = C$.

2. $M[\xi + C] = M[\xi] + C$.

3. $M[C \cdot \xi] = C \cdot M[\xi]$.

4. $M[\xi+\eta]=M[\xi]+M[\eta]$ для любых СВ ξ и η. Следовательно, рассуждая индуктивно, получим $M[\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k]=M[\xi_1]+M[\xi_2]+\ldots+M[\xi_k],\ k\geq 2$.

5. Если СВ ξ и η независимы, то $M[\xi\cdot\eta]=M[\xi]\cdot M[\eta]$. Если СВ $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ взаимно независимы, то $M[\xi_1\cdot\xi_2\cdot\ldots\cdot\xi_k]=M[\xi_1]\cdot M[\xi_2]\cdot\ldots\cdot M[\xi_k],\ k\geq 2$.

Дисперсия СВ ξ есть число $D[\xi]$, которое вычисляется по формуле

$$D[\xi]=\begin{cases}\sum\limits_{x_i}(x_i-M[\xi])^2p(\xi=x_i), & \text{если } \xi \text{ —ДСВ}\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M[\xi])^2\ f_\xi(x)\ dx, & \text{если } \xi \text{ —НСВ}\end{cases}. \qquad (2.6)$$

Величина $\sqrt{D}=\sigma$ есть *среднее квадратическое отклонение* (СКО).

Дисперсия в переводе означает рассеивание и характеризует разброс значений СВ ξ относительно математического ожидания.

Свойства $D[\xi]$

1. Формула для вычисления дисперсии:

$$D[\xi]=M[\xi^2]-(M[\xi])^2. \qquad (2.7)$$

2. Если C — постоянная величина, то $D[C]=0$.

3. Если C — постоянная величина, то $D[C\cdot\xi]=C^2\cdot D[\xi]$.

4. Если ξ,η — независимые СВ, то $D[\xi+\eta]=D[\xi]+D[\eta]$. Если СВ $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ взаимно независимы, то $D[\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k]=D[\xi_1]+D[\xi_2]+\ldots+D[\xi_k],\ k\geq 2$.

П р и м е р 1 . Два стрелка независимо друг от друга делают по два выстрела в мишень. Вероятность попадания первого стрелка — 0,8, а второго – 0,7. Найти среднее значение и дисперсию суммарного числа попаданий (пример 2 на с.55).

Р е ш е н и е . Введем СВ ξ и η: ξ — число попаданий первого стрелка (из двух выстрелов), η — число попаданий второго стрелка. В задаче требуется найти числовые характеристики СВ $\gamma=\xi+\eta$. Сделать это можно двумя способами: первый — найти закон распределения СВ γ и применить определение $M[\gamma]$; второй — воспользоваться свойством математического ожидания $M[\xi+\eta]=M[\xi]+M[\eta]$. Немного меньше вычислений требует второй способ. Законы рапределения СВ ξ и η вычисляются довольно просто (подробно см. с.55):

x_i	0	1	2
$p_i=p(\xi=x_i)$	$0,04$	$0,32$	$0,64$

,

y_i	0	1	2
$p_i=p(\eta=y_i)$	$0,09$	$0,42$	$0,49$

.

Теперь по определению (формула (2.4)) находим $M[\xi],M[\eta]$:

$$M[\xi]=\sum_{i=1}^{3}x_ip(\xi=x_i)=0\cdot 0,04+1\cdot 0,32+2\cdot 0,64=1,6;$$

$$M[\eta] = \sum_{i=1}^{3} y_i p(\eta = y_i) = 0{\cdot}0,09{+}1{\cdot}0,42{+}2{\cdot}0,49 = 1,4 \ \Rightarrow M[\gamma] = M[\xi]{+}M[\eta] = 3.$$

Для вычисления дисперсий СВ ξ и η удобно воспользоваться свойством 1 (формула (2.7)): $D[\xi] = M[\xi^2] - (M[\xi])^2$. Для вычисления $M[\xi^2]$ ($M[\eta^2]$) воспользуемся формулой (2.5) для ДСВ и $g(x) = x^2$:

$$M[\xi^2] = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p(\xi = x_i) = 0 \cdot 0,04 + 1 \cdot 0,32 + 2^2 \cdot 0,64 = 2,88,$$

$$M[\eta^2] = \sum_{i=1}^{3} y_i^2 p(\eta = y_i) = 0 \cdot 0,09 + 1 \cdot 0,42 + 2^2 \cdot 0,49 = 2,38.$$

Таким образом вычислены дисперсии:

$$D[\xi] = M[\xi^2] - (M[\xi])^2 = 2,98 - 1,6^2 = 0,32$$

$$D[\eta] = M[\eta^2] - (M[\eta])^2 = 2,38 - 1,4^2 = 0,42.$$

Поскольку СВ ξ и η независимы, то по свойству 4 дисперсии имеем $D[\xi{+}\eta] = D[\xi]{+}D[\eta] = 0,84$. Итак, задача решена: $M[\xi{+}\eta] = 3,\ D[\xi{+}\eta] = 0,74$.

Определим некоторые другие числовые характеристики распределений СВ, которые используются для характеризации в основном НСВ.

Мода СВ ξ есть число d_ξ, которое (если существует) определяется по правилу:

$$d_\xi = \begin{cases} x_m - \text{возможное значение } \xi, \text{ т.ч. } p(\xi = x_m) = \max\limits_i p(\xi = x_i),\ \xi - \text{ДСВ} \\ x_m - \text{абсцисса точки максимума функции плотности, т. е.} \\ \qquad f_\xi(x_m) = \max f_\xi(x),\ \xi - \text{НСВ}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Таким образом, мода — наиболее вероятное значение ДСВ. Мода может не существовать или не быть единственной.

Медиана НСВ ξ есть число h_ξ, удовлетворяющее условию

$$p(\xi < h_\xi) = p(\xi \geq h_\xi). \tag{2.9}$$

Из определения следует, что прямая $x = h_\xi$ делит площадь криволинейной трапеции, ограниченной функцией плотности $f_\xi(x)$, на две равновеликие части. Медиана есть корень уравнения $F_\xi(x) = 1/2$ и может определяться неоднозначно.

Начальный момент порядка s ($s = 0, 1, 2, \ldots$) СВ ξ (если он существует) есть число α_s, вычисляемое по формуле

$$\alpha_s = M[\xi^s] = \begin{cases} \sum\limits_{x_i} x_i^s p(\xi = x_i), & \text{если } \xi \text{ —ДСВ} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^s\ f_\xi(x)\ dx, & \text{если } \xi \text{ —НСВ} \end{cases}. \quad (2.10)$$

Центральный момент порядка s $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ СВ ξ (если он существует) есть число μ_s, вычисляемое по формуле

$$\mu_s = M[(\xi - M[\xi])^s] = \begin{cases} \sum\limits_{x_i} (x_i - M[\xi])^s p(\xi = x_i), & \text{если } \xi \text{ —ДСВ} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M[\xi])^s\ f_\xi(x)\ dx, & \text{если } \xi \text{ —НСВ} \end{cases}. \quad (2.11)$$

В частности, из определения следует, что

$$\alpha_0 = \mu_0 = 1,\ M[\xi] = \alpha_1,\ D[\xi] = \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2.$$

Заметим, что центральные моменты порядка s выражаются через начальные моменты порядка не более чем s. Определим также две важные характеристики распределения НСВ, связанные с моментами высших порядков.

Коэффициент асимметрии или "скошенности" НСВ ξ есть число Sk_ξ, вычисляемое по формуле $Sk_\xi = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$, где $\sigma = \sqrt{D[\xi]}$.

Коэффициент эксцесса или "островершинности" НСВ ξ есть число e_ξ, вычисляемое по формуле $e_\xi = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$, где $\sigma = \sqrt{D[\xi]}$.

Распределение НСВ ξ назовем *симметричным*, если график функции плотности симметричен относительно прямой $x = M[\xi]$ (в частности $M[\xi] = h_\xi$). Известно, что распределение симметрично тогда и только тогда, когда все центральные моменты нечетного порядка равны нулю. Таким образом, коэффициент асимметрии, вычисляемый через центральный момент μ_3 третьего порядка ($\mu_1 = 0$ всегда) оценивает отклонение от симметричного распределения. Коэффициент эксцесса оценивает степень вытянутости графика функции плотности (по сравнению с нормальной кривой см. с. 76).

П р и м е р 2 . СВ ξ распределена по закону равнобедренного треугольника в интервале $(-a, a)$ (закон Симпсона), если она НСВ и ее плотность распределения вероятностей имеет вид, изображенный на рис. 2.2. Записать функцию плотности распределения вероятностей. Найти $M[\xi]$, $D[\xi]$, d_ξ, h_ξ, e_ξ.

Р е ш е н и е . Запишем аналитическое выражение функции плотности, за-

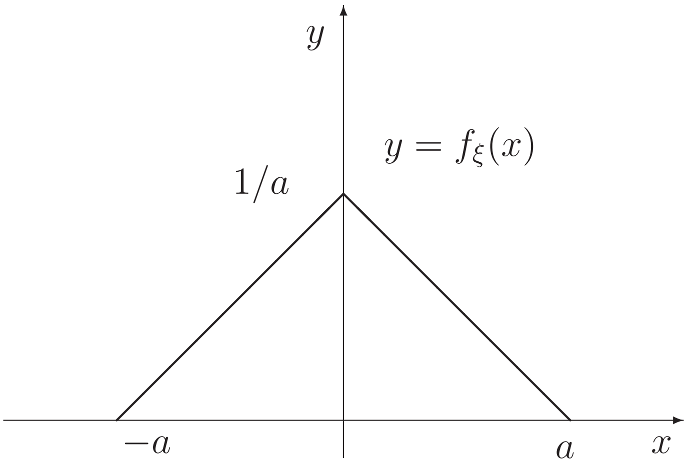


Рис. 2.2. К примеру 2

данной графически на рис.2.2

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{, если } x \notin (-a, a) \\ \frac{1}{a^2}(x+a) & \text{, если } x \in (-a, 0] \\ -\frac{1}{a^2}(x-a) & \text{, если } x \in (0, a) \end{cases} .$$

Вычислим числовые характеристики НСВ ξ.

$$M[\xi] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} x\frac{1}{a^2}(x+a)\,dx + \int\limits_{0}^{a} x\frac{-1}{a^2}(x-a)\,dx = 0.$$

Заметим, что в силу симметричности графика среднее значение и медиана очевидно совпадают: $M[\xi] = 0 = h_\xi$ (можно было не считать $M[\xi]$). Также понятно, что $d_\xi = 0 = M[\xi] = h_\xi$ (в частности, скошенность нулевая). Для вычисления эксцесса e_ξ посчитаем четвертый центральный момент и дисперсию

$$\mu_4 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M[\xi])^4\ f_\xi(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} x^4\frac{1}{a^2}(x+a)\,dx - \int\limits_{0}^{a} x^4\frac{1}{a^2}(x-a)\,dx = \frac{a^4}{15}\ ,$$

$$D[\xi] = \mu_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-M[\xi])^2\ f_\xi(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} x^2\frac{1}{a^2}(x+a)\,dx - \int\limits_{0}^{a} x^2\frac{1}{a^2}(x-a)\,dx = \frac{a^2}{6}\ ,$$

$$e_\xi = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = -\frac{3}{5}\ .$$

Поскольку эксцесс отрицательный, наше распределение "плосковершинное" (по сравнению с нормальным см. с.76). Задача решена.

2.1.5. *Задачи для самостоятельного решения*

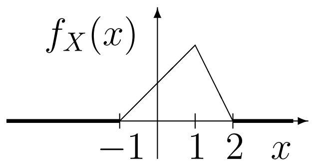
Задача 1. Некто подбрасывает монету до первого появления “орла”, но не более четырех раз (т. е. если даже все 4 раза выпадала “решка”, эксперимент все равно прекращается). Найдите закон распределения числа ξ бросков монеты, математическое ожидание этой величины, ее дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Ответ:

x_i	1	2	3	4
$p(\xi = x_i)$	$0,5$	$0,25$	$0,125$	$0,125$

$$M[\xi] = 1,875, D[\xi] = 1,109375, \sigma[\xi] \approx 1,053.$$

Задача 2. График плотности вероятности $f_\xi(x)$ случайной величины ξ имеет вид:



Укажите множество возможных значений этой случайной величины. Укажите примерные значения величин $M[\xi]$ и $\sigma[\xi]$.

Ответ: Значения ξ из интервала $(-1,2)$. $M[\xi] \approx 1$ $M[\xi] < 1$, $\sigma[\xi] \approx 0.5$. Величина $M[\xi]$ является абсциссой центра тяжести однородной пластинки, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $f_\xi(x)$.

Задача 3. Рабочий обслуживает три автоматические линии, действующие независимо друг от друга. Вероятности того, что в течение смены эти линии потребуют вмешательства рабочего, равны соответственно 0,3; 0,35; 0,4. Найти математическое ожидание и дисперсию числа линий, которые потребуют вмешательства рабочего в течение смены.

Ответ: $M[\xi] = 0,05$, $D[\xi] = 0,6775$.

Задача 4. Задана функция плотности $f_\xi(x)$ НСВ ξ:

$$f_\xi = \begin{cases} ax^2, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x < 0,\ x > 1 \end{cases}.$$

Найти постоянную a; $F_\xi(x)$; $M[\xi]$, $D[\xi]$, $p(\xi > \frac{1}{2})$.

Ответ: $a = 3$; $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$; $M[\xi] = \frac{1}{4}$, $D[\xi] = 0,104$, $p(\xi > \frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$.

Задача 5. В круге радиуса R с центром в точке O наугад выбирается точка M. Найти математическое ожидание и дисперсию СВ ξ, равной расстоянию между точками M и O.

Ответ: $M[\xi] = \frac{2}{3}R$, $D[\xi] = \frac{R^2}{18}$.

Задача 6. Задано распределение ДСВ ξ:

x_i	-3	-1	0	1	3	5
$p(\xi = x_i)$	$0,05$	$0,2$	$0,25$	$0,3$	$0,15$	$0,05$

Найти распределение СВ $\eta = |\xi|$, $\zeta = \xi^3 + 1$.

Ответ:

x_i	0	1	3	5
$p(\eta = x_i)$	$0,25$	$0,5$	$0,2$	$0,05$

,

x_i	-26	0	1	2	28	126
$p(\zeta = x_i)$	$0,05$	$0,2$	$0,25$	$0,3$	$0,15$	$0,05$

.

Задача 7. Задана плотность распределения СВ ξ:

$$f_\xi = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x < -\frac{\pi}{2},\ x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти плотность распределения СВ $\eta = \operatorname{tg} \xi$.

Ответ: $g_\eta(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$, $y \in (-\infty, \infty)$.

2.2. Основные законы распределения

2.2.1. *Некоторые ДСВ*

I. Биномиальное распределение

Пусть эксперимент проводится по схеме Бернулли (см. с.40). т. е. производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p или не происходит с вероятностью $q = 1 - p$. При этом в каждой серии из n испытаний фиксируется число "успехов" — m, $0 \le m \le n$, т. е. число появлений СС A. Рассмотрим ДСВ ξ — число успехов в n испытаниях. Понятно, что $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$ — множество возможных значений ξ. Воспользуемся формулой Бернулли (см.(1.5) на с.40) для вычисления вероятностей этих значений: $p(\xi = m) = p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$. Таким образом получен закон распределения Бернулли (биномиальное распределение):

x_i	0	1	$\dots$	m	$\dots$	n
p_i	q^n	npq^{n-1}	$\dots$	$C_n^m p^m q^{n-m}$	$\dots$	p^n

Не трудно вычисляются числовые характеристики этого распределения: $M[\xi] = np, \quad D[\xi] = npq, \quad \sigma = \sqrt{npq}.$

II. Распределение Пуассона

1). Рассмотрим ДСВ ξ — число успехов в n испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, при условии, что $p(A) = p$ мало, а n велико. В этом случае применяется формула редких явлений Пуассона (см. таблицу на с. 123):

$$p(\xi = m) = P_{n,\lambda}(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \ \lambda = np.$$

Тогда ряд распределения СВ ξ имеет вид

x_i	0	1	$\dots$	m	$\dots$	n
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	$\dots$	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

, $\lambda = np = M[\xi]$,
$D[\xi] = npq \approx np$, ($q \approx 1$, т.к. p мало).

Заметим, что поскольку формула Пуассона имеет приближенный характер, условие нормировки $\sum\limits_{i=1}^{n+1} p_i = 1$, строго говоря, нарушается. Но приближенное равенство $\sum\limits_{i=1}^{n+1} p_i \approx 1$ тем точнее, чем больше n.

2). Рассмотрим события, которые наступают в случайные моменты времени. Такая последовательность случайных событий называется *поток событий.* Если вероятность появления k событий за время длительностью t есть функция только k и t, то поток обладает свойством *стационарности.* Если появление того или иного числа событий на непересекающихся промежутках времени есть независимые СС, то поток обладает свойством *отсутствия последействия.* Если за бесконечно малый промежуток времени может появиться не более одного события, то поток обладает свойством *ординарности.*

Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, который обладает свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Рассмотрим ДСВ ξ — число событий пуассоновского потока за время длительностью t. Закон распределения СВ ξ:

x_i	0	1	$\dots$	k	$\dots$
p_i	$e^{-t\lambda}$	$t\lambda e^{-t\lambda}$	$\dots$	$\frac{(t\lambda)^k}{k!}e^{-t\lambda}$	$\dots$

, $\quad t\lambda = M[\xi] = D[\xi].$

Заметим, что, используя разложение в ряд Тейлора функции e^x, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} = e^{t\lambda} \;\Rightarrow\; e^{-t\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} = 1,$$

т. е. условие нормировки выполнено. Число λ — среднее количество событий потока в единицу времени (*плотность потока*).

З а м е ч а н и е . Наивероятнейшее значение M (т. е. мода) СВ ξ, распределенной по закону Пуассона, удовлетворяет неравенству (см. с. 40) :
$M[\xi] - 1 \le M \le M[\xi]$ или

$$\lambda t - 1 \le M \le \lambda t. \tag{2.12}$$

III. Геометрическое распределение

Пусть опыт состоит в том, что производятся независимые испытания, в каждом из которых с вероятностью p может произойти СС A ("успех"). Испытания производятся до появления СС A. Рассмотрим СВ ξ — количество "неуспехов" до появления "успеха." Тогда $\{0, 1, 2, \dots\}$ — множество возможных значений СВ ξ. Закон распределения СВ ξ имеет вид

x_i	0	1	...	k	...
p_i	p	pq	...	pq^k	...

$$, \; q = 1 - p, \; \sum_{k=0}^{\infty} pq^k = 1, \; M[\xi] = \frac{q}{p}, \; D[\xi] = \frac{q}{p^2}.$$

Можно рассмотреть также в качестве СВ η — количество всех испытаний, включая появление успеха. Понятно, что $\eta = \xi + 1$ и закон распределения имеет вид: $(M[\eta] = M[\xi] + 1, \; D[\eta] = D[\xi])$

x_i	1	2	...	k	...
p_i	p	pq	...	pq^{k-1}	...

$$, \; q = 1 - p, \; \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = 1, \; M[\eta] = \frac{1}{p}, \; D[\eta] = \frac{q}{p^2}.$$

Все приведенные распределения связаны со схемой независимых испытаний. Это простейшие, но часто используемые распределения. Примеры других распределений (в том числе связанных со схемой Бернулли) можно посмотреть в ([9, 7]).

П р и м е р 1 . Два равносильных шахматиста договорились сыграть матч из $2n$ результативных партий. Ничьи не учитываются. Выигравшим считается тот, кто победит в большем числе партий. а). В каком матче больше шансов выиграть любому из участников: в матче из 6 результативных партий или из 10? б). Найти моду, среднее значение и дисперсию для СВ ξ — количество выигранных конкретным шахматистом партий для обоих случаев: матч состоит из 6 партий и из 10 партий.

Р е ш е н и е . Понятно, что мы находимся в схеме из $2n$ испытаний Бернулли. Вероятность выиграть одну партию одинакова для обоих шахматистов и равна $p = 1/2$. Если ξ_{2n} — количество выигранных конкретным шахматистом партий в матче из $2n$ партий, то закон распределения СВ ξ_{2n} биномиальный и имеет вид

x_i	0	1	$\dots$	m	$\dots$	$2n$
$p_{2n}(m)$	q^{2n}	$2npq^{2n-1}$	$\dots$	$C_{2n}^m p^m q^{2n-m}$	$\dots$	p^{2n}

, $p = q = \dfrac{1}{2}$.

а). Выигрыш шахматиста в матче означает, что он выиграл больше половины партий, т. е. нужно вычислить вероятность $p(\xi_{2n} > n)$:

$$p(\xi_{2n} > n) = \begin{cases} p(\xi_6 \geq 4) = \sum\limits_{k=4}^{6} p_6(k) & ,2n = 6 \\ p(\xi_{10} \geq 6) = \sum\limits_{k=6}^{10} p_{10}(k) & ,2n = 10 \end{cases} = \begin{cases} \sum\limits_{k=4}^{6} C_6^k \frac{1}{2^6} & ,2n = 6 \\ \sum\limits_{k=6}^{10} C_{10}^k \frac{1}{2^{10}} & ,2n = 10 \end{cases} .$$

Для вычислений воспользуемся таблицей значений C_n^m на с. 122 (треугольник Паскаля):

$$p(\xi_6 \geq 4) = \frac{1}{2^6}(C_6^4 + C_6^5 + C_6^6) = \frac{1}{2^6}(15 + 6 + 1) = \frac{11}{32} \approx 0,344 \ ,$$

$$p(\xi_{10} \geq 6) = \frac{1}{2^{10}}(C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}) = \frac{1}{2^{10}}(210 + 120 + 45 + 10 + 1) \approx 0,377 \, .$$

Теперь понятно, что $p(\xi_6 \geq 4) < p(\xi_{10} \geq 6)$, т. е. выиграть вероятнее в матче из 10 партий.

б). В силу того, что мы имеем дело со стандартным распределением, можно воспользоваться готовыми формулами математического ожидания и дисперсии: $M[\xi_{2n}] = 2np, D[\xi_{2n}] = 2npq$. Получим $M[\xi_6] = 3$, $M[\xi_{10}] = 5$, $D[\xi_6] = 3/2$, $D[\xi_{10}] = 5/2$. Заметим теперь, что мода есть наивероятнейшее значение СВ. Для случая испытаний, проводимых по схеме Бернулли, есть неравенство, определяющее наивероятнейшее число успехов M в $2n$ испытаниях (см. с. 40): $2np - q \leq M < 2np + p$. Подставляя в неравенство $p = q = 1/2$, получим $M = 3 = d_\xi$ для $2n = 6$, $M = 5 = d_\xi$ для $2n = 10$. Однако в нашем случае, когда $p = q = 1/2$, максимальное значение вероятности $p(\xi_{2n} = k) = C_{2n}^k \frac{1}{2^{2n}}$ определяется максимальным значением C_{2n}^k. Понятно, что это C_6^3, т. е. $d_\xi = 3$, для $2n = 6$ и C_{10}^5, т. е. $d_\xi = 5$, для $2n = 10$ (см. треугольник Паскаля на с.122). Мода и математическое ожидание совпадают, распределение вероятностей симметрично (рис. 2.3). Задача решена.

П р и м е р 2 . Стохастический эксперимент состоит из 100 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании 5

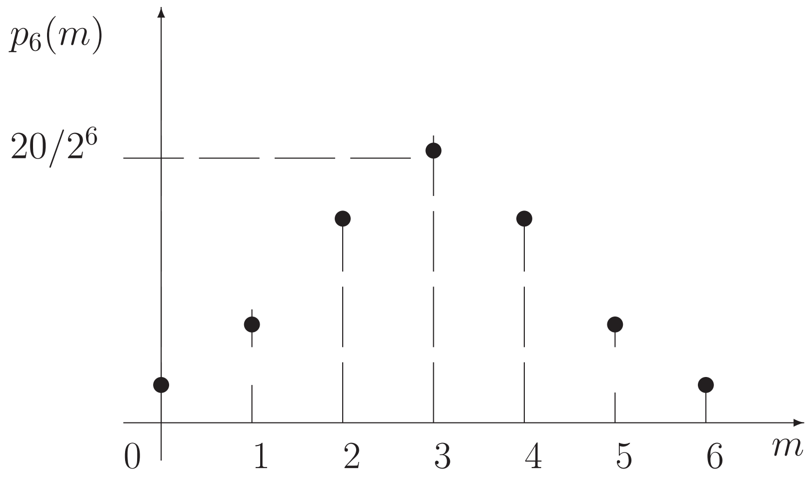


Рис. 2.3. К примеру 1

тетраэдров с цифрами 1,2,3,4 на гранях. Если считать успехом выпадение на нижней грани цифры 1 точно на четырех из пяти тетраэдров, найти распределение числа успехов η и вероятность хотя бы одного успеха.

Р е ш е н и е . Поскольку в каждом из испытаний мы имеем схему Бернулли из 5 исытаний (тетраэдров) с успехом — "выпадение цифры 1" (с вероятностью 1/4), то вероятность СС — "при одном бросании получить точно четыре цифры 1 из пяти" вычисляется по формуле Бернулли:

$$p = C_5^4 \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 = 0,0146.$$

В свою очередь, распределение СВ η есть распределение Бернулли-Пуассона, где $\lambda = np = 1,46$, а вероятности (т.к. $p = 0,0146$ мало, $n = 100$ – велико) вычисляются по формуле Пуассона :

$$p(\eta = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ 0 \leq k \leq 100.$$

Найдем вероятность хотя бы одного успеха в 100 испытаниях через противоположное событие:

$$p(\eta \geq 1) = 1 - p(\eta < 1) = 1 - p(\eta = 0) \approx 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-1,46} = 0,76.$$

Задача решена.

П р и м е р 3 . Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за 2 мин поступит: а) 4 вызова; б)не менее четырех вызовов.

Р е ш е н и е . В задаче мы имеем дело со СВ ξ — число событий пуассоновского потока (вызовов такси) за время $t = 2$ мин. Известна плотность потока λ: 3 вызова в мин. В этом случае СВ ξ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 3$. Тогда

$$a)\ p(\xi = 4) = p_{t=2}(4) = \frac{(2\lambda)^4}{4!}e^{-2\lambda} = \frac{6^4 e^{-6}}{4!} \approx 0,135;$$

$$б)\ p(\xi \geq 4) = 1 - p(\xi < 4) = 1 - \sum_{k=0}^{3} p_{t=2}(k) = 1 - e^{-6}(1 + \frac{6}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!}) \approx 0,8475.$$

Задача решена.

П р и м е р 4 . При радиоактивном распаде СВ ξ — число α-частиц, регистрируемых датчиком в течение времени t, распределяется по закону Пуассона. В известном опыте Резерфорда (см. [9]) радиоактивное вещество наблюдали в течение $N = 2608$ промежутков времени длительностью $t = 7,5$ с, каждый раз регистрируя число частиц. Общее число всех зарегистрированных частиц было $K = 10094$. Считая, что количество опытов достаточно велико, оценить параметр λt распределения Пуассона. Найти наиболее вероятное число регистрируемых частиц за время $t = 7,5$ с и вероятность этого числа.

Р е ш е н и е . Параметр λt есть среднее число частиц за промежуток времени $t = 7,5$ с. Тогда

$$\lambda t \approx \frac{K}{N} = \frac{10094}{2608} = 3,87.$$

Для нахождения наиболее вероятного значения СВ $\xi = M$ воспользуемся неравенством (2.12):

$$\lambda t - 1 \leq M \leq \lambda t,\ \lambda t \approx 3,870\ \Rightarrow\ M = 3.$$

Осталось вычислить максимальную вероятность:

$$p(\xi = 3) = \frac{(t\lambda)^3}{3!}e^{-3,87} = \frac{(3,87)^3}{3!}e^{-3,87} \approx 0,508.$$

Отметим, что в опыте Резерфорда получилось то же число $M = 3$ и близкие к теоретическим вероятностям частоты. Задача решена.

П р и м е р 4 ' . Корректура в $N = 500$ страниц содержит $K = 1300$ опечаток. Найти наиболее вероятное число опечаток на одной странице текста и вероятность этого числа.

Р е ш е н и е . Пусть ξ —число опечаток на одной странице текста. Вероятность опечатки очень мала, т.к. всего знаков на 500 страницах $500 \cdot 1860$ (количество знаков на одной странице

1860), а среди них неверных 1300. Поэтому СВ ξ распределяется по закону редких явлений Пуассона с параметром $\lambda = \frac{K}{N}$. Дальше схема решения как в предыдущем примере.

Пример 5. Проводится ряд попыток включить двигатель. Каждая попытка заканчивается (включением двигателя) независимо от других с вероятностью $p = 0,6$ и занимает время τ (независимо от того включился двигатель или нет). Найти: а) распределение общего времени T, которое потребуется для запуска двигателя; б) среднее время запуска двигателя.

Решение. Число произведенных попыток ξ есть ДСВ, распределенная по геометрическому закону, где $p(\xi = k) = q^{k-1}p,\ k = 1, 2, \dots$. Тогда СВ $T = \xi \cdot \tau$ и $p(T = k \cdot \tau) = p(\xi = k)$. Таким образом, закон распределения T имеет вид

$T = k\tau$	τ	2τ	$\dots$	$k\tau$	$\dots$
$p(T = k\tau)$	p	qp	$\dots$	$q^{k-1}p$	$\dots$

, $p = 0,6,\ q = 1 - p = 0,4.$

Математическое ожидание СВ T есть среднее время запуска двигателя. Используя известное значение для геометрического распределения $M[\xi]$, получим

$$M[\xi] = \frac{1}{p} \approx 1,67 \ \Rightarrow\ M[T] = M[\xi \cdot \tau] = \tau M[\xi] = \tau\frac{1}{p} = 1,67\tau.$$

Задача решена.

2.2.2. *Некоторые НСВ*

I. Равномерное распределение

НСВ ξ имеет равномерное распределение $R(a, b)$ на конечном отрезке $[a, b]$, если функции плотности и распределения имеют вид (рис. 2.4)

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b] \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \end{cases}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x > b \end{cases}.$$

Вычисляя числовые характеристики, получим

$$M[\xi] = \frac{a+b}{2},\ D[\xi] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Равномерное распределение имеют СВ, принимающие равновозможные значения из отрезка $[a, b]$. Примерами таких НСВ могут служить: ошибка округления до ближайшего деления измерительного прибора; случайное время появления пассажира на остановке транспорта; координата случайной точки, брошенной на отрезок.

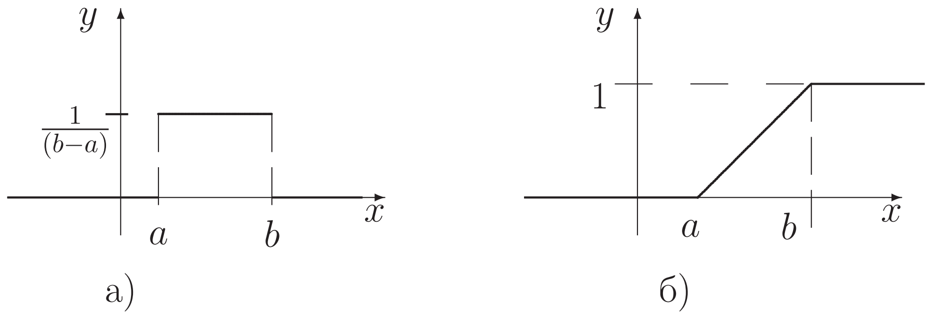


Рис. 2.4. а) функция $f_\xi(x)$; б) функция $F_\xi(x)$ для равномерного распределения

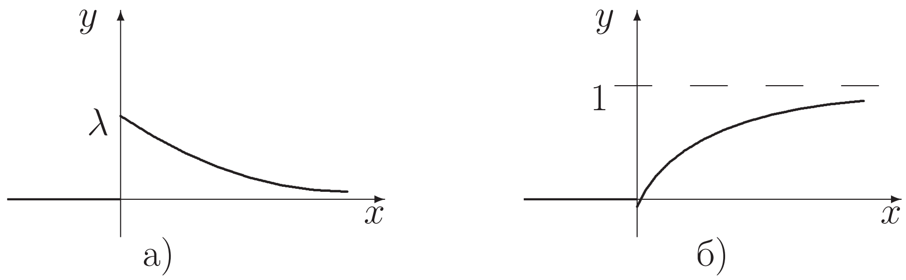


Рис. 2.5. а) функция $f_\xi(x)$; б) функция $F_\xi(x)$ для показательного распределения

II. Показательное распределение

1). Рассмотрим пуассоновский поток случайных событий плотности λ. Пусть СВ ξ — время между двумя соседними событиями потока. Тогда ξ — НСВ, принимающая неотрицательные значения и распределенная по показательному закону с параметром λ — $E(\lambda)$. Функции плотности и распределения показательного закона имеют вид (рис. 2.5)

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}, \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}, \quad M[\xi] = \sigma[\xi] = \frac{1}{\lambda}.$$

2). Пусть случайные события пуассоновского потока есть отказы в работе некоторой системы. Тогда, по определению функции распределения,
$F_\xi(t) = p(\xi < t)$ — вероятность того, что за время t произойдет хотя бы один отказ (т.к. ξ — время между двумя соседними событиями потока, т. е. отказами). Рассмотрим противоположное событие: A — "за время длительностью t не

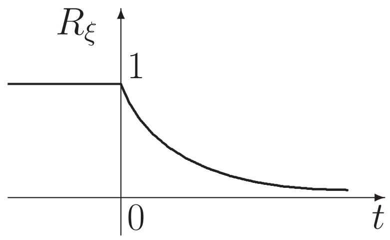


Рис. 2.6. Функция надежности $R_\xi(t)$

произойдет ни одного отказа" :

$$p(A) = p(\xi > t) = 1 - p(\xi < t) = 1 - F_\xi(t) = R_\xi(t) = \begin{cases} 1, & t < 0; \\ e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases}$$

Мы получили определение *функции надежности* $R_\xi(t)$ — вероятность безотказной работы системы в течение времени длительностью t с плотностью потока отказов λ. При этом ξ — время безотказной работы системы, $M[\xi] = \frac{1}{\lambda}$ — среднее время безотказной работы. Понятно, что обычно функция надежности $R_\xi(t)$ рассматривается только для $t > 0$ (см. рис. 2.6).

Пример 1. Длина комнаты измеряется с помощью рулетки с делениями в 10 см. При этом округление производится до ближайшего деления. Пусть СВ ξ — ошибка измерения. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию ξ.

Решение. НСВ ξ принимает значения на отрезке $[-5, 5]$ и имеет равномерное распределение с плотностью

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-5, 5] \\ \dfrac{1}{10}, & x \in [-5, 5] \end{cases}$$

Подставляя $a = -5,\ b = 5$ в известные формулы для $M[\xi]$ и $D[\xi]$, получим

$$M[\xi] = \frac{a+b}{2} = 0,\ D[\xi] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{100}{12} \approx 8,33.$$

Задача решена.

Пример 2. На окружность радиуса r наудачу ставятся две точки, которые затем соединяются между собой и с центром окружности. Найти среднее значение площади полученного треугольника.

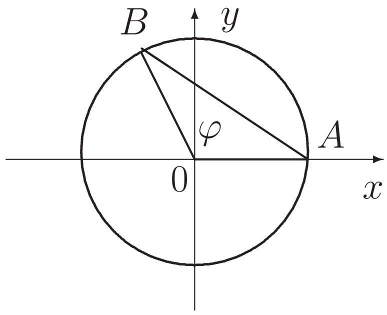


Рис. 2.7. К примеру 2

Р е ш е н и е . Т.к. в данном опыте важно лишь взаимное расположение точек на окружности, то можно считать, что первая точка имеет фиксированные координаты $(r, 0)$ (рис.2.7). Тогда положение второй точки, случайно поставленной на окружность, полностью определяется углом φ между радиус-векторами двух точек. Таким образом, в качестве ЭС в данном опыте можно рассматривать координату случайной точки φ, брошенной на отрезок $[0, 2\pi]$. Тогда НСВ φ распределена равномерно с плотностью

$$f_\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 2\pi] \\ \dfrac{1}{2\pi}, & x \in [0, 2\pi] \end{cases} .$$

Площадь треугольника рассчитываем по формуле

$$S = S(\varphi) = \frac{r^2}{2}|\sin\varphi|.$$

Тогда по определению математического ожидания для функции $S(\varphi)$ случайной величины φ (см. (2.5) на с. 59) имеем

$$M[S] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(x) f_\varphi(x)\, dx = \frac{1}{2} r^2 \int\limits_0^{2\pi} |\sin x| \frac{1}{2\pi}\, dx = \frac{r^2}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx = \frac{r^2}{\pi} .$$

Задача решена.

П р и м е р 3 . Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени ξ безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_\xi(t) = 1 - e^{-0{,}02t}$. Время безотказной работы η второго элемента описывается функцией надежности $R_\eta(t) = e^{-0{,}05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью 6 ч: а) оба элемента откажут; б) хотя бы один элемент откажет.

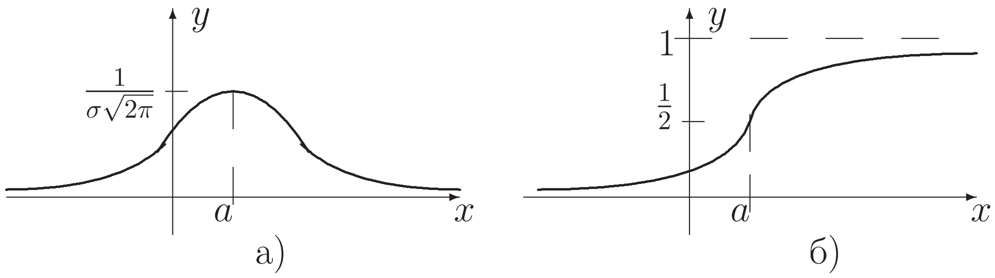


Рис. 2.8. а) функция $f_\xi(x)$; б) функция $F_\xi(x)$ для нормального распределения

Р е ш е н и е . Вероятность того, что первый элемент откажет за время длительностью 6 ч (СС A) равна $F_\xi(6)$, а вероятность того, что он не откажет, $R_\xi(6) = 1 - F_\xi(6)$. Так же считаем вероятность безотказной работы второго элемента: $R_\eta(6)$ и вероятность отказа (СС B) — $F_\eta(6) = 1 - R_\eta(6)$. Проведем вычисления:

$$p(A) = F_\xi(6) = 1 - e^{-0,02\cdot 6} = 0,113\ ,\ p(\overline{A}) = R_\xi(6) = e^{-0,02\cdot 6} = 0,887\ ;$$

$$p(B) = F_\eta(6) = 1 - e^{-0,05\cdot 6} = 0,259\ ,\ p(\overline{B}) = R_\eta(6) = e^{-0,05\cdot 6} = 0,741\ .$$

Теперь вычисляем вероятности сложных событий

$$\text{а) } p(A\cdot B) = p(A)\cdot p(B) = 0,113\cdot 0,259 = 0,03\ ;$$

$$\text{б) } p(A+B) = 1 - p(\overline{A}\cdot\overline{B}) = 1 - p(\overline{A})\cdot p(\overline{B}) = 1 - 0,887\cdot 0,741 = 0,34.$$

Задача решена.

2.2.3. *Нормальное распределение*

НСВ ξ имеет нормальное распределение с параметрами a, σ — $N(a,\sigma)$, если функция плотности и функция распределения имеют вид (рис.2.8)

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\ ,\ F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \Psi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)\ ,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \ \text{ – функция Лапласа, } \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2} + \Phi(x).$$

Примером нормально распределенной НСВ служит ошибка измерений, которая является следствием множества слабых случайных влияний (обосновывает этот факт центральная предельная теорема, см. с. 84).

З а м е ч а н и е. Функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ не выражаются элементарной формулой, но в учебниках по теории вероятностей есть таблицы их значений (см. также приложение с.125). При использовании таблиц нужно иметь в виду простые свойства этих функций:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x)\ ,\ \Psi(-x) = 1 - \Psi(x)\ ,\ \Phi(b) - \Phi(a) = \Psi(b) - \Psi(a)\ .$$

Числовые характеристики $N(a, \sigma)$.

1. $M[\xi] = h_\xi = d_\xi = a$, т. е. нормальное распределение симметрично и параметр a есть математическое ожидание.

2. $D[\xi] = \sigma^2$, т. е. параметр σ есть среднее квадратическое отклонение.

3. Центральные моменты порядка s

$$\mu_s = \begin{cases} 0, & \text{если } s \text{ нечетно;} \\ (s-1)\sigma^2\mu_{s-2}, & \text{если } s \text{ четно.} \end{cases} .$$

4. Коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю:

$$Sk_\xi = 0\ , e_\xi = 0\ .$$

Вероятность попадания в интервал для $N(a, \sigma)$**.**

1. В силу общего свойства функции распределения (см. с. 49), имеем

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \tag{2.13}$$

2. В частности, если интервал симметричен относительно математического ожидания a, то

$$p(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{2.14}$$

3. *Правило трех сигм*: нормально распределенная НСВ ξ с дисперсией σ^2 практически не отклоняется от своего среднего значения a больше, чем на 3σ :

$$p(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973. \tag{2.15}$$

П р и м е р 1 . Производится измерение без систематических ошибок диаметра вала. Случайная ошибка измерения ξ подчиняется нормальному распределению со стандартным (т. е. средним квадратическим) отклонением 1 см. Найти вероятность того, что ошибка измерения ξ не превзойдет по абсолютной величине 1,5 см.

Р е ш е н и е . Отсутствие систематических ошибок означает, что $M[\xi] = 0$. Также задано $\sigma = 1$. Найдем требуемую вероятность по формуле (2.14) и используем таблицу в приложении на с. 125

$$p(|\xi - M[\xi]| < \varepsilon) = p(|\xi| < 1,5) = 2\Phi\left(\frac{1,5}{1}\right) = 0,8664.$$

Задача решена.

П р и м е р 2 . Химический завод изготовляет серную кислоту номинальной плотности 1,84 г/см^3. В результате статистических испытаний обнаружено, что практически $99,9\%$ всех выпускаемых реактивов имеют плотность в интервале $(1,82; 1,86)$. Найти вероятность того, что кислота удовлетворяет стандарту, если для этого достаточно, чтобы ее плотность не отклонялась от номинала более чем на 0,01 г/см^3.

Р е ш е н и е . Пусть НСВ ξ — плотность кислоты. Можно считать, что ξ распределяется по нормальному закону. Тогда среднее значение ξ соответствует номинальной плотности и $M[\xi] = 1,84$. Результаты статистических испытаний соответствуют неравенству

$$p(1,82 < \xi < 1,86) = 0,999.$$

А найти нужно $p(|\xi - M[\xi]| < 0,01)$. Понятно, что здесь мы применим формулу (2.14), но сначала нужно определить среднее квадратическое отклонение σ. Заметим, что интервал $(1,82 < \xi < 1,86)$ является симметричным относительно $M[\xi] = 1,84$, поэтому используем формулу (2.14) для $\varepsilon = 0,02$:

$$p(1,82 < \xi < 1,86) = p(|\xi - 1,84| < 0,02) = 2\Phi\left(\frac{0,02}{\sigma}\right) = 0,999.$$

По таблице функции Лапласа (см. с. 125) найдем по значению функции $\Phi(x) = 0,999/2 = 0,4995$ ее аргумент $x = 3,3$. Тогда

$$\frac{0,02}{\sigma} = 3,3 \;\Rightarrow\; \sigma = 0,006 \quad\Rightarrow$$

$$p(|\xi - 1,84| < 0,01) = 2\Phi\left(\frac{0,01}{0,006}\right) = 2\Phi\left(1,65\right) = 2 \cdot 0,4505 = 0,901.$$

Итак, кислота удовлетворяет стандарту с вероятностью 0,901. Задача решена.

П р и м е р 3 . Не пользуясь таблицами, оценить, какая из вероятностей больше: $p(|\xi| < 3)$ или $p(|\eta| < 3)$ для нормально распределенных СВ ξ и η. Провести оценку для двух случаев :

а) $\xi - N(0,2)$, а $\eta - N(0,3)$; б) $\xi - N(0,2)$, а $\eta - N(1,2)$.

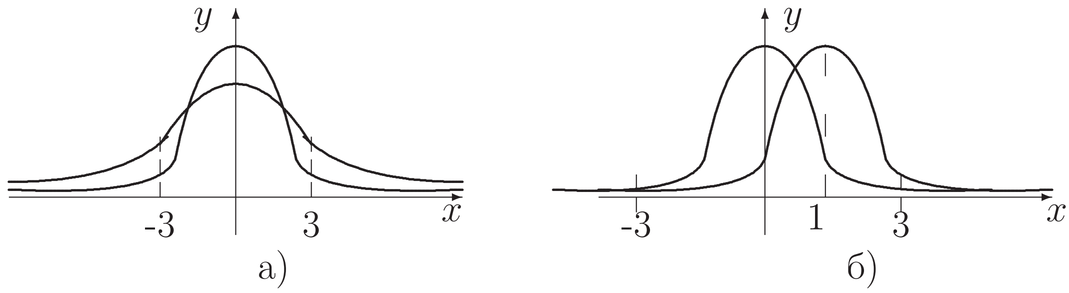


Рис. 2.9. К примеру 3

Р е ш е н и е . а). Для первого случая $M[\xi] = M[\eta] = 0$, а $\sigma[\xi] = 2,\ \sigma[\eta] = 3$. Но тогда по формуле (2.14) имеем

$$p(|\xi| < 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{\sigma[\xi]}\right) = 2\Phi\left(\frac{3}{2}\right),\ p(|\eta| < 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{\sigma[\eta]}\right) = 2\Phi\left(\frac{3}{3}\right).$$

Т.к. мы не можем пользоваться таблицами функции $\Phi(x)$, воспользуемся ее свойством монотонного возрастания:

$$\frac{3}{2} > 1 \ \Rightarrow\ \Phi\left(\frac{3}{2}\right) > \Phi\left(1\right) \ \Rightarrow\ p(|\xi| < 3) > p(|\eta| < 3).$$

На этом примере хорошо видно, как влияет СКО (среднее квадратическое отклонение) на характер распределения. В частности, графически кривая Гаусса для ξ более узкая, чем для η (рис.2.9), а площадь криволинейной трапеции на основании $-3 < x < 3$ (т. е. вероятность попадания в интервал) больше для узкой кривой.

б). Во втором случае $M[\xi] = 0,\ M[\eta] = 1,\ \sigma[\xi] = 2 = \sigma[\eta]$. Используем формулы (2.14), (2.13) и нечетность функции $\Phi(x)$:

$$p(|\xi| < 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{\sigma[\xi]}\right) = 2\Phi\left(\frac{3}{2}\right),$$

$$p(|\eta| < 3) = p(-3 < \eta < 3) = \Phi\left(\frac{3-1}{\sigma[\eta]}\right) - \Phi\left(\frac{-3-1}{\sigma[\eta]}\right) = \Phi\left(1\right) + \Phi\left(2\right).$$

Воспользуемся свойствами функции $\Phi(x)$ для доказательства неравенства

$$2\Phi\left(\frac{3}{2}\right) > \Phi\left(1\right) + \Phi\left(2\right).$$

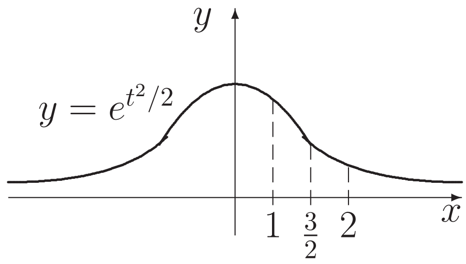


Рис. 2.10. К примеру 3

Действительно, имея в виду, что

$$\Phi\,(b) - \Phi\,(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

заключаем, что разность значений функции Лапласа есть площадь криволинейной трапеции на основании $[a, b]$, ограниченной кривой Гаусса, симметричной относительно оси Oy. Но тогда, чем дальше вдоль оси Ox смещен отрезок (в нашем случае длины 0,5), тем меньше площадь (рис. 2.10). Таким образом

$$\Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \Phi\,(1) > \Phi\,(2) - \Phi\left(\frac{3}{2}\right) \;\Rightarrow$$

$$2\Phi\left(\frac{3}{2}\right) > \Phi\,(1) + \Phi\,(2) \;\Rightarrow\; p(|\xi| < 3) > p(|\eta| < 3).$$

В этом случае кривые плотности для ξ и η одинаковой формы ($\sigma[\xi] = \sigma[\eta]$), но гауссиана $N(1, 2)$ получена сдвигом линии $N(0, 2)$ вправо на единицу (рис. 2.9). Полученное неравенство $p(|\xi| < 3) > p(|\eta| < 3)$ сравнивает площади криволинейных трапеций на основании $-3 < x < 3$. Задача решена.

П р и м е р 4 . НСВ ξ распределена нормально: $N(a, \sigma)$. Найти закон распределения НСВ $\eta = A\xi + B, A \neq 0$.

Р е ш е н и е . Воспользуемся формулой для плотности распределения НСВ $\eta = g(\xi)$ (см. (2.3) на с. 57):

$$f_\eta(y) = f_\xi(g^{-1}(y))\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|,\; f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Для $A \neq 0$ функция $y = g(x) = Ax + B$ монотонная и $g^{-1}(y) = \dfrac{y-B}{A}$, т. е. $\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} = \dfrac{1}{A}$. Подставляя все в формулу, получим

$$f_\eta(y) = f_\xi\left(\frac{y-B}{A}\right)\left|\frac{1}{A}\right| = \frac{1}{|A|\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(y-(Aa+B))^2}{2(A\sigma)^2}}.$$

Получен нормальный закон распределения НСВ η с параметрами $M[\eta] = Aa + B$, и $\sigma[\eta] = |A|\sigma$. Задача решена.

2.2.4. *Задачи для самостоятельного решения*

Задача 1. Сколько изюма должны содержать в среднем сдобные булочки, чтобы вероятность иметь хотя бы одну изюминку в булке была не меньше 0,99?

Ответ: Если считать, что количество изюминок в булочке подчинено закону редких явлений Пуассона с параметром λ, то $\lambda \geq 5$.

Задача 2. СВ ξ и η независимы и означают число попыток продажи товара до его реализации у первого (ξ) и у второго (η) продавцов. Соответственно ξ и η распределены одинаково — по геометрическому закону с параметром p (p — вероятность продажи товара при каждой попытке).
Найти: а) $p(\xi = \eta)$; б) $p(\xi > \eta)$.

Ответ: а)$\frac{p}{1+q}$; б) $\frac{q}{1+q}$, $q = 1 - p$.

Задача 3. Найти вероятности следующих СС:
A_1 — "$15 < \xi \leq 25$," если ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $p = 0,5,\ n = 50$;
A_2 — "$20 \leq \xi \leq 40$," если ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $p = 0,6,\ n = 50$;
A_3 — "$6 < \xi < 12$," если ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 8$;
A_4 — "$3 \leq \xi < 7$," если ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 4$.

Ответ: $p(A_1) = 0,553$, $p(A_2) = 0,998$, $p(A_3) = 0,575$, $p(A_4) = 0,651$.

Задача 4. Паром отправляется в рейс через реку, как только к пристани прибывает ровно 9 автомобилей. Автомобили прибывают к парому независимо друг от друга со средней интенсивностью 6 автомобилей в час. Требуется определить: а) вероятность того, что время между последовательными рейсами парома будет менее одного часа; б) время между последовательными отправлениями парома, вероятность превышения которого составляет 0,01.

Ответ: а) $p = 0,153$, б) 2,9 ч.

Задача 5. Завод изготовляет шарики для подшипников, номинальный диаметр которых равен 10 мм, а фактический диаметр случаен и распределен по нормальному закону с параметрами $a = 10$, $\sigma = 0,4$. При контроле бракуются все шарики, не проходящие через отверстие диаметром $d_1 = 10,7$ мм, и все, проходящие через отверстие диаметром $d_2 = 9,3$ мм. Найти процент бракованых шариков.

О т в е т : 8%.

Задача 6. Как получить график функции распределения $F_\eta(y)$ СВ η из графика функции распределения $F_\xi(x)$ СВ ξ, если: а) $\eta = \xi + 3$; б) $\eta = 3\xi$.

О т в е т : а) $F_\xi(x)$ сдвинуть вправо на 3 единицы; б) $F_\xi(x)$ растянуть в 3 раза вдоль оси Ox.

Задача 7. Пусть СВ ξ распределена по нормальному закону — $N(a, \sigma)$. Известно, что $p(\xi > 2) = 0,5$, $p(\xi < 3) = 0,975$. Вычислить $p(1 < \xi < 3)$, найти параметры распределения.

О т в е т : $p = 0,95$, $a = 5$, $\sigma^2 = 0,26$.

2.3. Последовательности случайных величин

Рассмотрим бесконечную последовательность СВ $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} : \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ldots$. Пусть A — неслучайное число.

Последовательность СВ $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *сходящейся по вероятности* к числу A, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} p(|\xi_n - A| < \varepsilon) = 1 \ , \quad \text{обозначение: } \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} A.$$

Последовательность СВ $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ с функциями распределения $F_n(x)$ называется *сходящейся по распределению* к СВ ξ с функцией распределения $F_\xi(x)$, если в каждой точке непрерывности x функции $F_\xi(x)$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_\xi(x) \ , \quad \text{обозначение: } \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{F} \xi \ \ (\text{или} \ \ \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{F} F_\xi(x)).$$

Функцию распределения $F_\xi(x)$ называют *асимптотической* для $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Заметим, что в теории вероятностей изучаются и другие виды сходимости (например, в среднем квадратическом).

2.3.1. *Закон больших чисел*

В широком смысле закон больших чисел утверждает, что при очень большом числе случайных явлений их с р е д н и й р е з у л ь т а т практически перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью точности. В узком смысле это ряд теорем, в которых при определенных условиях устанавливается сходимость средних характеристик большого числа опытов к неслучайным величинам.

Следующая теорема оценивает отклонение СВ ξ от ее среднего значения $M[\xi]$. Она не является предельной теоремой, но используется как в задачах, так и в доказательствах предельных теорем.

Теорема 2.1 (неравенство Чебышева) . *Для любой СВ ξ с математическим ожиданием $M[\xi]$ и дисперсией $D[\xi]$ верно неравенство*

$$p(|\xi - M[\xi]| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[\xi]}{\varepsilon^2} \ . \tag{2.16}$$

Следствие. 1. Неравенство (2.16), учитывая свойства противоположных СС, может быть записано в эквивалентной форме:

$$p(|\xi - M[\xi]| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D[\xi]}{\varepsilon^2} \ . \tag{2.17}$$

2.(Правило трех сигм). Пусть в неравенстве Чебышева $\varepsilon = 3\sigma = 3\sqrt{D[\xi]}$, тогда

$$p(|\xi - M[\xi]| \geq 3\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}.$$

Заметим, что для случая нормального распределения вероятность $p(|\xi - M[\xi]| \geq 3\sigma)$ практически нулевая. Но следствие сформулировано для любых СВ, поэтому граница завышена.

Теорема 2.2 (Чебышева) . *Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность попарно независимых СВ, имеющих конечные математические ожидания $M[\xi_i]$ и ограниченные дисперсии, т. е. найдется число $K > 0$ такое, что для любого i $D[\xi_i] < K$. Тогда*

$$p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[\xi_i]\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{K}{n\varepsilon^2} \ . \tag{2.18}$$

Следствие. 1. Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность попарно независимых, одинаково распределенных СВ, имеющих конечные математические ожидания $M[\xi_i] = m$ и дисперсии. Тогда последовательность СВ $\overline{\xi_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ сходится по вероятности к m : $\overline{\xi_n} \xrightarrow[n\to\infty]{p} m$.

2. Частным случаем теоремы Чебышева является закон больших чисел для схемы Бернулли: относительная частота $\xi_n = \frac{m}{n}$ появления "успеха" в n независимых испытаниях сходится по вероятности к теоретической вероятности "успеха" , т. е. $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} p$. (Сравните с теоремой 1.10 на с.43.)

Следствие 2 является обоснованием введения понятия *статистической вероятности* как предела относительной частоты (сравните с определениями вероятности в разделе "Вероятность" , см.с. 18).

П р и м е р 1 . Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого из элементов за время t равна 0,05. Пусть ξ — число отказавших элементов за время t. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения ξ от среднего значения отказов за время t окажется меньше двух, используя а) неравенство Чебышева; б) непосредственный счет по формуле Бернулли.

Р е ш е н и е . В задаче требуется оценить вероятность $p(|\xi - M[\xi]| < 2)$. Понятно, что СВ ξ распределена по закону Бернулли с параметрами $p = 0,05$, $n = 10$. Поэтому

$$M[\xi] = np = 10 \cdot 0,05 = 0,5, \quad D[\xi] = npq = 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 0,475.$$

а). Используя неравенство Чебышева (2.17), получим

$$p(|\xi - M[\xi]| < 2) \geq 1 - \frac{0,475}{4} = 0,88.$$

б). Раскроем неравенство $|\xi - M[\xi]| < 2 : -1,5 < \xi < 2,5$, т. е. $\xi = 0,1,2$. Теперь используем формулу Бернулли

$$p(|\xi - M[\xi]| < 2) = p_{10}(0) + p_{10}(1) + p_{10}(2) =$$

$$= 0,95^{10} + 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95^9 + 45 \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^8 = 0,98846.$$

Сравнивая результаты вычислений в а) и в б), можем заключить, что оценка с помощью неравенства Чебышева грубая, но, в отличае от способа б), не требует больших вычислений, а также знания закона распределения СВ, используя лишь значение $D[\xi]$.

П р и м е р 2 . Опыт состоит из n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться СС A с вероятностью $p(A)$. Сколько раз нужно повторить испытание, чтобы с вероятностью 0,9 гарантировать, что относительная частота появления СС A совпадает с теоретической вероятностью $p(A)$ с точностью 0,1?

Р е ш е н и е . Рассмотрим индикаторную СВ ξ_i — число появлений СС A в

i-м испытании. Тогда ее закон распределения имеет вид

x_i	0	1
p_i	$1-p(A)$	$p(A)$

, $M[\xi_i] = p(A),\ D[\xi_i] = p(A)(1-p(A)) < 1.$

Тогда относительная частота появления СС A в n испытаниях $\frac{m}{n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, а $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} M[\xi_i] = p(A)$. Таким образом применима оценка (2.18) из теоремы Чебышева:

$$p\left(\left|\frac{m}{n} - p(A)\right| < 0,1\right) \geq 1 - \frac{1}{n(0,1)^2} > 0,9 \quad \Rightarrow \quad n > 1000.$$

Итак, проводя серии по 1000 испытаний, примерно в 90% серий будем получать значение относительной частоты, которая отличается от $p(A)$ не более чем на 0,1. Так можно определять теоретическую вероятность.

Замечание. Теорема Чебышева лежит в основе практической интерпретации вероятности как относительной частоты "успехов" в n независимых испытаниях, а математического ожидания СВ как среднего арифметического значений этой СВ в n независимых испытаниях. Однако, сходимость по вероятности не исключает очень редкой возможности значительного отклонения среднего арифметического от математического ожидания (или относительной частоты от вероятности) при любом значении n.

2.3.2. *Центральная предельная теорема*

В широком смысле центральная предельная теорема (ЦПТ) утверждает, что сумма большого числа случайных слагаемых при довольно слабых ограничениях имеет распределение, близкое к нормальному. В узком смысле под ЦПТ понимается ряд теорем, в которых устанавливаются условия сходимости по распределению последовательности СВ к нормальному распределению.

Теорема 2.3 (Ляпунова) . *Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность попарно независимых, одинаково распределенных СВ, имеющих конечные математические ожидания $M[\xi_i] = m$ и дисперсии $D[\xi_i] = \sigma^2$. Тогда последовательность СВ $\xi_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ сходится по распределению к нормально распределенной СВ η с параметрами $M[\eta] = nm$, $\sigma[\eta] = \sigma\sqrt{n}$, т. е.*

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{F} N(nm, \sigma\sqrt{n}). \tag{2.19}$$

Следствие. 1. Пусть последователоность $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям ЦПТ, тогда при достаточно больших значениях n верны приближенные равенства

$$p(a \leq \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a-nm}{\sigma\sqrt{n}}\right), \qquad (2.20)$$

$$p_{\xi_n}(x) = \begin{cases} p(\xi_n = x), & \xi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i - \text{ДСВ} \\ f_{\xi_n}(x), & \xi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i - \text{НСВ} \end{cases} \approx \varphi\left(\frac{x-nm}{\sigma\sqrt{n}}\right), \qquad (2.21)$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_0^x e^{-\dfrac{t^2}{2}}\, dt$ — функция Лапласа, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{x^2}{2}}$.

2. Пусть последовательность $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям ЦПТ, тогда

$$\overline{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{F} N(m, \sigma/\sqrt{n}),$$

$$\frac{\overline{\xi}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{F} N(0,1).$$

Для СВ из пункта 2 имеют место аналоги формул из пункта 1.

★ Таким образом, в ЦПТ (теорема 2.3) и в следствии из нее идет речь об асимптотическом приближении сумм независимых слагаемых, средних арифметических и центрированных средних. Независимо от того, какие законы распределения имеют слагаемые ξ_i, суммарная СВ распределяется асимптотически нормально (при выполнении условий ЦПТ). На этом основан практический вывод о том, что влияние большого числа слабых независимых факторов в сумме распределено нормально. Примером может служить ошибка точных физических измерений.

I. Асимптотические формулы для распределения Бернулли

В разделе "Асимптотические приближения формулы Бернулли" (см. с.42) сформулированы локальная и интегральная теоремы Лапласа, а также теорема Бернулли (теоремы 1.8, 1.9, 1.10). Покажем, что они являются следствием ЦПТ. Действительно, если испытания проходят по схеме Бернулли с вероятностью "успеха" p, то СВ ξ — количество "успехов" в n испытаниях есть сумма $\xi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ индикаторных СВ ξ_i — количество успехов в i-м испытании с законом распределения

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x_i & 0 & 1 \\ \hline p_i & 1-p & p \\ \hline \end{array}, \;\; M[\xi_i] = p, \;\; D[\xi_i] = p(1-p) = pq.$$

Для последовательности $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ выполнены условия ЦПТ. Тогда для достаточно больших n и p, не близких к 0 и 1 (условия для n и p получаются с помощью специальных оценок скорости сходимости), по формуле (2.19) имеем

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{F} N(np, \sqrt{pq}\sqrt{n}).$$

Подставляя параметры $m = p$ и $\sigma = \sqrt{pq}$ в формулы (2.20) и (2.21), получаем интегральную и локальную теоремы Лапласа соответственно:

$$p(a \le \xi_n \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

$$p(\xi = x) \approx \varphi\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

А теорема Бернулли есть частный случай интегральной теоремы Лапласа.

II. Асимптотические формулы для распределения Пуассона

Рассмотрим последовательность независимых СВ $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, где ξ_i распределены по закону Пуассона с параметром $\lambda = M[\xi_i] = D[\xi_i]$ (см. с.66). Тогда по ЦПТ по формуле (2.19), учитывая, что $m = \sigma^2 = \lambda$, имеем

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{F} N(n\lambda, \sqrt{\lambda}\sqrt{n}).$$

Например, на автоматическую телефонную станцию поступает простейший поток вызовов плотностью λ. Пусть СВ ξ — число вызовов за единицу времени. Тогда ξ имеет распределение Пуассона. Требуется оценить вероятность поступления k вызовов за n единиц времени: $p_n(k)$ и вероятность $p_n(k_1 \le k \le k_2)$ (число вызовов k за время n не меньше k_1 и не больше k_2). Пусть ξ_i — число вызовов за i-ю единицу времени, тогда число вызовов за время n есть сумма $\xi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, причем СВ ξ_i распределены по закону Пуассона. Применяя формулы (2.21) и (2.20), получим

$$p_n(k) = \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda k} \approx \varphi\left(\frac{k-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\lambda}}\, e^{-\dfrac{(k-n\lambda)^2}{2n\lambda}};$$

$$p_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{b-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right).$$

Формулы достаточно точны уже при $n\lambda > 9$.

Список подобных асимптотических формул для разных законов распределения можно продолжить.

П р и м е р 1 . Игральная кость подбрасывается 210 раз. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков превысит 700.

Р е ш е н и е . Пусть кость бросается n раз и СВ ξ_i — число выпавших очков при i-м бросании. Тогда $\xi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ — сумма выпавших очков. Найдем вероятность $p(\xi_n > 700)$, если $n = 210$. Считая применимой ЦПТ, имеем: распределение СВ ξ_n асимптотически нормальное $N(mn, \sigma\sqrt{n})$ с параметрами:

$$mn = M[\xi_i] \cdot 210, \quad \sigma\sqrt{n} = \sigma[\xi_i]\sqrt{210}.$$

Посчитаем закон распределения и характеристики ДСВ ξ_i :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

, $M[\xi_i] = \dfrac{7}{2},\ D[\xi_i] = \dfrac{35}{12} = \sigma[\xi_i]^2.$

Тогда вероятность $p(\xi_n > 700)$ будем вычислять по формулам для нормального распределения $N(735, \frac{35}{\sqrt{2}})$:

$$p(\xi_n > 700) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{700-735}{35/\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\sqrt{2}\right) = 0,5 + 0,4207 = 0,9207.$$

Таким образом вероятность вычислена.

П р и м е р 2 . 500 раз подбрасывается игральная кость. Какова вероятность того, что частота выпадения шестерки окажется в интервале $(\frac{1}{6}-0,05; \frac{1}{6}+0,05)$?

Р е ш е н и е . Испытания проходят по схеме Бернулли с параметрами $n = 500$, $p = \frac{1}{6}$ — вероятность появления 6. СВ ξ — число появлений 6. Параметры распределения Бернулли позволяют использовать интегральную теорему Лапласа (формула (1.8) на с.1.8):

$$p\left(\frac{1}{6} - 0,05 < \xi < \frac{1}{6} + 0,05\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0,05\sqrt{500}}{\sqrt{0,166 \cdot 0,834}}\right) =$$

$$= 2\Phi\,(2,687) = 2 \cdot 0,4953 = 0,99.$$

П р и м е р 3 . Складывается 10^3 чисел, каждое из которых округлено с точностью до 10^{-3}. Предполагая, что ошибки округления независимы и равномерно распределены в интервале $(-0,5\cdot 10^{-3}; 0,5\cdot 10^{-3})$, найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,998 заключена суммарная ошибка.

Р е ш е н и е. Пусть СВ ξ_i — ошибка округления для i-го числа, тогда $M[\xi_i] = 0$, $D[\xi_i] = \frac{(10^{-3})^2}{12} = \sigma^2$ (см. с.71). Суммарная ошибка $\xi = \sum\limits_{i=1}^{1000} \xi_i$ имеет асимптотически нормальное распределение $N(mn, \sigma\sqrt{n})$ с параметрами

$$mn = 0\ ,\ \sigma\sqrt{n} = \frac{10^{-3}\sqrt{10^3}}{\sqrt{12}} = 0,01\sqrt{\frac{5}{6}} \approx 0,0091.$$

По формуле (2.14) имеем

$$p(|\xi| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,0091}\right) = 0,998\ \Rightarrow\ \frac{\varepsilon}{0,0091} = 3,1\ \Rightarrow\ \varepsilon = 0,2829.$$

П р и м е р 4 . Блок устройства работает исправно в течение времени ξ, после отказа его мгновенно заменяют новым из резерва, содержащего $n-1$ таких блоков (n — велико). Поток отказов простейший с интенсивностью λ. Найти вероятность того, что блок проработает не менее 130 единиц времени, если $\lambda = 0,5$, $n = 50$.

Р е ш е н и е . Пусть СВ ξ_i — время работы блока до i-го отказа. Тогда распределение СВ ξ_i — экспоненциальное $E(\lambda)$ с параметром $\lambda = 0,5$ (см. с.72)

$$M[\xi_i] = \sigma[\xi_i] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,5}.$$

Тогда суммарное время работы $\eta = \sum\limits_{i=1}^{50} \xi_i$ распределяется асимптотически нормально $N(mn, \sigma\sqrt{n})$ с параметрами

$$mn = \frac{1}{0,5}\cdot 50 = 100,\ \sigma\sqrt{n} = \frac{1}{0,5}\sqrt{50} \approx 14,14.$$

Используя формулу (2.20) ($\Phi(+\infty) = \frac{1}{2}$), имеем

$$p(\eta > 130) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{130-100}{14,14}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(2,121\right) = \frac{1}{2} - 0,4821 = 0,017.$$

Вероятность найдена.

2.3.3. *Задачи для самостоятельного решения*

Задача 1. Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью не меньше, чем 0,975, утверждать, что относительная частота выпадения герба попадет в интервал (0,4; 0,6)? Получить искомую оценку: а) используя неравенство Чебышева; б) считая применимой интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Ответ: а) более 1000 раз; б) более 127 раз.

Задача 2. В страховой компании застраховано 10000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0,006. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 12 руб. страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 1000 руб. Найти вероятность того, что по истечении года страховая компания потерпит убыток.

Ответ: $p \approx 0$.

Задача 3. Каждую минуту в бункер, вмещающий не более чем 150 деталей, независимо от других моментов времени поступает случайное число деталей, распределенное по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2$. Через час все находящиеся в бункере детали перегружаются в тележку. В начальный момент бункер пуст. Оценить вероятность того, что за время $T = 100$ ч не произойдет ни одного переполнения бункера.

Ответ: $p = 0,74$.

Задача 4. Пусть R_i — независимые равномерно распределенные на интервале $(0,1)$ случайные величины. Найти асимптотический закон распределения суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} R_i$.

Ответ: $N(\frac{n}{2}, \frac{n}{12})$. В частности,

$$N(0,1) \approx \sum_{i=1}^{n} R_i - 6 \;\Rightarrow\; N(a,\sigma) = \sigma N(0,1) + a \approx \sigma(\sum_{i=1}^{n} R_i - 6) + a.$$

Полученная формула является основной при моделировании на ЭВМ нормальных законов распределения.

2.4. Двумерные СВ

Рассмотрим случайный вектор (ξ, η) как действительную вектор-функцию на ПЭС Ω (см. с.47). Одномерные СВ ξ и η есть компоненты случайного вектора. Для того чтобы исчерпывающе характеризовать случайный вектор, недостаточно знать распределение его компонент, необходимо также изучать их взаимное влияние. Исчерпывающей характеристикой случайного вектора является двумерный (совместный) закон распределения.

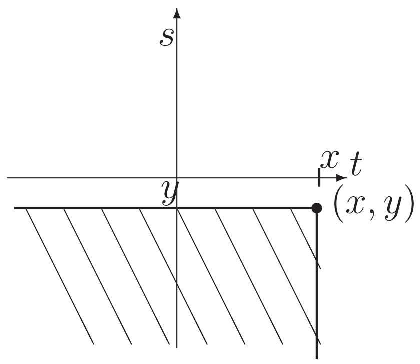


Рис. 2.11. Квадрант с вершиной в точке (x, y)

2.4.1. *Закон распределения дискретного случайного вектора*

Значение *функции распределения* двумерной СВ (ξ, η) (дискретной или непрерывной) в каждой точке (x, y) есть вероятность произведения СС "$\xi < x$" и "$\eta < y$:"

$$F_{\xi\eta}(x, y) = p(\xi < x, \eta < y).$$

Если интерпретировать значение случайного вектора (ξ, η) как случайную точку на плоскости xOy, то $F_{\xi\eta}(x, y)$ есть вероятность попадания случайной точки в квадрант с вершиной в точке (x, y) (рис. 2.11).

Свойства двумерной функции распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$.

1. $0 \le F_{\xi\eta}(x) \le 1$.

2. Если $x_1 < x_2$, то $F_{\xi\eta}(x_1, y) \le F_{\xi\eta}(x_2, y)$; если $y_1 < y_2$, то $F_{\xi\eta}(x, y_1) \le F_{\xi\eta}(x, y_2)$. $F_{\xi\eta}(x, y)$ — неубывающая функция по обоим аргументам.

3. $F_{\xi\eta}(-\infty, y) = F_{\xi\eta}(x, -\infty) = F_{\xi\eta}(-\infty, -\infty) = 0$; $F_{\xi\eta}(+\infty, +\infty) = 1$.

4. Функции распределения компонент выражаются через функцию совместного распределения:

$$F_{\xi\eta}(x, +\infty) = F_{\xi}(x), \;\; F_{\xi\eta}(+\infty, y) = F_{\eta}(y).$$

5. $F_{\xi\eta}(x, y)$ — функция, непрерывная слева по любому аргументу:

$$F_{\xi\eta}(x - 0, y) = F_{\xi\eta}(x, y); \;\; F_{\xi\eta}(x, y - 0) = F_{\xi\eta}(x, y).$$

6. Вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в прямоугольник $D:$ $a \le x \le b; c \le y \le d$ со сторонами, параллельными осям координат (рис.2.12):

$$p((\xi, \eta) \in D) = F_{\xi\eta}(b, d) - F_{\xi\eta}(a, d) - F_{\xi\eta}(b, c) + F_{\xi\eta}(a, c).$$

Так же как для случая одномерной СВ (см. с. 48), для случайного вектора определим функцию распределения вероятностей.

Пусть (ξ, η) — *дискретный случайный вектор*, т. е. его множество значений конечно или счетно. Тогда набор значений вектора $\{(x_i, y_j)\}$ с их вероятностями

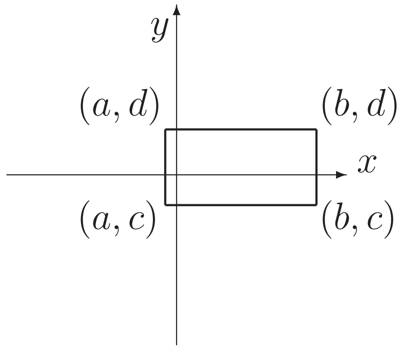


Рис. 2.12. Прямоугольник D

$p(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}$ есть одна из форм закона распределения. Обычно для конечного множества значений ($1 \le i \le k$, $1 \le j \le m$) такое распределение вероятностей оформляется в таблицу — *матрицу распределения:*

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_k	p_{k1}	p_{k2}	$\dots$	p_{km}

$$, \quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

По матрице распределения можно вычислить функцию распределения:

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \sum_{x_i < x}\sum_{y_j < y} p_{ij}. \tag{2.22}$$

и законы распределения составляющих — СВ ξ и η

$$p(\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \quad p(\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}. \tag{2.23}$$

Пример. Два стрелка независимо друг от друга делают по два выстрела каждый по своей мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле для первого и второго стрелков $p_1 = 0,7$ и $p_2 = 0,4$ соответственно. Найти матрицу распределения и функцию распределения случайного вектора (ξ, η), где ξ — количество попаданий в мишени первого стрелка, а η — в мишени второго. Найти законы распределения составляющих.

Решение. В первую очередь найдем множество значений СВ ξ и η: число возможных попаданий в каждой мишени $\{0, 1, 2\}$. Тогда случайный вектор (ξ, η) принимает 9 значений (x_i, y_j), $0 \le x_i, y_j \le 2$. Вычислим вероятность одного из них:

$$p(\xi = 0, \eta = 0) = (1 - p_1)^2(1 - p_2)^2 = 0,3^2 \cdot 0,6^2 = 0,0324.$$

Заметим, что при вычислении вероятности произведения СС $\xi = 0$ и $\eta = 0$ мы пользовались независимостью этих событий. Понятно, что вероятность каждого из 9 значений случайного вектора будет вычисляться аналогично. Например, учитывая, что первый стрелок может попасть первым или вторым выстрелом, получим

$$p(\xi = 1, \eta = 0) = p_1(1-p_1)p_2^2 + (1-p_1)p_1p_2^2 = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,6^2 \cdot 2 = 0,1512.$$

Сведем вычисления в таблицу распределения

$\xi\backslash\eta$	0	1	2
0	0,0324	0,0432	0,0144
1	0,1512	0,2016	0,0672
2	0,1764	0,2352	0,0784

$$, \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 1.$$

По таблице можно сразу найти законы распределения составляющих: вероятности значений ξ есть построчные суммы чисел p_{ij}, а для η — суммы по столбцам (см. формулу (2.23)):

$\xi\backslash\eta$	0	1	2	ξ
0	0,0324	0,0432	0,0144	0,09
1	0,1512	0,2016	0,0672	0,42
2	0,1764	0,2352	0,0784	0,49
η	0,36	0,48	0,16	1

. (2.24)

Заметим, что в данном случае в силу независимости соответствующих событий $p_{ij} = p(\xi = x_i)p(\eta = y_j)$ для всех i, j. Например, $0,42 \cdot 0,48 = 0,2016$. Найдем функцию распределения — функцию накопленных вероятностей. Значение функции $F_{\xi\eta}(x, y)$ зависит от того, где находятся аргументы x, y по отношению к числам 0,1,2. Например, по формуле (2.22) считаем вероятность попадания в соответствующий квадрант (см. рис. 2.13) и имеем

$$\text{если } x \le 0 \text{ или } y \le 0, \text{ то } F_{\xi\eta}(x, y) = 0;$$

$$\text{если } 1 < x \le 2 \text{ и } 0 < y \le 1, \text{ то } F_{\xi\eta}(x, y) = p((\xi = 0, \eta = 0) \text{или} (\xi = 1, \eta = 0)) =$$

$$= p_{11} + p_{21} = 0,0324 + 0,1512 = 0,1836.$$

Продолжая вычисления таким же образом, получим ступенчатую функцию

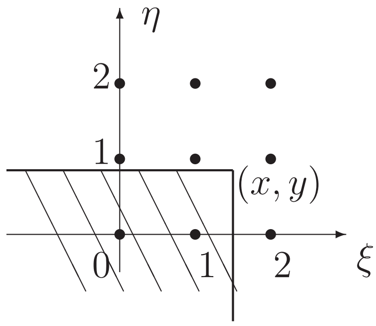


Рис. 2.13. Квадрант с вершиной (x, y)

накопленных вероятностей $F_{\xi\eta}(x, y)$, задаваемую таблицей:

$x \backslash y$	$y \leq 0$	$0 < y \leq 1$	$1 < y \leq 2$	$y > 2$
$x \leq 0$	0	0	0	0
$0 < x \leq 1$	0	0,0324	0,0756	0,09
$1 < x \leq 2$	0	0,1836	0,4284	0,51
$x > 2$	0	0,36	0,84	1

.

Задача решена.

2.4.2. *Закон распределения непрерывного случайного вектора*

(ξ, η) — *непрерывный случайный вектор*, если его функция распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$ непрерывна, дифференцируема по каждому из аргументов и существует вторая производная $\frac{\partial^2 F_{\xi\eta}}{\partial x \partial y}$, непрерывная всюду за исключением конечного числа кривых. Компоненты ξ и η — непрерывные СВ.

Функция плотности совместного распределения вероятностей (плотность вероятностей) двумерной непрерывной СВ (ξ, η) есть

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi\eta}}{\partial x \partial y}. \tag{2.25}$$

График функции плотности есть поверхность, которая называется *поверхностью распределения.*

Свойства двумерной плотности распределения $f_{\xi\eta}(x, y)$

1. Функция плотности неотрицательна и удовлетворяет условию нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x, y)\, dxdy = 1.$$

2. Вероятность попадания значения СВ в область D

$$p((\xi,\eta)\in D)=\iint\limits_D f_{\xi\eta}(x,y)\ dxdy.$$

3. Вычисление совместной функции распределения и функций распределения компонент:

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(t,s)\ dtds,\ t\in(-\infty,x),\ s\in(-\infty,y);$$

$$F_{\xi}(x)=F_{\xi\eta}(x,+\infty)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(t,s)\ dtds,\ t\in(-\infty,x),s\in(-\infty,+\infty);$$

$$F_{\eta}(y)=F_{\xi\eta}(+\infty,y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(t,s)\ dtds,\ s\in(-\infty,y),t\in(-\infty,+\infty).$$

4. Вычисление функций плотности распределения компонент

$$f_{\xi}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\ dy\ ;\ f_{\eta}(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\ dx. \tag{2.26}$$

П р и м е р 1 . В круге $D:\ x^2+y^2\le R^2$ — двумерная плотность вероятности задана формулой $f_{\xi\eta}(x,y)=c(R-\sqrt{x^2+y^2})$, а вне круга $f_{\xi\eta}(x,y)=0$. Найти: 1) постоянную c; 2) вероятность попадания случайной точки (ξ,η) в круг D_1 радиуса $R/2$ с центром в начале координат; 3) плотности распределения компонент.

Р е ш е н и е . 1). Из условия нормировки (см. свойство плотности 1 на с.93) найдем константу c :

$$1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\ dxdy=\iint\limits_D c(R-\sqrt{x^2+y^2})\ dxdy\ ,$$

используем полярную систему координат

$$\iint\limits_D (R-\sqrt{x^2+y^2})\ dxdy=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{R}(R-\rho)\rho\ d\rho=\frac{\pi R^3}{3}\ \Rightarrow\ c=\frac{3}{\pi R^3}\ .$$

2). По свойству плотности 2 на с.93 имеем

$$p((\xi,\eta)\in D_1)=\frac{3}{\pi R^3}\iint\limits_{D_1}(R-\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy=$$

$$=\frac{3}{\pi R^3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R/2}(R-\rho)\rho\,d\rho=\frac{3}{\pi R^3}\cdot\frac{\pi R^3}{6}=\frac{1}{2}\,.$$

3). По свойству плотности 4 на с.93

$$f_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi\eta}(x,y)\,dy\,.$$

При вычислении интеграла важно, где на плоскости xOy находится точка (x,y) :

$$(x,y)\in D\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-R\le x\le R\\ -\sqrt{R^2-x^2}\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-R\le y\le R\\ -\sqrt{R^2-y^2}\le x\le\sqrt{R^2-y^2}\end{array}\right.$$

Учитывая эти неравенства,задающие область D, имеем

$$f_\xi(x)=\left\{\begin{array}{cc}0, & x\notin[-R,R]\\ \frac{3}{\pi R^3}\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}(R-\sqrt{x^2+y^2})\,dy, & x\in[-R,R]\end{array}\right..$$

Вычислим интеграл

$$\frac{3}{\pi R^3}\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}(R-\sqrt{x^2+y^2})\,dy=$$

$$=\frac{3}{\pi R^3}\left(2R\sqrt{R^2-x^2}-\frac{y}{2}\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{2}\ln(\sqrt{x^2+y^2}+y)\right)\Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=\frac{3}{\pi R^3}\left(R\sqrt{R^2-x^2}-\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2-x^2}}{R-\sqrt{R^2-x^2}}\right)\right)\,.$$

В силу симметрии вхождения переменных x,y в формулу функции $f_{\xi\eta}(x,y)$ можно записать не только найденную плотность $f_\xi(x)$, но и $f_\eta(y)$:

$$f_\xi(x)=\left\{\begin{array}{cc}0, & x\notin[-R,R]\\ \frac{3}{\pi R^3}\left(R\sqrt{R^2-x^2}-\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2-x^2}}{R-\sqrt{R^2-x^2}}\right)\right), & x\in[-R,R]\end{array}\right.,$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [-R,R] \\ \frac{3}{\pi R^3}\left(R\sqrt{R^2-y^2} - \frac{y^2}{2}\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2-y^2}}{R-\sqrt{R^2-y^2}}\right)\right), & y \in [-R,R] \end{cases} .$$

Задача решена.

Говорят, что случайный вектор (ξ,η) непрерывного типа распределен *равномерно в области* Ω плоскости xOy, если плотность распределения вероятностей такого вектора имеет вид:

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin \Omega \\ \frac{1}{S(\Omega)}, & (x,y) \in \Omega \end{cases} ,$$

где $S(\Omega)$ — площадь Ω. Для равномерно распределенных в области Ω векторов верна формула

$$p((x,y) \in D) = \frac{S(D \cap \Omega)}{S(\Omega)} .$$

Эта формула повторяет определение геометрической вероятности (см. с.20). Но теперь понятно, что она применяется только для математической модели с "равновозможными" значениями вектора (x,y).

П р и м е р 2 . Случайный вектор (ξ,η) распределен равномерно внутри квадрата

$$\Omega = \{(x,y):\ -\frac{a}{2} < x, y < \frac{a}{2}\} .$$

Найти: 1) законы распределения компонент; 2) совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x,y)$.

Р е ш е н и е . 1). Совместная плотность равномерного распределения в заданном квадрате Ω имеет вид:

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \frac{a}{2} \text{ или } |y| \geq \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a^2}, & |x| < \frac{a}{2} \text{ и } |y| < \frac{a}{2} \end{cases} .$$

Плотности составляющих найдем по свойству 4 (с.93)

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\ dy\ = \begin{cases} 0, & |x| \geq \frac{a}{2} \\ \int\limits_{-a/2}^{a/2} \frac{dy}{a^2} = \frac{1}{a}, & |x| < \frac{a}{2} \end{cases} ,$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & |y| \geq \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a}, & |y| < \frac{a}{2} \end{cases} .$$

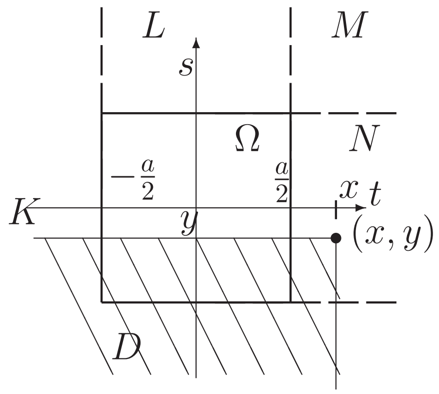


Рис. 2.14. К примеру 2

Функции распределения компонент находим по свойству 3 (с.51)

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\ dt = \begin{cases} 0, & x \le -\frac{a}{2} \\ \int\limits_{-a/2}^{x} \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}(x + \frac{a}{2}), & -\frac{a}{2} < x \le \frac{a}{2} \\ 1, & x > \frac{a}{2} \end{cases},$$

$$F_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} f_\eta(t)\ dt = \begin{cases} 0, & y \le -\frac{a}{2} \\ \frac{1}{a}(y + \frac{a}{2}), & -\frac{a}{2} < y \le \frac{a}{2} \\ 1, & y > \frac{a}{2} \end{cases}.$$

2). Найдем совместную функцию распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$. Поскольку применение формулы из свойства 3 на с.93 зависит от того, где находится точка (x, y), рассмотрим пять областей на плоскости tOs (рис.2.14):

$$K : \left[\begin{array}{l} t \le -\frac{a}{2} \\ s \le -\frac{a}{2} \end{array} \right., \quad L : \left\{ \begin{array}{c} -\frac{a}{2} < t \le \frac{a}{2} \\ s > \frac{a}{2} \end{array} \right., \quad M : \left\{ \begin{array}{c} t > \frac{a}{2} \\ s > \frac{a}{2} \end{array} \right.,$$

$$N : \left\{ \begin{array}{c} t > \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} < s \le \frac{a}{2} \end{array} \right., \quad \Omega : \left\{ \begin{array}{c} -\frac{a}{2} < t < \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} < s < \frac{a}{2} \end{array} \right..$$

Формула из свойства 3 на с.93 выглядит следующим образом:

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi\eta}(t, s)\ dtds = \iint\limits_{D} f_{\xi\eta}(t, s)\ dtds,\ t \in (-\infty, x),\ s \in (-\infty, y),$$

где D — квадрант с вершиной в точке (x, y) (на рис. 2.14 заштрихованная область). Рассмотрим случай, изображенный на рис. 2.14: точка (x, y) принадлежит области N. Тогда область интегрирования D представим в виде объединения областей: $D = (D \cap \Omega) \cup (D \setminus \Omega)$. Но функция плотности $f_{\xi\eta}(t, s)$ принимает ненулевые значения только внутри Ω, т. е. в $D \cap \Omega : \left\{ \begin{array}{l} -\frac{a}{2} < t < \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} < s < y \end{array} \right.$, поэтому

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \iint\limits_{D} f_{\xi\eta}(t,s)\ dtds = \iint\limits_{D\cap\Omega} \frac{1}{a^2}\ dtds = \int\limits_{-a/2}^{a/2}\int\limits_{-a/2}^{y} \frac{1}{a^2}\ dtds = \frac{1}{a}(y + \frac{a}{2}).$$

Подобным образом рассуждаем в оставшихся четырех случаях расположения точки (x,y) :

$$\text{если } (x,y) \in K, \text{то } D \cap \Omega = \emptyset \ \Rightarrow\ F_{\xi\eta}(x,y) = \iint\limits_{D} f_{\xi\eta}(t,s)\ dtds = 0;$$

$$\text{если } (x,y) \in L, \text{то } D \cap \Omega : \left\{ \begin{array}{l} -\frac{a}{2} < t < x \\ -\frac{a}{2} < s < \frac{a}{2} \end{array} \right. ,$$

$$\text{то } \ F_{\xi\eta}(x,y) = \iint\limits_{D} f_{\xi\eta}(t,s)\ dtds = \int\limits_{-a/2}^{x}\int\limits_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a^2}\ dtds = \frac{1}{a}(x + \frac{a}{2});$$

$$\text{если } (x,y) \in M, \text{то } D \cap \Omega : \left\{ \begin{array}{l} -\frac{a}{2} < t < \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} < s < \frac{a}{2} \end{array} \right. ,$$

$$\text{то } \ F_{\xi\eta}(x,y) = \iint\limits_{D} f_{\xi\eta}(t,s)\ dtds = \int\limits_{-a/2}^{a/2}\int\limits_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a^2}\ dtds = 1;$$

$$\text{если } (x,y) \in \Omega, \text{то } D \cap \Omega : \left\{ \begin{array}{l} -\frac{a}{2} < t < x \\ -\frac{a}{2} < s < y \end{array} \right. ,$$

$$\text{то } \ F_{\xi\eta}(x,y) = \iint\limits_{D} f_{\xi\eta}(t,s)\ dtds = \int\limits_{-a/2}^{x}\int\limits_{-a/2}^{y} \frac{1}{a^2}\ dtds = \frac{1}{a^2}(x + \frac{a}{2})(y + \frac{a}{2}).$$

Таким образом получена совместная функция распределения

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & x \le -\frac{a}{2} \ \text{ или } \ y \le -\frac{a}{2} \\ \frac{1}{a}(x + \frac{a}{2}), & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}\ ,\ y > \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a}(y + \frac{a}{2}), & -\frac{a}{2} < y < \frac{a}{2}\ ,\ x > \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a^2}(x + \frac{a}{2})(y + \frac{a}{2}), & -\frac{a}{2} < y \le \frac{a}{2}\ ,\ -\frac{a}{2} < x \le \frac{a}{2} \\ 1, & x > \frac{a}{2}\ ,\ y > \frac{a}{2} \end{array} \right. .$$

Задача решена.

2.4.3. *Условные законы распределения случайных величин*

Если (ξ, η) — дискретный случайный вектор, то *условным распределением (условным законом)* случайной величины ξ при условии, что СВ η приняла значение y_j, называется соответствие между значениями $\xi = x_i$ и отношениями $p(\xi = x_i, \eta = y_j)/p(\eta = y_j)$.

Если закон распределения случайного вектора задан таблицей

$$\begin{array}{|c|cccc|}\hline \xi\backslash\eta & y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ \hline x_1 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ x_2 & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k & p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{km} \\ \hline \end{array}\;, \quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,$$

то $p(\eta = y_j) = \sum\limits_{s=1}^{k} p_{sj} = p_{\cdot j}$, т. е. сумма вероятностей, стоящих в j-м столбце, и $p(\xi = x_i, \eta = y_j)/p(\eta = y_j) = p_{ij}/p_{\cdot j}$. Условный закон распределения ξ при условии $\eta = y_j$ можно оформить таблицей (также и для условного закона $\eta|\xi = x_i$)

$$\begin{array}{|c|cccc|}\hline \xi|\eta = y_j & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \hline p_i & p_1 & p_2 & \dots & p_k \\ \hline \end{array}\;, \; p_i = p(\xi = x_i|\eta = y_j) = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{s=1}^{k} p_{sj}}, \tag{2.27}$$

$$\begin{array}{|c|cccc|}\hline \eta|\xi = x_i & y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ \hline p_j & p_1 & p_2 & \dots & p_m \\ \hline \end{array}\;, \; p_j = p(\eta = y_j|\xi = x_i) = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{s=1}^{m} p_{is}}.$$

Если множество возможных значений ДСВ η бесконечно, то $p_{\cdot j}$ есть сумма ряда: $p(\eta = y_j) = \sum\limits_{s=1}^{\infty} p_{sj} = p_{\cdot j}$. В общем случае будем писать $\sum\limits_{s} p_{sj}$.

Если (ξ, η) — непрерывный случайный вектор, то *условной плотностью распределениия* случайной величины ξ при условии, что СВ η приняла значение y, называется отношение

$$f_\xi(x|\eta = y) = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{f_\eta(y)}, \; f_\eta(y) > 0. \tag{2.28}$$

Учитывая формулу для вычисления плотности компонент по совместной плотности случайного вектора (см. свойство 4 на с. 93), получим

$$f_\xi(x|\eta = y) = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x, y)\, dx}.$$

Переписывая формулы (2.27) и (2.28), получим аналог теоремы умножения случайных событий — *формулу умножения плотностей (распределений вероятностей):*

$$f_{\xi\eta}(x,y) = f_\xi(x|\eta=y)f_\eta(y),\ (\xi,\eta) - \text{НСВ}; \tag{2.29}$$

$$p(\xi=x_i,\eta=y_j) = p(\xi=x_i|\eta=y_j)p(y_j),\ (\xi,\eta) - \text{ДСВ}.$$

Комбинируя формулы (2.23), (2.26), (2.29), получим *формулу полной вероятности:*

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)\ dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x|\eta=y)f_\eta(y)\ dy,\ (\xi,\eta) - \text{НСВ}; \tag{2.30}$$

$$p(\xi=x_i) = \sum_j p(\xi=x_i,\eta=y_j) = \sum_j p(\xi=x_i|\eta=y_j)p(y_j),\ (\xi,\eta) - \text{ДСВ}.$$

Свойства условных законов распределения

ДСВ	НСВ
Неотрицательность $p(\xi=x_i\|\eta=y_j)\ge 0, \forall x_i(y_j)$	$f_\xi(x\|\eta=y)\ge 0$
Условие нормировки $\sum\limits_i p(\xi=x_i\|\eta=y_j) = 1, \forall y_j$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x\|\eta=y)\ dx = 1,\ f_\eta(y)>0$
Вероятность попадания в интервал $p(a<\xi\le b\|\eta=y_j) = \sum\limits_{a<x_i\le b} p(x_i\|\eta=y_j)$	$p(a<\xi\le b\|\eta=y) = \int\limits_a^b f_\xi(x\|\eta=y)\ dx$

Заметим, что перечисленные свойства повторяют свойства одномерных законов распределения (см. с. 51). Функция распределения для одномерных НСВ определяется как первообразная от функции плотности. Аналогично поступим для условных законов.

Если (ξ,η) — непрерывный случайный вектор, то *условная функциия распределения* случайной величины ξ при условии, что СВ η приняла значение y, есть

$$F_\xi(x|\eta=y) = p(\xi<x|\eta=y) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t|\eta=y)\ dt,\ f_\eta(y)>0.$$

В частности, во всех точках непрерывности условной плотности верно равенство

$$\frac{\partial F_\xi(x|\eta=y)}{\partial x} = f_\xi(x|\eta=y).$$

П р и м е р 1 . Закон распределения дискретного случайного вектора (ξ, η) задан таблицей

$\eta \backslash \xi$	5	10	15	20
0	0.1	0.2	0.1	0
5	0	0.1	0.1	0.05
10	0	0.1	0.2	0.05

Найти условный закон распределения величины ξ при условии $\eta = 5$.

Р е ш е н и е . Для вычислений воспользуемся формулами (2.27):

$$p(\eta = 5) = \sum_{s=1}^{4} p_{2s} = 0 + 0.1 + 0.1 + 0.05 = 0.25 \;\Rightarrow$$

$$p(\xi = 5|\eta = 5) = \frac{p(\xi = 5, \eta = 5)}{p(\eta = 5)} = \frac{0}{0.25} = 0,$$

$$p(\xi = 10|\eta = 5) = \frac{p(\xi = 10, \eta = 5)}{p(\eta = 5)} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4,$$

$$p(\xi = 15|\eta = 5) = \frac{p(\xi = 15, \eta = 5)}{p(\eta = 5)} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4,$$

$$p(\xi = 20|\eta = 5) = \frac{p(\xi = 20, \eta = 5)}{p(\eta = 5)} = \frac{0.05}{0.25} = 0.2\ .$$

Таким образом, условный закон, записанный в виде таблицы, имеет вид (значение $\xi = 5$ невозможно):

x_i	10	15	20
$p\left(\xi = x_i \vert \eta = 5\right)$	0.4	0.4	0.2

Задача решена.

П р и м е р 2 . Задана плотность совместного распределения непрерывного случайного вектора (ξ, η)

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{(-1/2)(x^2+2xy+5y^2)}.$$

Найти условные плотности распределения составляющих.

Р е ш е н и е . Для того чтобы воспользоваться формулой (2.28), нужно знать безусловные плотности составляющих. Вычислим их по формуле (2.26):

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x, y)\; dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-1/2)(x^2+2xy+5y^2)}\; dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-x^2/2} e^{x^2/10} \sqrt{0.4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{0.4}y + \sqrt{0.4}x)^2} \, d(\sqrt{0.4}y + \sqrt{0.4}x).$$

Учитывая значение интеграла Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dt = \sqrt{\pi}$, получим

$$f_\xi(x) = \sqrt{\frac{0.4}{\pi}} \, e^{-0.4x^2}.$$

Аналогичными вычислениями получим плотность составляющей η:

$$f_\eta(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, e^{-2x^2}.$$

Теперь по определению находим условные плотности:

$$f_\xi(x|\eta = y) = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{f_\eta(y)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-0.5(x+y)^2},$$

$$f_\eta(y|\xi = x) = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{f_\xi(x)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-0.1(x+5y)^2}.$$

Задача решена.

В следующей задаче рассмотрим пример случайного вектора, одна из компонент которого — ДСВ, а другая — НСВ.

Пример 3. Пусть относительно случайного вектора (ξ, λ) известно, что ДСВ ξ — количество обанкротившихся предприятий в единицу времени — распределена по закону Пуассона с параметром λ, который сам является непрерывной СВ, распределенной по показательному закону с параметром μ (μ неслучайный параметр). Требуется найти безусловный закон распределения составляющей ξ.

Решение. Заметим сначала, что при условии фиксированного значения СВ $\lambda = y$ известен закон распределения ДСВ ξ, а безусловная плотность НСВ λ задана, т. е.

$$p(\xi = k|\lambda = y) = \frac{y^k}{k!} \, e^{-y}, \; k = 0, 1, \ldots, \; f_\lambda(y) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & y \le 0 \\ \mu \, e^{-\mu y}, & y > 0 \end{array} \right. .$$

Для вычисления вероятностей используем формулу Пуассона (см. с. 66), формулу плотности показательного распределения см. на с. 72. Теперь воспользуемся немного модифицированной формой формулы полной вероятности (2.30) для вектора смешанного типа (легко видеть, что вид формулы универсален вне зависимости от типа СВ), интеграл считаем по частям

$$p(\xi = k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi = k|\lambda = y) f_\lambda(y)\, dy = \int_{0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\, e^{-y}\mu\, e^{-\mu y}\, dy =$$

$$= \frac{\mu}{(1+\mu)^{k+1}} = pq^k,\ k = 0, 1, \ldots,\ p = \frac{\mu}{(1+\mu)},\ q = \frac{1}{(1+\mu)}.$$

Полученный безусловный закон распределения ДСВ ξ

$$p(\xi = k) = pq^k,\ k = 0, 1, \ldots,\ q = 1 - p$$

есть геометрическое распределение (см. с. 67). Задача решена.

2.4.4. *Зависимость случайных величин*

Ранее, на с. 59, было дано определение независимых СВ на языке случайных событий: СВ $\xi,\ \eta$ независимы, если все связанные с ними СС независимы в совокупности. Напомним также, что СС A и B независимы, если $p(AB) = p(A)p(B)$ или $p(A|B) = p(A)$. Теперь, имея аналог теоремы произведения — формулу произведения плотностей (2.29) (см. с. 100) и аналог условной вероятности — условный закон распределения (условная плотность), сформулируем признаки независимости СВ.

Теорема 2.4 (признаки независимости СВ) . *Случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда для любых x и y выполнено любое из равенств*

$$F_{\xi\eta}(x, y) = F_\xi(x) F_\eta(y) \tag{2.31}$$

$$\begin{gathered} f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y), \quad \textit{если}\ \ (\xi, \eta) - \textit{НСВ};\\ p(\xi = x_i, \eta = y_j) = p(\xi = x_i) p(\eta = y_j), \quad \textit{если}\ \ (\xi, \eta) - \textit{ДСВ}; \end{gathered} \tag{2.32}$$

$$F_\xi(x|\eta = y) = F_\xi(x); \tag{2.33}$$

$$F_\eta(y|\xi = x) = F_\eta(y); \tag{2.34}$$

$$\begin{gathered} f_\xi(x|\eta = y) = f_\xi(x), \quad \textit{если}\ \ (\xi, \eta) - \textit{НСВ};\\ p(\xi = x_i|\eta = y_j) = p(\xi = x_i), \quad \textit{если}\ \ (\xi, \eta) - \textit{ДСВ}; \end{gathered} \tag{2.35}$$

$$\begin{gathered} f_\eta(y|\xi = x) = f_\eta(y), \quad \textit{если}\ \ (\xi, \eta) - \textit{НСВ};\\ p(\eta = y_j|\eta = x_i) = p(\eta = y_j), \quad \textit{если}\ \ (\xi, \eta) - \textit{ДСВ}. \end{gathered} \tag{2.36}$$

П р и м е р 1 . Определить зависимы или независимы компоненты случайных векторов из всех рассмотренных примеров раздела "Двумерные СВ" :
1) пример на с.91 ; 2) пример 1 на с.94; 3) пример 2 на с.96; 4) пример 1 на с.101; 5) пример 2 на с.101; 6) пример 3 на с.102.

Р е ш е н и е . 1). По условию постановки эксперимента, два стрелка стреляют независимо. СВ ξ — количество попаданий 1-го, а СВ η — количество попаданий 2-го стрелка. Понятно, что всякое СС, связанное с СВ ξ, не зависит от СС, связанного с η. Значит, по определению, СВ ξ и η независимы. Можно подтвердить этот факт и по признаку (2.32) из теоремы 2.4, т.к. безусловные законы распределения составляющих вычислены в примере. Действительно, например (см. вторую строку и третий столбец, а также первую строку и второй столбец таблицы (2.24) на с.92)

$$p(\xi = 1, \eta = 2) = 0.0672 = 0.42 \cdot 0.16 = p(\xi = 1)p(\eta = 2),$$

$$p(\xi = 0, \eta = 1) = 0.0432 = 0.09 \cdot 0.48 = p(\xi = 0)p(\eta = 1) \quad \text{т.д.}$$

По таблице (2.24) (см. с.92) проводим проверку равенства каждого элемента матрицы распределения (p_{ij}) произведению сумм элементов матрицы, стоящих в соответствующей строке ($p_{i\cdot} = \sum\limits_s p_{is}$) и столбце ($p_{\cdot j} = \sum\limits_s p_{sj}$). В нашем случае имеем $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$ для любых i, j, что гарантирует независимость компонент.

2). В примере 1 на с.94 по двумерной плотности вычислены плотности составляющих. Полученные формулы достаточно громоздки, однако очевидно, что $f_{\xi\eta}(x, y) \neq f_\xi(x)f_\eta(y)$, т. е. признак (2.32) нарушается и СВ ξ, η зависимы.

3). В примере 2 на с.96 рассматривается равномерно распределенный в квадрате $\Omega = \{(x, y) :\ -\frac{a}{2} < x, y < \frac{a}{2}\}$ вектор (ξ, η) с плотностью

$$f_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \frac{a}{2} \text{ или } |y| \geq \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a^2}, & |x| < \frac{a}{2} \text{ и } |y| < \frac{a}{2} \end{cases} .$$

В примере вычислены плотности составляющих

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a}, & |x| < \frac{a}{2} \end{cases} ,$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & |y| \geq \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a}, & |y| < \frac{a}{2} \end{cases} .$$

Рассмотрим произведение $f_\xi(x)f_\eta(y)$. Понятно, что оно равно нулю во всех точках $(x, y) \notin \Omega$. Если же $(x, y) \in \Omega$, то

$$f_\xi(x)f_\eta(y) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} = f_{\xi\eta}(x, y).$$

По признаку (2.32) СВ ξ, η независимы. Заметим, что можно было заняться проверкой признака (2.31), поскольку вычислены функции распределения составляющих и функция совместного распределения, но это было бы более громоздко.

4). Для ДСВ (ξ, η) из пример 1 на с.101 вычислен условный закон распределения СВ η при условии $\xi = 5$. Покажем, что он не совпадает с безусловным распределением СВ η. Действительно,

$$p(\eta = 5|\xi = 5) = 0 \neq p(\eta = 5), \text{ где}$$

$$p(\eta = 5) = p(\eta = 5|\xi = 0) + p(\eta = 5|\xi = 5) + p(\eta = 5|\xi = 10) = 0.1 + 0 + 0 = 0.1\ .$$

По признаку (2.36) СВ ξ, η зависимы.

5). В примере 2 на с.101 для непрерывного вектора (ξ, η) вычислены условные и безусловные плотности компонент. Например

$$f_\xi(x) = \sqrt{\frac{0.4}{\pi}}\; e^{-0.4x^2}\ ,\ f_\xi(x|\eta = y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{-0.5(x+y)^2}.$$

Понятно, что нарушается признак независимости (2.35): $f_\xi(x) \neq f_\xi(x|\eta = y)$, т. е. СВ ξ, η зависимы.

6). В примере 3 на с.101 также нет равенства условного и безусловного распределений случайной величины ξ. Значит СВ ξ, η зависимы.

Задача решена.

★ Наряду с совместным законом распределения (это плотность или функция распределения) исчерпывающей характеристикой случайного вектора (ξ, η) может служить пара — безусловный закон компоненты ξ и условный закон компоненты η. По двум безусловным законам распределения компонент (например по $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$) совместный закон распределения может быть восстановлен только, если ξ и η независимы.

2.4.5. *Сумма и произведение случайных величин*

В разделе 2.1.3 на с.53 даны определения функций случайных величин и рассмотрены их законы распределения. В частности, в замечании к примеру 2 на с.56 дан алгоритм нахождения законов распределения суммы и произведения $\zeta = \xi + \eta$ и $\chi = \xi \cdot \eta$, если ξ и η — ДСВ. Теперь, имея возможность использовать совместный закон распределения вектора (ξ, η)

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_k	p_{k1}	p_{k2}	$\dots$	p_{km}

$$,\ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,$$

можно вычислять вероятности значений ДСВ ζ и χ по формулам:

$$p(\zeta = z_k = x_{i'} + y_{j'}) = \sum_{i'j'} p_{i'j'}, \quad p(\chi = h_l = x_{i'} \cdot y_{j'}) = \sum_{i'j'} p_{i'j'}.$$

Вычислим математическое ожидание СВ ζ и χ:

$$M[\zeta = \xi + \eta] = \sum_k z_k p(\zeta = z_k) = \sum_{ij} (x_i + y_j) p_{ij},$$

$$M[\chi = \xi \cdot \eta] = \sum_l h_l p(\zeta = h_l) = \sum_{ij} (x_i \cdot y_j) p_{ij}.$$

Таким образом, математические ожидания, а также законы распределения суммы и произведения ДСВ можно вычислить по матрице совместного распределения СВ (ξ, η).

Теперь пусть ξ и η — НСВ, для которых известна совместная плотность распределения $f_{\xi\eta}(x, y)$. Вычисление законов распределения суммы $\zeta = \xi + \eta$ и произведения $\chi = \xi \cdot \eta$ начнем с вычисления функций распределения F_ζ, F_χ (как рекомендовано в разделе 2.1.3 на с.53):

$$F_\zeta(z) = p(\zeta < z) = p(\xi + \eta < z), \quad F_\chi(h) = p(\chi < h) = p(\xi \cdot \eta < h).$$

Заметим, что $\xi + \eta < z$ ($\xi \cdot \eta < h$) тогда и только тогда, когда данные СВ принимают значения $\xi = x$, $\eta = y$, удовлетворяющие неравенству $x + y < z$ ($x \cdot y < h$). На плоскости xOy это неравенство задает область G_z (G_h) для каждого фиксированного z (h) (см. заштрихованные области на рис.2.15). Но тогда (по свойству 2 на с.93) имеем

$$F_\zeta(z) = \iint\limits_{G_z} f_{\xi,\eta}(x, y)\, dx\, dy, \quad F_\chi(h) = \iint\limits_{G_h} f_{\xi,\eta}(x, y)\, dx\, dy. \tag{2.37}$$

Поскольку

$$(x, y) \in G_z \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < z - x \end{cases}, \; (x, y) \in G_h \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\infty < x < 0 \\ \frac{h}{x} < y < \infty \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < \infty \\ -\infty < y < \frac{h}{x} \end{cases} \end{array} \right.,$$

расстановка пределов в двойных интегралах следующая:

$$F_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{\xi\eta}(x, y)\, dy, \;\; F_\chi(h) = \int\limits_{-\infty}^{0} dx \int\limits_{h/x}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)\, dy + \int\limits_{0}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{h/x} f_{\xi\eta}(x, y)\, dy.$$

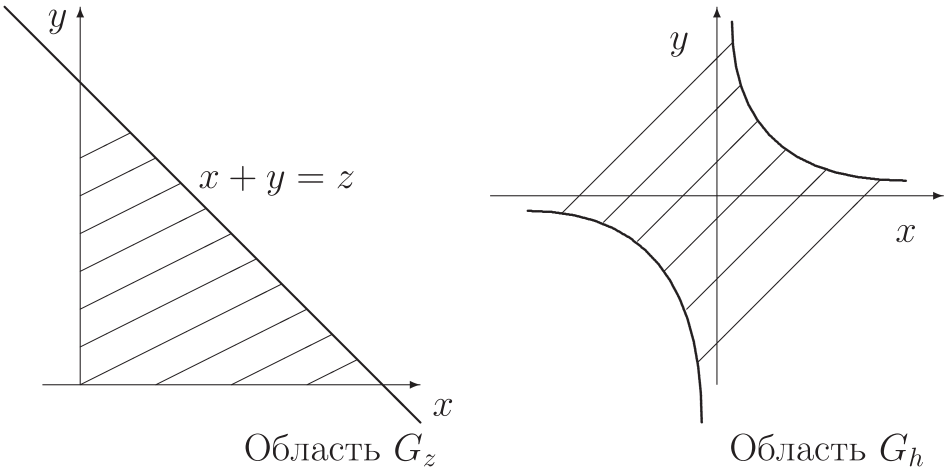


Рис. 2.15. Области интегрирования

Функции распределения $F_\zeta(z)$, $F_\chi(h)$ найдены и выражены через $f_{\xi\eta}(x,y)$. Найдем плотности суммы ζ и произведения χ. Для этого продифференцируем функции распределения, учитывая правило дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом:

$$f_\zeta(z) = \frac{dF_\zeta(z)}{dz} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x, z-x)\,dx\ ,$$

$$f_\chi(h) = \frac{dF_\chi(h)}{dh} = -\int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot f_{\xi\eta}(x, h/x)\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} x \cdot f_{\xi\eta}(x, h/x)\,dx.$$

Таким образом, по совместной плотности случайного вектора (ξ, η) найдены законы распределения СВ $\zeta = \xi + \eta$, $\chi = \xi \cdot \eta$.

З а м е ч а н и е. Если СВ ξ и η независимы, то $f_{\xi\eta}(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$ и формула плотности суммы СВ $\zeta = \xi + \eta$ трансформируется в формулу *свертки плотностей*:

$$f_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(z-y) f_\eta(y)\,dy\ . \tag{2.38}$$

Свертка применяется для случая, когда $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$ независимы и заданы в интервале (∞, ∞) одной формулой. Если же плотности заданы на конечном интервале, удобнее находить функцию распределения по формуле (2.37).

Просчитаем математические ожидания для НСВ $\zeta = \xi + \eta$, $\chi = \xi \cdot \eta$:

$$M[\zeta = \xi + \eta] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z f_\zeta(z)\,dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi\eta}(x, z-x)\,dx\;dz =$$

$$= \Big|\text{ замена } y = z - x \Big| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x+y) f_{\xi\eta}(x,y)\;dxdy;$$

$$M[\chi = \xi \cdot \eta] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h f_\chi(h)\;dh =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h \left(-\int\limits_{-\infty}^{0} x f_{\xi\eta}(x, h/x)\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} x f_{\xi\eta}(x, h/x)\,dx \right)\; dh =$$

$$= \Big|\text{ замена } y = \frac{h}{x} \Big| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy\; f_{\xi\eta}(x,y)\;dxdy\;.$$

Мы получили удобные формулы для вычисления математических ожиданий суммы и произведения ДСВ и НСВ через совместный закон распределения случайного вектора (ξ, η)

$$M[\xi+\eta] = \sum_{ij} (x_i + y_j) p_{ij},\;\; M[\xi\cdot\eta] = \sum_{ij} (x_i \cdot y_j) p_{ij} \tag{2.39}$$

$$M[\xi+\eta] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x+y) f_{\xi\eta}(x,y)\;dxdy,\;\; M[\xi\cdot\eta] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy\; f_{\xi\eta}(x,y)\;dxdy\;.$$

П р и м е р . Независимые НСВ ξ и η заданы плотностями распределений

$$f_\xi(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases} \qquad f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{-y/2}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Найти *композицию,* т. е. плотность распределения НСВ $\zeta = \xi + \eta$.

Р е ш е н и е . В данном случае можно действовать по формуле (2.38):

$$f_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x)\,dx = \begin{cases} \int\limits_0^z e^{-x}\;\frac{1}{2}\;e^{-(z-x)/2}, & x \geq 0 \text{ и } z - x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \text{ или } z - x < 0 \end{cases} \quad .$$

Поясним здесь, что система условий на значение переменной x: $x \geq 0$ и $z - x \geq 0$ эквивалентна двойному неравенству $0 \leq x \leq z$, что определяет пределы интегрирования. Вычислив интеграл, получим

$$f_\zeta(z) = \begin{cases} e^{-z/2}(1 - e^{-z/2}), \ z \geq 0, \\ 0, \quad z < 0 \end{cases}.$$

Задача решена.

2.4.6. *Элементы корреляционного анализа*

Рассмотрим типы "взаимодействия" компонент случайного вектора (ξ, η).

1). С В ξ и η независимы. Тогда безусловный закон распределения компоненты ξ совпадает с ее условным законом распределения $\xi|\eta = y$ для любого y (см. теорему 2.4). По-другому это можно сформулировать так: по значению $\eta(\omega) = y$ для любого ЭС ω (см. определение СВ на с.47) нельзя сделать никакого вывода о значении $\xi(\omega)$.

2). С В ξ и η зависимы. Это значит, что значения СВ $\eta(\omega)$ влияют на значения СВ $\xi(\omega)$. При этом возможны два случая:

а) СВ ξ и η связаны функциональной зависимостью ($\xi = g(\eta)$), т. е. по значению $\eta(\omega) = y$ *однозначно* вычисляется значение $\xi(\omega) = x$ ($x = g(y)$);

б) СВ ξ и η связаны *стохастической* зависимостью, т. е. для фиксированного значения $\eta(\omega) = y$ СВ ξ может принимать некоторый набор значений, для которых условный закон распределения СВ $\xi|\eta = y$ меняется с изменением y.

Для оценки степени и вида зависимости случайных величин используют такие числовые характеристики случайного вектора, как момент корреляции, коэффициент корреляции, условное математическое ожидание (функция регрессии).

Определим *начальные* $\alpha_{k,s}$ и *центральные* $\mu_{k,s}$ моменты случайного вектора (ξ, η) :

$$\alpha_{k,s} = M[\xi^k \eta^s]; \quad \mu_{k,s} = M[(\xi - M[\xi])^k (\eta - M[\eta])^s].$$

Примеры моментов:

$$\alpha_{1,0} = M[\xi], \ \alpha_{0,1} = M[\eta], \ \alpha_{1,1} = M[\xi\eta];$$

$$\mu_{1,0} = \mu_{0,1} = 0, \ \mu_{2,0} = D[\xi], \ \mu_{0,2} = D[\eta].$$

Точка с координатами $(M[\xi], M[\eta])$ называется *центром распределения.*

Центральный момент $\mu_{1,1}$ называется *ковариацией (корреляционным моментом)* $K_{\xi\eta}$ случайного вектора (ξ, η), т. е.

$$K_{\xi\eta} = M[(\xi - M[\xi])(\eta - M[\eta])]. \tag{2.40}$$

Коэффициентом корреляции случайного вектора (ξ, η) называется отношение

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta}, \text{ если } \ \sigma_\xi > 0, \ \sigma_\eta > 0. \tag{2.41}$$

Случайные величины ξ и η *коррелированы*, если $K_{\xi\eta} \neq 0$ $(r_{\xi\eta} \neq 0)$.

Теорема 2.5 *Если случайные величины коррелированы, тогда они зависимы.*

Из теоремы следует, что коррелированность — один из видов зависимости СВ. В частности, из независимости следует некоррелированность. Заметим, что обратить теорему нельзя, что показывает следующий пример.

Пример 1. ДСВ ξ задана законом распределения

x_i	-1	0	1
$p(\xi = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Найти ковариацию $K_{\xi\eta}$, если $\eta = \xi^2$.

Решение. Понятно, что $M[\xi] = 0$. Найдем закон распределения СВ η и $M[\eta]$. Вычисляем множество Y возможных значений η :

$$y_1 = x_1^2 = x_3^2 = 1, \ y_2 = 0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = \{0, 1\}.$$

Теперь находим вероятности значений:

$$p(\eta = 1) = p(\xi = -1) + p(\xi = 1) = \frac{2}{3}, \ p(\eta = 0) = p(\xi = 0) = \frac{1}{3} \ \Rightarrow$$

y_j	0	1
$p(\eta = y_j)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \ M[\eta] = \frac{2}{3}.$$

При вычислении ковариации воспользуемся свойствами математического ожидания (см. с.59)

$$K_{\xi\eta} = M[(\xi - M[\xi])(\eta - M[\eta])] = M[(\xi - 0)(\eta - \frac{2}{3})] = M[\xi\eta - \frac{2}{3}\xi] =$$

$$= M[\xi^3] - \frac{2}{3}M[\xi] = M[\xi^3].$$

Для вычисления $M[\xi^3]$ восстановим закон распределения СВ ξ^3 :

x_i	-1	0	1
$p(\xi^3 = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \ M[\xi^3] = 0 = K_{\xi\eta}.$$

Таким образом, СВ ξ и η не коррелируют, тем не менее они связаны функциональной зависимостью.

Свойства $K_{\xi\eta}$, $r_{\xi\eta}$.
1). $K_{\xi\eta} = K_{\eta\xi}$; $r_{\xi\eta} = r_{\eta\xi}$.
2). $D[\xi] = K_{\xi\xi}$.
3). Неравенство ковариации

$$K_{\xi\eta}^2 \le D[\xi]D[\eta] \;\Leftrightarrow\; |K_{\xi\eta}| \le \sigma_\xi\sigma_\eta \;\Leftrightarrow\; |r_{\xi\eta}| \le 1.$$

4). $K_{\xi\eta} = M[\xi\eta] - M[\xi]M[\eta]$.
5). Вычисление $M[\xi\eta]$ и $D[\xi+\eta]$

$$M[\xi\eta] = M[\xi]M[\eta] + K_{\xi\eta}, \quad D[\xi+\eta] = D[\xi] + D[\eta] + 2K_{\xi\eta}.$$

6). $|r_{\xi\eta}| = 1 \;\Leftrightarrow\; \eta = a\xi + b$, где $a \ne 0$, причем

$$a < 0 \;\Leftrightarrow\; r_{\xi\eta} = -1; \quad a > 0 \;\Leftrightarrow\; r_{\xi\eta} = 1.$$

★ $K_{\xi\eta}$ и $r_{\xi\eta}$ оценивают степень стохастической зависимости, наличие и направление линейной зависимости пары СВ.

П р и м е р 2. Закон распределения дискретного случайного вектора (ξ, η) задан таблицей (см. пример 1 на с.101)

$\eta\backslash\xi$	5	10	15	20
0	0.1	0.2	0.1	0
5	0	0.1	0.1	0.05
10	0	0.1	0.2	0.05

.

Найти ковариацию и коэффициент корреляции компонент ξ и η.

Р е ш е н и е. Вычислим законы распределения компонент и соответствующие математические ожидания и дисперсии (см. (2.23) с.91)

$\eta\backslash\xi$	5	10	15	20	η
0	0.1	0.2	0.1	0	0, 4
5	0	0.1	0.1	0.05	0.25
10	0	0.1	0.2	0.05	0.35
ξ	0.1	0.4	0.4	0.1	1

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} M[\eta] = 4.75, D[\eta] \approx 18.688, \\ M[\xi] = 12.5, D[\xi] = 16.25\ . \end{matrix}$$

Для того чтобы применить свойство 4 на с.111, нужно вычислить $M[\xi\eta]$. Но для этого не нужен закон распределения СВ $\zeta = \xi\eta$ достаточно применить формулу (2.39) (см. с.108)

$$M[\xi\eta] = \sum_{ij} x_i y_j p_{ij} = 5\cdot10\cdot0.1 + 5\cdot15\cdot0.1 + 5\cdot20\cdot0.05 + \ldots + 10\cdot20\cdot0.05 = 67.5.$$

Таким образом,

$$K_{\xi\eta} = M[\xi\eta] - M[\xi]M[\eta] = 67.5 - 4.75 \cdot 12.5 = 8.125 \ ,$$

$$r_{\xi\eta} = \frac{8.125}{\sqrt{18.688 \cdot 16.25}} \approx 0.466.$$

Полученные значения ковариации и коэффициента корреляции позволяют сделать вывод: СВ ξ и η коррелируют (в частности, зависимы), степень стохастической зависимости средняя, линейной зависимости нет. Задача решена.

Пример 3. СВ ξ распределена равномерно на отрезке $(0, \pi)$. Найти ковариацию случайных величин $\eta_1 = \cos\xi$ и $\eta_2 = \sin\xi$.

Решение. Поскольку ξ равномерно распределена, ее функция плотности имеет вид

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, \ x \in (0, \pi) \\ 0, x \notin (0, \pi) \end{cases} .$$

Для того чтобы воспользоваться свойством 4 на с.111, вычислим математические ожидания СВ η_1 и η_2 (см. (2.5) на с.59):

$$M[\eta_1] = \int\limits_0^\pi \cos x \cdot \frac{1}{\pi} \ dx = \frac{\sin x}{\pi}\Big|_0^\pi = 0,$$

$$M[\eta_2] = \int\limits_0^\pi \sin x \cdot \frac{1}{\pi} \ dx = -\frac{\cos x}{\pi}\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}.$$

Теперь заметим, что СВ $\eta_1\eta_2 = \sin\xi\cos\xi$ — функция СВ ξ, поэтому вычисляем ее математическое ожидание снова по формуле (2.5) на с.59

$$M[\eta_1\eta_2] = \int\limits_0^\pi \sin x \cos x \cdot \frac{1}{\pi} \ dx = -\frac{1}{4\pi}\cos 2x\Big|_0^\pi = 0.$$

Окончательно получаем

$$K_{\eta_1\eta_2} = M[\eta_1\eta_2] - M[\eta_1]M[\eta_2] = 0 - 0 \cdot \frac{2}{\pi} = 0.$$

Итак, СВ η_1 и η_2 не коррелируют, хотя обе являются функциями одной и той же СВ ξ. Задача решена.

2.4.7. *Элементы регрессионного анализа*

Условное математическое ожидание (УМО) СВ ξ при условии, что СВ η принимает значение y, есть математическое ожидание условного закона распределения $\xi|\eta = y$ (см. (2.27) на с.99):

$$M[\xi|\eta = y] = \begin{cases} \sum\limits_i x_i p(\xi = x_i|\eta = y = y_j) = \dfrac{\sum\limits_i x_i p_{ij}}{\sum\limits_s p_{sj}}, & \text{если } (\xi,\eta) \text{ — ДСВ;} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x|\eta = y)\, dx, & \text{если } (\xi,\eta) \text{ — НСВ.} \end{cases}$$

Предполагаем, что соответствующие интегралы и ряды абсолютно сходятся.

При фиксированном y $M[\xi|\eta = y]$ — постоянное число. Если же y пробегает множество возможных значений СВ η, то $M[\xi|\eta = y] = \psi(y)$ — функция переменной y. Аналогично $M[\eta|\xi = x] = \varphi(x)$.

Функция $\psi(y)$ называется *регрессией ξ на η*. Соответственно $\varphi(x)$ — *регрессиия η на ξ*. Графики функций $\psi(y)$ и $\varphi(x)$ — *кривые регрессии.*

В случае, если (ξ, η) — ДСВ, кривая регрессии есть дискретный набор точек, например (x_i, m_i), где $m_i = M[\eta|\xi = x_i]$. Тогда принято для наглядности соединять эти точки ломаной.

Свойства УМО

1). Если СВ ξ и η независимы, то УМО совпадает с безусловным математическим ожиданием. В частности, линии регрессии параллельны координатным осям.

2). $M[\eta_1 + \eta_2|\xi = x] = M[\eta_1|\xi = x] + M[\eta_2|\xi = x]$.

3). $M[c \cdot \eta|\xi = x] = c \cdot M[\eta|\xi = x]$.

4). Экстремальное свойство УМО: если $\varphi(x) = M[\eta|\xi = x]$, то для всякой функции $g(\xi)$ верно неравенство

$$M[(\eta - g(\xi))^2] \geq M[(\eta - \varphi(\xi))^2].$$

Другими словами, среди всех функций $g(\xi)$ наименьшее отклонение в среднем от СВ η дает функция $\varphi(\xi)$.

П р и м е р 1 . Пусть функция плотности СВ ξ имеет вид:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}, \ x > 0.$$

Условное распределение $\eta|\xi = x$ подчиняется показательному закону с параметром x, т. е.

$$f_\eta(y|\xi = x) = xe^{-xy}, \ x > 0, y > 0.$$

Найти УМО $M[\eta|\xi = x]$ и $M[\xi|\eta = y]$.

Решение. Сначала найдем совместную функцию плотности:

$$f_{\xi\eta}(x,y) = f_\eta(y|\xi = x)f_\xi(x) = xe^{-xy} \cdot \frac{1}{2}x^2e^{-x} = \frac{x^3}{2}\ e^{-x(1+y)},\ x > 0, y > 0.$$

Далее считаем безусловный закон распределения СВ η, интегрируя по частям

$$f_\eta(y) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty x^3\ e^{-x(1+y)}\ dx = \frac{3}{(1+y)^4},\ y > 0.$$

Находим условный закон распределения $\xi|\eta = y$

$$f_\xi(x|\eta = y) = \frac{f_{\xi\eta}(x,y)}{f_\eta(y)} = \frac{x^3}{2}\ e^{-x(1+y)} \cdot \frac{(1+y)^4}{3} = \frac{x^3}{6}\ e^{-x(1+y)}(1+y)^4,\ x > 0, y > 0.$$

Теперь находим УМО (функции регрессии):

$$M[\eta|\xi = x] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} yf_\eta(y|\xi = x)\ dy = \int\limits_0^\infty yxe^{-xy}\ dy = \frac{1}{x},\ x > 0,$$

$$M[\xi|\eta = y] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x|\eta = y)\ dx = (1+y)^4\int\limits_0^\infty \frac{x^3}{6}\ e^{-x(1+y)}\ dx = \frac{4}{1+y},\ y > 0.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\varphi(x) = M[\eta|\xi = x] = \frac{1}{x},\ x > 0, \quad \psi(y) = M[\xi|\eta = y] = \frac{4}{1+y},\ y > 0.$$

Задача решена.

★ Пусть СВ ξ и η зависимы. Тогда либо эта зависимость функциональная, либо стохастическая. Во втором случае поставим задачу отыскания функции $y = g(x)$, которая наилучшим образом (в некотором смысле) приближает СВ $g(\xi)$ к СВ η. В классе всех функций $g(x)$ таким свойством обладает функция регрессии, в силу экстремального свойства УМО (см. с.113). Теперь поставим другую задачу: среди всех *линейных* функций $g(x) = ax + b$ найти ту, которая наилучшим образом (в смысле $M[(\eta - g(\xi))^2]$ минимально) приближает СВ η. Решение этой задачи — линейная среднеквадратическая регрессия η на ξ :

$$y = g(x) = M[\eta] + r_{\xi\eta}\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x - M[\xi]). \tag{2.42}$$

Симметричная формула и для линейной среднеквадратической регрессии ξ на η

$$x = h(y) = M[\xi] + r_{\xi\eta}\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(y - M[\eta]). \tag{2.43}$$

П р и м е р 2 . (Продолжение примера 1 на с.113). Для СВ (ξ, η) из примера 1 найти линейные среднеквадратические регрессии η на ξ и ξ на η.

Р е ш е н и е . Для того чтобы использовать формулы (2.42) и (2.43), нужно вычислить следующие числовые характеристики: $M[\xi]$, $M[\eta]$, σ_ξ, σ_η, $r_{\xi\eta}$. Для счета понадобятся найденные в примере 1 функции плотности $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$, $f_{\xi\eta}(x,y)$:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x},\ x > 0;\ f_\eta(y) = \frac{3}{(1+y)^4},\ y > 0.$$

Находим безусловные математические ожидания и дисперсии (см. формулу (2.7) на с.60), опуская подробности интегрирования,

$$M[\xi] = \int\limits_0^\infty x\ \frac{1}{2}x^2e^{-x}\ dx = 3,\ D[\xi] = \sigma_\xi^2 = \int\limits_0^\infty x^2\ \frac{1}{2}x^2e^{-x}\ dx - 9 = 3;$$

$$M[\eta] = \int\limits_0^\infty y\ \frac{3}{(1+y)^4}\ dy = \frac{1}{2},\ D[\eta] = \sigma_\eta^2 = \int\limits_0^\infty y^2\ \frac{3}{(1+y)^4}\ dy - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Далее (см. (2.39) на с.108) вычислим математическое ожидание произведения компонент

$$M[\xi\eta] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xy\ f_{\xi\eta}(x,y)\ dxdy = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty xy\ \frac{x^3}{2}\ e^{-x(1+y)}\ dxdy = 1.$$

Теперь по формуле (2.40) считаем ковариацию и коэффициент корреляции

$$K_{\xi\eta} = M[\xi\eta] - M[\xi]M[\eta] = 1 - 3\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi\sigma_\eta} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{3\cdot\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{3}.$$

Подставляя все найденные значения в формулы (2.42) и (2.43), получим уравнения прямых (см. рис.2.16)

$$y = 1 - \frac{x}{6}\ -\ \text{линейная регрессия } \eta \text{ на } \xi,$$

$$x = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}y\ -\ \text{линейная регрессия } \xi \text{ на } \eta.$$

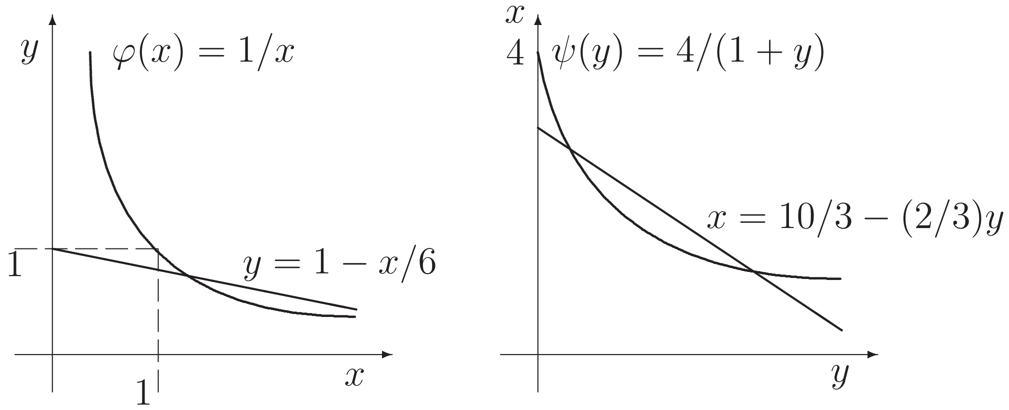


Рис. 2.16. К примеру 2

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы: СВ ξ и η зависимы и коррелируют ($r_{\xi\eta} \neq 0$), зависимость нелинейная ($|r_{\xi\eta}| \neq 1$), теснота корреляционной связи средняя ($|r_{\xi\eta}| = 1/3$), направление корреляционной зависимости отрицательное (т. е. $r_{\xi\eta} < 0$ и с возрастанием значений СВ $\xi = x$ среднее значение СВ η $M[\eta|\xi = x]$ уменьшается). Кроме того, найдено оптимальное линейное приближение обеих линий регрессии. Задача решена.

П р и м е р 3 . (Продолжение примера 2 на с.111). Закон распределения ДСВ (ξ, η) имеет вид:

$\xi\backslash\eta$	5	10	15	20
0	0.1	0.2	0.1	0
5	0	0.1	0.1	0.05
10	0	0.1	0.2	0.05

Найти регрессии ξ на η и η на ξ, а также соответствующие линейные среднеквадратические регрессии.

Р е ш е н и е . В примере 2 на с.111 найдены необходимые числовые характеристики:

$$M[\eta] = 4.75, D[\eta] \approx 18.688, M[\xi] = 12.5, D[\xi] = 16.25, \; r_{\xi\eta} \approx 0.466.$$

После подстановки в формулы (2.42) и (2.43) получим уравнения прямых (рис.2.16):

$$y = 0.5x - 1.5 \; - \text{ линейная регрессия } \eta \text{ на } \xi,$$

$$x = 0.43y + 10.5 \; - \text{ линейная регрессия } \xi \text{ на } \eta.$$

Теперь найдем УМО, т. е. $M[\xi|\eta = y_j]$, $M[\eta|\xi = x_i]$. Для этого понадобятся

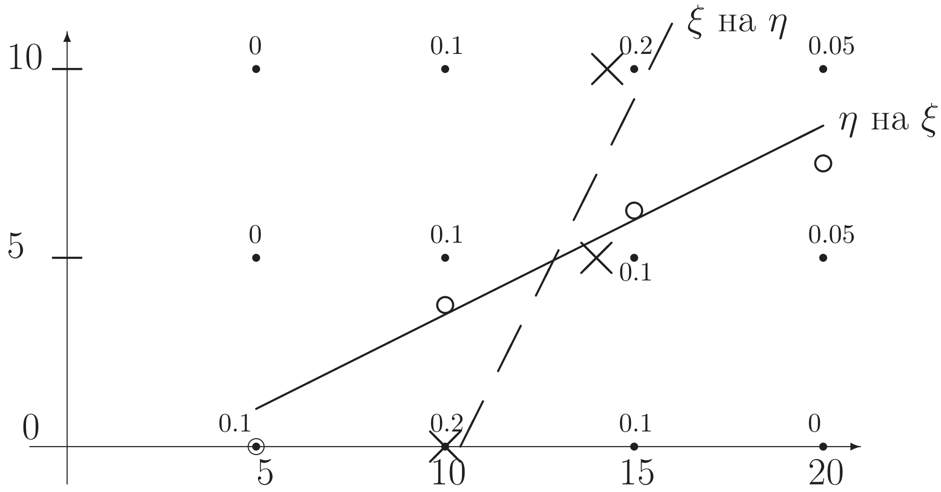


Рис. 2.17. $\times$ — регрессия ξ на η, $\bigcirc$ — регрессия η на ξ

условные законы распределения (один из них найден в примере 1 на с.101). Выпишем их для случая $\xi|\eta = y_j$:

x_i	5	10	15
$p\,(\xi = x_i\|\eta = 0)$	1/4	2/4	1/4

, $M[\xi|\eta = 0] = 10;$

x_i	10	15	20
$p\,(\xi = x_i\|\eta = 5)$	0.4	0.4	0.2

, $M[\xi|\eta = 5] = 14;$

x_i	10	15	20
$p\,(\xi = x_i\|\eta = 10)$	10/35	20/35	5/35

, $M[\xi|\eta = 10] = 14.286.$

Таким образом, полученное множество точек (на рис. 2.17 помечены крестиками)

$$(M[\xi|\eta = y_j], y_j) = \{(10, 0),\ (14, 5),\ (14.286, 10)\}\ \text{ есть регрессия } \xi \text{ на } \eta.$$

Аналогично просчитывается регрессия η на ξ (на рис. 2.17 помечена кружками)

$$(x_i, M[\eta|\xi = x_i]) = \{(5, 0), (10, 3.75), (15, 6.25), (20, 7.5)\}.$$

На рис. 2.17 хорошо графически отображается то, что СВ ξ и η коррелируют (линии регрессии не параллельны координатным осям), направление зависимости положительное ($r_{\xi\eta} > 0$ и с возрастанием одной из СВ средние значения другой возрастают), график линейной регрессии проходит максимально близко к точкам регрессии. Заметим также, что точка пересечения прямых линий регрессии есть центр распределения $(M[\xi], M[\eta]) = (12.5, 4.75)$.

2.4.8. *Задачи для самостоятельного решения*

Задача 1. Закон распределения случайного вектора (ξ, η) задан матрицей распределения:

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/12$	$7/24$
1	$5/24$	$1/6$	$1/8$

Выяснить, зависимы или нет СВ ξ и η. Найти : а) законы распределения компонент; б) условные вероятности $p(\eta = 1|\xi = 0)$, $p(\eta = 1|\xi = 1)$; в) совместное распределения случайного вектора $(\max\{\xi, \eta\}, \min\{\xi, \eta\})$; г) распределение СВ $\xi + \eta$, $\xi\eta$.

О т в е т : а)

x_i	-1	0	1
$p(\xi = x_i)$	$1/3$	$1/4$	$5/12$

,

y_i	-1	1
$p(\eta = y_i)$	$1/2$	$1/2$

;
б) $p(\eta = 1|\xi = 0) = 2/3$, $p(\eta = 1|\xi = 1) = 1/4$; в)

$\max\{\xi, \eta\} \backslash \min\{\xi, \eta\}$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/12$	$1/2$
0	0	0	$1/6$
1	0	0	$1/8$

;

г)

$x_i + y_j$	-2	-1	0	1	2
$p(\xi + \eta = x_i + y_j)$	$1/8$	$1/12$	$1/2$	$1/6$	$1/8$

,

$x_i \cdot y_j$	-1	0	1
$p(\xi\eta = x_i \cdot y_i)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

.

Задача 2. Закон распределения случайного вектора (ξ, η) задан матрицей распределения:

$\eta \backslash \xi$	5	10	15	20
10	0	0	0	7
20	0	2	3	0
30	8	0	0	0

Укажите, какой характер имеет зависимость ξ от η и η от ξ: функциональный, статистический, или эти величины независимы. Укажите знак коэффициента корреляции и корреляционного момента и его примерное значение. Найдите уравнение линейной регрессии ξ по η и уравнение линейной регрессии η по ξ. Вычислите из уравнения регрессии ξ по η значение абсциссы x при $y = 20$, поясните смысл полученного значения величины x.

О т в е т : Зависимость ξ от η носит статистический характер. $r_{\xi\eta} \approx -0.982$. Уравнение регрессии η по ξ имеет вид $y = -1.282x + 36.237$. Уравнение регрессии ξ по η: $x = -0.751y + 27.642$. Отсюда при $y = 20$ получаем $x = 12.625$, что близко к $M[\xi|\eta = 20] = 13$.

Задача 3. Пусть СВ ξ и η независимы и имеют одинаковое распределение с $M[\xi] = M[\eta] = m$, $D[\xi] = D[\eta] = \sigma^2$.Найти коэффициент корреляции между СВ $\gamma = a\xi + b\eta$ и $\delta = a\xi - b\eta$.

О т в е т : $r_{\gamma\delta} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Задача 4. Распределение случайного вектора (ξ, η) задано совместной функцией распределения

$$F_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} - e^{-\mu y} - e^{-\lambda x - \mu y}, & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0\ , & x < 0 \text{ или } y < 0, \end{cases} \quad \lambda > 0,\ \mu > 0\ .$$

Установить, являются ли СВ ξ и η независимыми. Найти: а) распределения компонент ξ, η, а также их математические ожидания и дисперсии; б) ковариацию и коэффициент корреляции СВ (ξ, η); в) регрессии ξ на η и η на ξ.

О т в е т : СВ независимы. а) ξ и η имеют экспоненциальное распределение с параметром λ и μ соответственно; б) $K_{\xi\eta} = r_{\xi\eta} = 0$; в) $M[\xi|\eta = y] = M[\xi] = \frac{1}{\lambda}$, $M[\eta|\xi] = M[\eta] = \frac{1}{\mu}$.

Список принятых сокращений

ДСВ — дискретная случайная величина,
МО — математическое ожидание,
НСВ — непрерывная случайная величина,
ПЭС — пространство элементарных событий,
СВ — случайная величина,
СКО — среднее квадратическое отклонение,
СС — случайное событие,
УМО — условное математическое ожидание,
ЦПТ — центральная предельная теорема,
ЭС — элементарное событие.

Библиографический список

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей/ Е.С. Вентцель. М.: Наука, 1984. 576 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения/ Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. М.: Наука , 1988. 484 с.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика/ В.Е. Гмурман. М.: Высш. шк., 2004. 479 с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике/ В.Е. Гмурман. М.: Высш. шк., 2004. 405 с.
5. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики/ Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. М.: Изд-во "Астрель" , 2003. 654 с.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике/ Д.Т. Письменный. М.: Изд-во "Айрис-пресс" , 2004. 284 с.
7. Соколов Г.А. Теория вероятностей/ Г.А. Соколов, Н.А. Чистякова. М.: Изд-во «Экзамен», 2005. - 416 с.
8. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике/ Г. Секей. М.: Изд-во "Мир" , 1990. 235 с.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1/ В. Феллер. М.: Изд-во "Мир" , 1967. 484 с.
10. Сборник задач по математике для втузов. В 4 ч. Ч.3/ под общ.ред. А.В. Ефимова и Ф.С. Поспелова. М.: Физматлит, 2004. 430 с.
11. Винокурова В.Б. Элементы теории вероятностей и математической статистики: учебное пособие/ В.Б. Винокурова, Л.М. Пироговская, В.В. Трещева. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2005. 68 с.
12. Катальников В.В. Сборник задач по теории вероятностей: учебное пособие/ В.В. Катальников, Ю.В. Шапарь. Екатеринбург: УГТУ - УПИ, 2007. 65 с.

Приложения

Свойства сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}\ ,\ \text{тогда}$$

$$1)\ C_n^m = C_n^{n-m}\ \text{для любых}\ n\ \text{и}\ 0 \le m \le n;$$

$$2)\ C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n\ \text{для любых}\ n \ge 0;$$

$$3)\ C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}\ \text{для любых}\ n\ \text{и}\ 0 \le m < n.$$

Последнее свойство позволяет постепенно строить таблицу, n-я строка которой состоит из $n+1$ числа ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$C_n^0\ C_n^1\ C_n^2\ \ldots C_n^n\ ,$$

которую называют *треугольник Паскаля:*

C_n^m	$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_0^m	0	1										
C_1^m	1	1	1									
C_2^m	2	1	2	1								
C_3^m	3	1	3	3	1							
C_4^m	4	1	4	6	4	1						
C_5^m	5	1	5	10	10	5	1					
C_6^m	6	1	6	15	20	15	6	1				
C_7^m	7	1	7	21	35	35	21	7	1			
C_8^m	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
C_9^m	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
C_{10}^m	10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Таблица к задаче о рассеянной секретарше

n	$n! = \sum\limits_{i=0}^{n} n_i$	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
1	1	-	1					
2	2	1	-	1				
3	6	2	$C_3^1 \cdot 1$	-	1			
4	24	9	$C_4^1 \cdot 2$	$C_4^2 \cdot 1$	-	1		
5	120	44	$C_5^1 \cdot 9$	$C_5^2 \cdot 2$	$C_5^3 \cdot 1$	-	1	
6	720	265	$C_6^1 \cdot 44$	$C_6^2 \cdot 9$	$C_6^3 \cdot 2$	$C_6^4 \cdot 1$	-	1

n —количество писем; $n!$ — число всех возможных размещений писем по конвертам; n_i — количество тех размещений, в которых имеется точно i писем, совпавших с адресом. Можно продолжить таблицу для $n = 7, 8$ и т.д. При заполнении каждой последующей строки колонка n_0 заполняется в последнюю очередь и считается как разность $n! - \sum\limits_{i=1}^{n} n_i$. При заполнении других ячеек строки нужно учесть индуктивную закономерность, которая ясно видна в таблице.

Асимптотические приближения формулы Бернулли

Теоремы	n	p	$n,\ npq$
Локальная теорема Муавра-Лапласа $p_n(m) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\dfrac{m-pn}{\sqrt{npq}}\right)$	$n \geq 100$	$p \approx 1/2$	$n > 25,\ npq > 10$
Интегральная теорема Лапласа $p_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\dfrac{k_2-pn}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\dfrac{k_1-pn}{\sqrt{npq}}\right)$	$n \geq 100$	$p \approx 1/2$	$n > 25,\ npq > 10$
Формула Пуассона $P_{n,\lambda}(m) \approx \dfrac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$	$n \geq 100$	$p = \frac{\lambda}{n}$ $p < 0,1$	$npq < 10$ $\lambda = pn$ – не мало

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.398	0.3977	0.3973
0.1	0.397	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.391	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.379	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.341	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.323	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.292
0.8	0.2897	0.2874	0.285	0.2827	0.2803	0.278	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1	0.242	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.12	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.104	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.094	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.079	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.062	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2	0.054	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.044	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.031	0.0303	0.0297	0.029
2.3	0.0283	0.0277	0.027	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.018
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.011	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.006	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.005	0.0048	0.0047	0.0046
3	0.0044	0.0043	0.0042	0.004	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.003	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.002	0.002	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.001	0.001	0.001	0.0009	0.0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2}\, dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.01	0.003989	0.44	0.17	0.87	0.3079	1.3	0.4032	1.73	0.4582	2.32	0.4898
0.02	0.007978	0.45	0.1736	0.88	0.3106	1.31	0.4049	1.74	0.4591	2.34	0.4904
0.03	0.01197	0.46	0.1772	0.89	0.3133	1.32	0.4066	1.75	0.4599	2.36	0.4909
0.04	0.01595	0.47	0.1808	0.9	0.3159	1.33	0.4082	1.76	0.4608	2.38	0.4913
0.05	0.01994	0.48	0.1844	0.91	0.3186	1.34	0.4099	1.77	0.4616	2.4	0.4918
0.06	0.02392	0.49	0.1879	0.92	0.3212	1.35	0.4115	1.78	0.4625	2.42	0.4922
0.07	0.0279	0.5	0.1915	0.93	0.3238	1.36	0.4131	1.79	0.4633	2.44	0.4927
0.08	0.03188	0.51	0.195	0.94	0.3264	1.37	0.4147	1.8	0.4641	2.46	0.4931
0.09	0.03586	0.52	0.1985	0.95	0.3289	1.38	0.4162	1.81	0.4649	2.48	0.4934
0.1	0.03983	0.53	0.2019	0.96	0.3315	1.39	0.4177	1.82	0.4656	2.5	0.4938
0.11	0.0438	0.54	0.2054	0.97	0.334	1.4	0.4192	1.83	0.4664	2.52	0.4941
0.12	0.04776	0.55	0.2088	0.98	0.3365	1.41	0.4207	1.84	0.4671	2.54	0.4945
0.13	0.05172	0.56	0.2123	0.99	0.3389	1.42	0.4222	1.85	0.4678	2.56	0.4948
0.14	0.05567	0.57	0.2157	1	0.3413	1.43	0.4236	1.86	0.4686	2.58	0.4951
0.15	0.05962	0.58	0.219	1.01	0.3438	1.44	0.4251	1.87	0.4693	2.6	0.4953
0.16	0.06356	0.59	0.2224	1.02	0.3461	1.45	0.4265	1.88	0.4699	2.62	0.4956
0.17	0.06749	0.6	0.2257	1.03	0.3485	1.46	0.4279	1.89	0.4706	2.64	0.4959
0.18	0.07142	0.61	0.2291	1.04	0.3508	1.47	0.4292	1.9	0.4713	2.66	0.4961
0.19	0.07534	0.62	0.2324	1.05	0.3531	1.48	0.4306	1.91	0.4719	2.68	0.4963
0.2	0.07926	0.63	0.2357	1.06	0.3554	1.49	0.4319	1.92	0.4726	2.7	0.4965
0.21	0.08317	0.64	0.2389	1.07	0.3577	1.5	0.4332	1.93	0.4732	2.72	0.4967
0.22	0.08706	0.65	0.2422	1.08	0.3599	1.51	0.4345	1.94	0.4738	2.74	0.4969
0.23	0.09095	0.66	0.2454	1.09	0.3621	1.52	0.4357	1.95	0.4744	2.76	0.4971
0.24	0.09484	0.67	0.2486	1.1	0.3643	1.53	0.437	1.96	0.475	2.78	0.4973
0.25	0.09871	0.68	0.2517	1.11	0.3665	1.54	0.4382	1.97	0.4756	2.8	0.4974
0.26	0.1026	0.69	0.2549	1.12	0.3686	1.55	0.4394	1.98	0.4761	2.82	0.4976
0.27	0.1064	0.7	0.258	1.13	0.3708	1.56	0.4406	1.99	0.4767	2.84	0.4977
0.28	0.1103	0.71	0.2611	1.14	0.3729	1.57	0.4418	2	0.4772	2.86	0.4979
0.29	0.1141	0.72	0.2642	1.15	0.3749	1.58	0.4429	2.02	0.4783	2.88	0.498
0.3	0.1179	0.73	0.2673	1.16	0.377	1.59	0.4441	2.04	0.4793	2.9	0.4981
0.31	0.1217	0.74	0.2703	1.17	0.379	1.6	0.4452	2.06	0.4803	2.92	0.4982
0.32	0.1255	0.75	0.2734	1.18	0.381	1.61	0.4463	2.08	0.4812	2.94	0.4984
0.33	0.1293	0.76	0.2764	1.19	0.383	1.62	0.4474	2.1	0.4821	2.96	0.4985
0.34	0.1331	0.77	0.2793	1.2	0.3849	1.63	0.4484	2.12	0.483	2.98	0.4986
0.35	0.1368	0.78	0.2823	1.21	0.3869	1.64	0.4495	2.14	0.4838	3	0.49865
0.36	0.1406	0.79	0.2852	1.22	0.3888	1.65	0.4505	2.16	0.4846	3.2	0.49931
0.37	0.1443	0.8	0.2881	1.23	0.3907	1.66	0.4515	2.18	0.4854	3.4	0.49966
0.38	0.148	0.81	0.291	1.24	0.3925	1.67	0.4525	2.2	0.4861	3.6	0.499841
0.39	0.1517	0.82	0.2939	1.25	0.3943	1.68	0.4535	2.22	0.4868	3.8	0.499928
0.4	0.1554	0.83	0.2967	1.26	0.3962	1.69	0.4545	2.24	0.4875	4	0.499968
0.41	0.1591	0.84	0.2995	1.27	0.398	1.7	0.4554	2.26	0.4881	4.5	0.499997
0.42	0.1628	0.85	0.3023	1.28	0.3997	1.71	0.4564	2.28	0.4887	5	0.499997
0.43	0.1664	0.86	0.3051	1.29	0.4015	1.72	0.4573	2.3	0.4893		

Оглавление

Глава 1. Случайные события **3**

1.1. Элементы комбинаторики . . . 3

1.2. Математическая модель опыта со случайным исходом . . . 10

1.2.1. *Пространство элементарных событий (ПЭС)* . . . 10

1.2.2. *Алгебра событий* . . . 14

1.2.3. *Вероятность* . . . 18

1.2.4. *Задачи для самостоятельного решения* . . . 25

1.3. Вычисление вероятности сложных событий . . . 26

1.3.1. *Теоремы о вероятности суммы и произведения событий* . 26

1.3.2. *Формулы полной вероятности и Байеса* . . . 33

1.3.3. *Схема Бернулли и формула Бернулли* . . . 40

1.3.4. *Асимптотические приближения формулы Бернулли* . . . 42

1.3.5. *Задачи для самостоятельного решения* . . . 45

Глава 2. Случайные величины **47**

2.1. Одномерные СВ . . . 47

2.1.1. *Законы распределения ДСВ* . . . 47

2.1.2. *Законы распределения НСВ* . . . 51

2.1.3. *Функции СВ* . . . 53

2.1.4. *Числовые характеристики СВ* . . . 59

2.1.5. *Задачи для самостоятельного решения* . . . 64

2.2. Основные законы распределения . . . 65

2.2.1. *Некоторые ДСВ* . . . 65

2.2.2. *Некоторые НСВ* . . . 71

2.2.3. *Нормальное распределение* . . . 75

2.2.4. *Задачи для самостоятельного решения* . . . 80

2.3. Последовательности случайных величин . . . 81

2.3.1. *Закон больших чисел* . . . 81

2.3.2. *Центральная предельная теорема* . . . 84

2.3.3. *Задачи для самостоятельного решения* . . . 88

2.4. Двумерные СВ . . . 89

2.4.1. *Закон распределения дискретного случайного вектора* . . . 90

2.4.2. *Закон распределения непрерывного случайного вектора* . . 93

2.4.3. *Условные законы распределения случайных величин* 99

2.4.4. *Зависимость случайных величин* . . . 103

2.4.5. *Сумма и произведение случайных величин* . . . 105

2.4.6. *Элементы корреляционного анализа* . . . 109

2.4.7. *Элементы регрессионного анализа* . . . 113

2.4.8. *Задачи для самостоятельного решения* . . . 118

Список принятых сокращений . . . 120

Библиографический список **121**

Приложения **122**

Учебное издание

Голикова Елена Александровна

Элементы теории вероятностей

Редактор *Н.П. Кубыщенко*
Компьютерная верстка *Е.А. Голиковой*

Подписано в печать 14.06.2012 Формат 60x84 1/16.
Бумага типографская. Плоская печать. Усл. печ. л. 7,38.
Уч.-изд. л. 7,4. Тираж 200 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620002, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4