Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Кратные интегралы и теория поля

Сборник типовых заданий

для студентов физических специальностей

Екатеринбург
2013

УДК 517.9

Кратные интегралы и теория поля: сборник типовых заданий / под общ. ред. В.В. Трещевой. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2013. 44 с.

Приведены индивидуальные задания по кратным интегралам и теории поля. Индивидуальные задания по кратным интегралам составлены Н.В. Чуксиной.

Индивидуальные задания по теории поля составлены А.Б. Абрамовой, Г.В. Бабушкиной, Н.В. Быковой, Н.В. Мельниковой, Р.М. Миньковой, В.В. Трещевой.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики» при поддержке физико-технического факультета.

© «Уральский государственный технический университет − УПИ», 2013

Индивидуальные задания по теме «Кратные интегралы»

Вариант 1

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

   1) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}+z,\quad L:\ x=t\cos t,\ \ y=t\sin t,\ \ z=t,\quad t\in[0,2\pi]$;

   2) $f(x,y,z)=x+y+z,\quad L:\ x^2+y^2=a^2,\quad z=2\quad (x\ge 0,\quad y\ge 0)$. .

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0}f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0}f(x,y)dx.$$

3. Вычислить $\iint\limits_D\left(x^2y^2+1\right)dxdy$, если область D ограничена линиями

$$x=-y^2,\quad x=\sqrt{y},\quad y=-x^2+2.$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V 2y^2e^{xy}dx\,dy\,dz$, если область V ограничена поверхностями

$$x=0,\quad y=1,\quad y=x,\quad z=0,\quad z=1.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{3}{x},\ \ y=4e^x,\ \ y=3,\ \ y=4.$$

6. Пластина с поверхностной плотностью $\gamma=y^2$ задана неравенствами $x^2+\frac{y^2}{4}\le 1$, $y\ge 0$, $y\ge 2x$. Найти массу пластины.

7. Найти момент инерции относительно оси Ox однородной пластины, расположенной в первом квадранте и ограниченной линиями $xy=1,\quad xy=2$, $x=2y,\quad y=2x$.

8. Вычислить площадь S части поверхности $z=xy$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=8$.

9. Найти объём тела, ограниченного поверхностями

$$y=16\sqrt{2x},\quad y=\sqrt{2x},\quad z=0,\quad x+z=2.$$

10. Найти объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=2y,\quad z=\frac{5}{4}-x^2,\quad z=0.$$

11. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $z=2-12\left(x^2+y^2\right),\quad z=24x+2.$

12. Найти объём тела, заданного неравенствами

$$1\le x^2+y^2+z^2\le 49,\quad -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}}\le z\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}},\quad -x\le y\le 0.$$

Вариант 2

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=z^2, \quad L: x=1, \quad y^2+z^2=4$;

2) $f(x,y)=\sqrt{x}+y$, L – граница области D, заданной неравенствами $x \le y, \quad x \ge y^2$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)\,dx .$$

3.Вычислить $\iint\limits_D y^2 \cdot \sin\frac{xy}{2}\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$x=0, \quad y=\sqrt{\pi}, \quad y=\frac{x}{2}.$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4}$, если область V ограничена поверхностями

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

5. Найти массу фигуры, ограниченной линиями $x=\sqrt{36-y^2}, \quad x=6-\sqrt{36-y^2}$, если плотность $\gamma = x$.

6. Пластинка D задана неравенствами $1 \le \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \le 2, \quad y \ge 0, \quad y \le \frac{2}{3}x$; $\gamma = \frac{y}{x}$ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

7. Найти момент инерции относительно оси Ox однородной пластины, расположенной в третьем квадранте, ограниченной кривыми $xy=1, \quad xy=2, \quad y=2x, \quad x=2y$.

8. Вычислить площадь S части поверхности $z=xy$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=8$.

9. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $y=5\sqrt{x}, \quad y=\frac{5x}{3}, \quad z=0,$ $z=5+\frac{5\sqrt{x}}{3}$, если $\gamma = y$ – плотность тела.

10. Найти объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=y, \quad x^2+y^2=4y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0.$$

11. Найти объём тела, ограниченного поверхностями

$$y=5x^2-2, \quad y=-4x^2+7, \quad z=4+9x^2+5y^2, \quad z=-1+9x^2+5y^2.$$

12. Найти объём тела, заданного неравенствами

$$4 \le x^2+y^2+z^2 \le 64, \quad \sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}} \le z \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}, \quad -\sqrt{3}x \le y \le 0.$$

Вариант 3

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=\sqrt{2yz},\quad L: x=t,\ y=\dfrac{t^2}{2},\quad z=1,\quad 0\le t\le 1$;

2) $f(x,y,z)=|zx|,\quad L: x^2+z^2=1,\quad y=2\quad (x\ge 0)$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y f(x,y)\,dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx$.

3. Вычислить $\iint\limits_D \left(36x^2y^2-96x^3y^3\right)dxdy$, если область D ограничена линиями

$$x=1,\quad y=\sqrt[3]{x},\quad y=-x^3\ .$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V 8y^2ze^{2xyz}\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$x=-1,\quad y=2,\quad z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2-6y+x^2=0,\quad y^2-8y+x^2=0,\quad y=\frac{x}{\sqrt{3}},\quad y=\sqrt{3}x.$$

6. Найти массу пластины D, ограниченной линиями $x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ \ (y\ge 0)$, если $\gamma=\dfrac{7x^2}{2}+5y$ – поверхностная плотность пластины.

7. Вычислить массу фигуры, ограниченной линиями

$$xy=1,\quad xy=4,\quad x-2y-2=0,\quad x-2y+1=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0),$$

если плотность $\gamma=(x+2y)xy$.

8. Найти площадь части поверхности $x^2+z^2=a^2$, вырезанной поверхностью

$$y^2+z^2=a^2\quad (y\ge 0).$$

9. Найти объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=2,\quad y=\sqrt{x},\quad y=0,\quad z=0,\quad z=15x.$$

10. Найти объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=8x\sqrt{2},\quad z=x^2+y^2-64,\quad z=0\,(z\ge 0).$$

11. Найти момент инерции относительно плоскости Oxz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x=-5y^2+2,\quad x=-3,\quad z=3x^2+y^2+1,\quad z=3x^2+y^2-5.$$

12. Найти объём тела, заданного неравенствами

$$4\le x^2+y^2+z^2\le 64,\quad z\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}},\quad -\frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le 0.$$

Вариант 4

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

   1) $f(x,y,z) = x + z + \sqrt{y}, \quad L: x = 2t,\ y = t^2,\ z = t \quad t \in [-3, 0]$;

   2) $f(x,y,z) = xz - 2y, \quad L: x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 4$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx.$$

3. Вычислить интеграл $\iint\limits_D y^2 e^{-\frac{xy}{4}}\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$x = 0, \quad y = 2, \quad y = x.$$

4. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V (3x + 4y)\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$y = x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad z = 5\left(x^2 + y^2\right), \quad z = 0.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 8 - y^2, \quad x = -2y.$

6. Найти массу пластинки *D,* ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$, $x = 0, \quad y = 0$, $(x \ge 0, \quad y \ge 0)$, если $\gamma = \dfrac{2x + 5y}{x^2 + y^2}$ – поверхностная плотность пластины.

7. Вычислить массу фигуры, ограниченной линиями

$$xy = 1, \quad xy = 4, \quad x - 2y - 2 = 0, \quad x - 2y + 1 = 0\ (x \le 0,\ y \le 0),$$

если плотность $\gamma = \left|x^2 - 4y^2\right|$.

8. Найти площадь части поверхности $x^2 + z^2 = a^2$, вырезанной поверхностью $y^2 + z^2 = a^2 \quad (y \le 0)$.

9. Найти объём тела, ограниченного поверхностями

$$x + y = 2, \quad y = \sqrt{x}, \quad z = 12y, \quad z = 0.$$

10. Найти статический момент относительно плоскости Oyz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + 4x = 0, \quad z = 8 - y^2, \quad z = 0.$$

11. Найти объём тела, ограниченного поверхностями

$$z = \sqrt{64 - x^2 - 4y^2}, \quad z = 1, \quad x^2 + 4y^2 = 60 \text{ (внутри цилиндра)}.$$

12. Найти объём тела, заданного неравенствами

$$4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36, \quad z \ge -\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{63}}, \quad 0 \le y \le -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Вариант 5

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

   1) $f(x,y,z)=\sqrt{5+4z}+x\,y, \quad L: x=t,\ y=2,\ z=t^2-1, \quad t\in[-1,0]$;

   2) $f(x,y,z)=x\,y, \quad L: x^2+y^2=1, \quad z=5 \quad (x\ge 0, \quad y\ge 0)$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f(x,y)\,dy .$$

3. Вычислить $\iint\limits_D y\sin xy\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$y=\frac{\pi}{2}, \quad y=\pi, \quad x=1, \quad x=2 .$$

4. Вычислить $\iiint\limits_v \left(1+2x^3\right)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$y=9x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0 .$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{3}{x}, \quad y=8e^x, \quad y=3, \quad y=8.$$

6. Пластинка D задана неравенствами $1\le\dfrac{x^2}{4}+y^2\le 4, \quad y\ge 0, \quad y\le\dfrac{x}{2}$; $\gamma=\dfrac{8y}{x^3}$ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x+y=a, \quad x+y=b, \quad y=cx, \quad y=mx \quad (0<a<b, \quad 0<c<m) .$$

8. Найти площадь части поверхности $x^2+z^2=a^2$, вырезанной поверхностью $y^2+z^2=a^2 \quad (z\ge 0)$.

9. Найти объём тела, ограниченного поверхностями

$$x=20\sqrt{2y}, \quad x=5\sqrt{2y}, \quad z=0, \quad z+y=\frac{1}{2}.$$

10. Найти момент инерции относительно плоскости Oxz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=6x, \quad x^2+y^2=9x, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0, \quad y=0\ (y\le 0).$$

11. Найти объём тела, ограниченного поверхностями

$$z=\sqrt{\frac{16}{9}-x^2-9y^2}, \quad 2z=x^2+9y^2.$$

12. Найти объём тела, заданного неравенствами

$$1\le x^2+y^2+z^2\le 36, \quad z\ge\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}, \quad -\sqrt{3}x\le y\le\sqrt{3}x.$$

Вариант 6

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=x+y+z,\quad L$ – отрезок, соединяющий точки $A(2,0,0)$ и $B(4,\,1,\,2)$;

2) $f(x,y,z)=2x+yz,\quad L: x^2+y^2=4,\quad z=2\quad (x\le 0,\quad y\ge 0)$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)\,dx+\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy\int\limits_0^{\arccos y} f(x,y)\,dx.$$

3. Вычислить $\iint\limits_D y^2\cos\frac{xy}{2}\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями

$$x=0,\quad y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad y=\frac{x}{2}.$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V (27+54y^3)\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$y=x,\quad y=0,\quad x=1,\quad z=\sqrt{xy},\quad z=0.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{\sqrt{x}}{2},\ y=\frac{1}{2x},\ x=16.$

6. Пластинка D ограничена линиями $x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=16,\quad x=0,\quad y=0$, $(x\ge 0,\quad y\ge 0)$, $\gamma=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $xy=a^2,\quad xy=2a^2$, $x=y,\quad y=2x$, $(x>0,\quad y>0)$.

8. Найти площадь части поверхности $x^2+z^2=a^2$, вырезанной поверхностью $y^2+z^2=a^2\quad (z\le 0)$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x=\frac{5\sqrt{y}}{2},\quad x=\frac{5y}{6},\quad z=0,\quad z=\frac{5}{6}(3+\sqrt{y}).$$

10. Найти момент инерции относительно плоскости Oxz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=6\sqrt{2}y,\quad z=x^2+y^2-36,\quad z=0\quad (z\ge 0).$$

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=3\sqrt{4x^2+y^2},\quad z=10-4x^2-y^2.$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$25\le x^2+y^2+z^2\le 100,\quad z\le -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}},\quad \sqrt{3}x\le y\le -\sqrt{3}x.$$

Вариант 7

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=2x+y+z$, L – отрезок, соединяющий точки $A(5,0,2)$ и $B(7,\,1,2)$;

2) $f(x,y,z)=x+z$, L – часть кривой $\rho=1+\cos\varphi$ $(y\ge 0)$, лежащей в плоскости $z=0$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx.$$

3. Вычислить $\iint\limits_D 4ye^{2xy}dxdy$, если область D ограничена линиями

$$y=\ln 3,\quad y=\ln 4,\quad x=\frac{1}{2},\quad x=1.$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V ydxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$y=15x,\quad y=0,\quad x=1,\quad z=xy,\quad z=0.$$

5. Найти массу фигуры, ограниченной линиями

$$y^2-4y+x^2=0,\quad y^2-6y+x^2=0,\quad y=x,\quad x=0,$$

если плотность $\gamma=y$.

6. Пластинка D ограничена линиями $x=2,\quad y=0,\quad y^2=\dfrac{x}{2}$ $(y\ge 0)$; $\gamma=\dfrac{7x^2}{2}+6y$ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $xy=a^2,\quad xy=2a^2$, $x=y,\quad y=4x$, $(x<0,\quad y<0)$.

8. Вычислить площадь части гиперболического параболоида $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$, $(z\ge 0)$, вырезанной цилиндром $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=2,\quad x=\sqrt{y},\quad x=0,\quad z=0,\quad z=30y.$$

10. Найти момент инерции относительно плоскости Oxz тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=2y,\quad z=\dfrac{9}{4}-x^2,\quad z=0$, если плотность $\gamma=|x|$.

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=\sqrt{25-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}}.$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$1\le x^2+y^2+z^2\le 49,\quad 0\le z\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}},\quad y\le-\frac{x}{\sqrt{3}},\quad y\le-\sqrt{3}x.$$

Вариант 8

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=x^2-y^2+z$, L – отрезок AB, где $A(0,0,1)$, $B(4,3,1)$;

2) $f(x,y,z)=4xyz$, $L: x^2+y^2=9$, $z=1$ $(x\le 0, \quad y\ge 0)$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx+\int\limits_1^e dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx.$

3. Вычислить $\iint\limits_D 4y^2 \sin xydxdy$, если область D ограничена линиями

$$x=0, \quad y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad y=x.$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5}$, если область V ограничена поверхностями

$$\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x^2+y^2=12, \quad -y\sqrt{6}=x^2 \quad .$$

6. Пластинка D задана неравенствами $1\le\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 4, \quad x\ge 0, \quad y\ge\frac{3x}{2}$; $\gamma=\frac{x}{y}$ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=2px$, $y^2=2qx$, $x^2=2ry$, $x^2=2sy$, $(0<p<q, \quad 0<r<s)$.

8. Вычислить площадь части поверхности $x^2+y^2+2z=1$, вырезанной плоскостями $x=0, \ y=0, \ z=0$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x+y=2, \quad x=\sqrt{y}, \quad z=\frac{12x}{5}, \quad z=0.$$

10. Найти статический момент относительно плоскости Oyz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=2y, \quad x^2+y^2=5y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0.$$

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=\sqrt{100-9x^2-y^2}, \quad z=6, \quad 9x^2+y^2=51 \text{ (внутри цилиндра).}$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$25\le x^2+y^2+z^2\le 121, \quad -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}}\le z\le 0, \quad y\ge-\frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y\ge-\sqrt{3}x.$$

Вариант 9

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=3x+y-z,\quad L$ – отрезок AB, где $A(0,0,1),\ B(1,0,2)$;

2) $f(x,y,z)=x^3+y^3z,\quad L:\ (x^2+y^2)^2=2a^2xy,\quad z=2\quad \left(x\ge 0,\quad y\ge 0\right)$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\left(x,y\right)dy+\int\limits_{-1}^{0} dx\int\limits_{0}^{x^2} f\left(x,y\right)dy.$$

3. Вычислить $\iint\limits_D y\cos 2xy\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями

$$y=\frac{\pi}{2},\quad y=\pi,\quad x=\frac{1}{2},\quad x=1.$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V (3x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, если область V ограничена поверхностями

$$z=10y,\quad x+y=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\sqrt{12-x^2},\quad y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2},\quad x=0\quad (x\ge 0).$$

6. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $x=1,\quad y=0,\ y^2=4x,\quad (y\ge 0)$, если поверхностная плотность $\gamma=x+3y^2$.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2=y,\ x^2=2y,\ x^3=3y^2,\ x^3=2y^2$.

8. Вычислить площадь части конической поверхности $z^2=2xy$, отсекаемой плоскостями $x+y=1,\quad y=0,\quad x=0$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y=17\sqrt{2x},\quad y=2\sqrt{2x},\quad z=0,\quad x+z=\frac{1}{2}.$$

10. Найти статический момент относительно плоскости Oyz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2+2\sqrt{2}\,y=0,\quad z=x^2+y^2-4,\quad z=0\quad (z\ge 0).$$

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=\frac{21\sqrt{x^2+4y^2}}{2},\quad z=\frac{23}{2}-x^2-4y^2.$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$4\le x^2+y^2+z^2\le 64,\quad -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}}\le z\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}},\quad x\le y\le 0.$$

Вариант 10

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=2x-y+z$, L – ломаная OAB, где $O(0,\,0,\,2)$, $A(1,\,1,\,2)$, $B(2,1,2)$;

2) $f(x,y,z)=4x^2-y^2z,\quad L:\ x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},\ z=1$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0}f(x,y)\,dy+\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0}dx\int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0}f(x,y)\,dy.$$

3. Вычислить $\iint\limits_D y^2e^{-\frac{xy}{8}}dxdy$, если область D ограничена линиями

$$x=0,\quad y=2,\quad y=\frac{x}{2}.$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V 15xy\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$z=x^2+3y^2,\quad z=0,\quad y=x,\quad y=0,\quad x=1.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{3}{2}\sqrt{x},\quad y=\frac{3}{2x},\quad x=9.$$

6. Найти массу пластинки D, заданной неравенствами

$$1\le\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 2,\quad x\ge 0,\quad 0\le y\le\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

если поверхностная плотность $\gamma=x^2$.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$, $x=y,\quad y=0$.

8. Найти площадь части конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y=\frac{5\sqrt{x}}{3},\quad y=\frac{5x}{9},\quad z=0,\quad z=\frac{5(3+\sqrt{x})}{9}.$$

10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=4x,\quad z=10-y^2,\quad z=0.$$

11. Найти статический момент относительно плоскости Oxy однородного тела, ограниченного поверхностями

$$z=\sqrt{16-9x^2-y^2},\quad 6z=9x^2+y^2.$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$16\le x^2+y^2+z^2\le 100,\quad \sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}}\le z\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}},\quad \sqrt{3}x\le y\le 0.$$

Вариант 11

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=\sqrt{1+4x}, \quad L: x=z^2, \quad y=0 \ \left(-1\le z\le 0\right);$

2) $f(x,y,z)=2x-5yz, \quad L: x^2+y^2=36, \ z=1 \quad \left(x\ge 0, \quad y\ge 0\right).$

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^1 f\left(x,y\right)dy+\int\limits_1^e dx\int\limits_{\ln x}^1 f\left(x,y\right)dy$.

3. Вычислить $\iint\limits_D 12y\sin\left(2xy\right)dxdy$, если область D ограничена линиями

$$y=\frac{\pi}{4}, \quad y=\frac{\pi}{2}, \quad x=2, \quad x=3.$$

4. Вычислить: $\iiint\limits_V (4+8z^3)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$y=x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\sqrt{24-x^2}, \quad 2\sqrt{3}y=x^2, \quad x=0 \ (x\ge 0).$$

6. Найти массу пластины D, заданной неравенствами $1\le\frac{x^2}{4}+y^2\le 2, \ 0\le y\le\frac{x}{2}$, если поверхностная плотность $\gamma=y^3$.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\sqrt{x}, \quad y=2\sqrt{x}, \quad x=\sqrt{y}, \quad x=4\sqrt{y}.$$

8. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=b^2 \quad \left(0<b<a\right)$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=8, \quad y=\sqrt{2x}, \quad y=0, \quad z=0, \quad z=\frac{15x}{11}.$$

10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=7x, \quad x^2+y^2=10x, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0, \quad y=0\ (y\le 0).$$

11. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$z=24(x^2+y^2)+1, \quad z=48x+1.$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$16\le x^2+y^2+z^2\le 100, \quad z\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}, \quad -\sqrt{3}x\le y\le -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Вариант 12

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=x^2z\cdot\sqrt[3]{y},\quad L:\ y=x^3,\ z=2,\quad x\in[0,1]$;

2) $f(x,y,z)=x\,y\,z,\quad L:\ \dfrac{y^2}{4}+z^2=1,\quad x=3\quad (z\ge 0,\quad y\ge 0)$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dx\ .$$

3. Вычислить $\iint\limits_D y^2\cos(xy)\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x\ .$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V (1+2x^3)\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$y=36x,\quad y=0,\quad x=1,\quad z=\sqrt{xy},\quad z=0\ .$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad x=0\ \ (0\le x\le \pi/2)\ .$$

6. Найти массу пластины D, заданной неравенствами $1\le\dfrac{x^2}{4}+y^2\le 25,\quad x\ge 0\ ,\ y\ge\dfrac{x}{2}$,

если поверхностная плотность $\gamma=\dfrac{x}{y^2}$.

7. Вычислить массу фигуры, ограниченной линиями $4\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=1,\quad x=0,\ \ y=0$,

если плотность $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{x\,y}}$.

8. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, расположенной вне цилиндра $x^2+z^2=b^2\quad (0<b<a)$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x+y=4,\quad y=\sqrt{2x},\quad y=0,\quad z=3y,\quad z=0\ .$$

10. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=8\sqrt{2}y,\quad z=x^2+y^2-64,\quad z=0\ (z\ge 0)\ .$$

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=2-18[(x+1)^2+y^2],\quad z=-36x-34\ .$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$16\le x^2+y^2+z^2\le 64,\quad z\ge-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}},\quad -\frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le-\sqrt{3}x\ .$$

Вариант 13

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=zx^2$, $\quad L: z=\sqrt{y},\ x=1\ \ (0\le y\le 2)$;

2) $f(x,y,z)=\sqrt{2yx+z^2}$, L: окружность $x^2+y^2+z^2=1,\quad x=y$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^{\pi/4} dy \int\limits_0^{\sin y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_0^{\cos y} f(x,y)\,dx .$$

3. Вычислить $\iint\limits_D y e^{xy/4}\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$y=\ln 2,\quad y=\ln 3,\quad x=4,\quad x=8 .$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V 21xz\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$y=x,\quad y=0,\quad x=2,\quad z=xy,\quad z=0 .$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2-4y+x^2=0,\quad y^2-6y+x^2=0,\quad y=\sqrt{3}x,\quad x=0 .$$

6. Найти массу пластины D, ограниченной линиями $x=2,\quad y=0,\ y^2=\dfrac{x}{2}\ (y\ge 0)$, если $\gamma=2x+3y^2$ – поверхностная плотность пластины.

7. Ввести новые переменные u, v и вычислить интеграл $\iint\limits_D (x^2y^2+y^2)\,dxdy$, если область D ограничена линиями $y=\dfrac{1}{x},\quad y=\dfrac{2}{x},\quad y=x,\quad y=3x$.

8. Найти площадь поверхности конуса $x^2+y^2=\dfrac{1}{3}z^2\quad (z\ge 0)$, ограниченного поверхностью $y+z=a\quad (a>0)$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x=\frac{5}{6}\sqrt{y},\quad x=\frac{5}{18}y,\quad z=0,\quad z=\frac{5}{18}\left(3+\sqrt{y}\right).$$

10. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=2y,\quad z=\frac{13}{4}x^2,\quad z=0 .$$

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=\sqrt{1-4x^2-y^2},\quad \frac{3z}{2}=4x^2+y^2 .$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$4\le x^2+y^2+z^2\le 49,\quad z\ge\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}},\quad y\le 0,\quad y\le\sqrt{3}x .$$

Вариант 14

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

   1) $f(x,y,z)=\sqrt{y-1+4z},\quad L: z=x^2+x,\quad y=3,\ -1\le x\le 0$;

   2) $f(x,y)=x+y,\quad$ L: правый лепесток лемнискаты $\rho^2=\cos 2\varphi$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)\,dy .$$

3. Вычислить $\iint\limits_D 4y^2 \sin(2xy)\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$x=0,\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x .$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(1+\frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3})^6}$, если область V ограничена поверхностями

$\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\sqrt{18-x^2},\quad y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2} .$$

6. Найти массу пластины D, заданной неравенствами $1\le\dfrac{x^2}{16}+y^2\le 4$, $0\le x\le 4y$, если $\gamma=5xy^7$ – поверхностная плотность.

7. Ввести новые переменные u и v и вычислить интеграл $\iint\limits_D \dfrac{(x+y)^2}{x}dxdy$, если область D ограничена линиями $y=1-x,\quad y=3-x,\quad y=\dfrac{x}{2},\quad y=2x$.

8. Найти площадь поверхности конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, ограниченного поверхностью $x+2z=3$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x=19\sqrt{2y},\quad x=4\sqrt{2y},\quad z=0,\quad z+y=2 .$$

10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=3y,\quad x^2+y^2=6y,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=0 .$$

11. Найти момент инерции относительно плоскости YOZ тела, ограниченного поверхностями $z=6\sqrt{x^2+9y^2},\quad z=16-x^2-9y^2$, если плотность $\gamma=|y|$.

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$36\le x^2+y^2+z^2\le 121,\quad z\le-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{99}},\quad y\ge\sqrt{3}x,\quad y\ge 0 .$$

Вариант 15

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

   1) $f(x,y,z)=\sqrt{1+9xyz},\quad L: y=x^3,\ z=1\ \ (-1\le x\le 1)$;

   2) $f(x,y,z)=x^2z,\quad L: x^2+y^2=a^2,\quad z=2$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+\int\limits_1^e dy\int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)\,dx .$$

3. Вычислить $\iint\limits_D 2y\cos 2xy\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$y=\frac{\pi}{4},\quad y=\frac{\pi}{2},\quad x=1,\quad x=2 .$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2+3y^2)\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$z=10x,\quad x+y=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0 .$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2-2y+x^2=0,\quad y^2-6y+x^2=0,\quad y=\frac{x}{\sqrt{3}},\quad x=0 .$$

6. Найти массу пластинки D , ограниченной линиями $x=\frac{1}{2},\quad y=0,\ y^2=8x\ \ (y\ge 0)$, если $\gamma=7x+3y^2$ – поверхностная плотность.

7. Ввести новые переменные u и v и вычислить интеграл $\iint\limits_D (x^3+y^3)\,dxdy$, если область D ограничена линиями $y=x^2,\quad y=3x^2,\quad 2y=\frac{1}{x},\quad 2y=\frac{3}{x}$.

8. Вычислить интеграл $\int\limits_\sigma z\,d\sigma$, где σ – часть конуса $x^2+y^2=z^2$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=a^2$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=8,\quad x=\sqrt{2y},\quad x=0,\quad z=0,\quad z=y .$$

10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=6\sqrt{2}x,\quad z=x^2+y^2-36,\quad z=0\ (z\ge 0) .$$

11. Найти статический момент относительно плоскости Oxz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$z=26(x^2+y^2)-2,\quad z=-52x-2 .$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$4\le x^2+y^2+z^2\le 64,\quad 0\le z\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}},\quad y\le\sqrt{3}x,\quad y\le\frac{x}{\sqrt{3}} .$$

Вариант 16

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

   1) $f(x,y,z)=x+2y-z,\quad L$: ломаная ABC, где $A(1,0,0),\quad B(1,1,0),\quad C(1,1,1)$;

   2) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$, L: половина окружности $x^2+y^2+z^2=4,\quad x=-y\quad (y\ge 0)$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)\,dx .$$

3. Вычислить $\iint\limits_D y^2 e^{-xy/2}\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$x=0,\quad y=\sqrt{2},\quad y=x .$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V (60y+90z)\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$y=x,\quad y=0,\quad x=1,\quad z=x^2+y^2,\quad z=0 .$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{2}{x},\quad y=5e^x,\quad y=2,\quad y=5 .$$

6. Найти массу пластины D, заданной неравенствами $1\le\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 3$, $y\ge 0$, $y\le\frac{2}{3}x$, если $\gamma=\frac{y}{x}$ – поверхностная плотность.

7. Ввести новые переменные u и v и вычислить интеграл $\iint\limits_D xy(x+y)\,dxdy$, если область D ограничена линиями $y=\frac{1}{x},\quad y=\frac{2}{x},\quad x-y=-1,\quad x-y=1$.

8. Вычислить интеграл $\int\limits_\sigma (x+y+z)\,d\sigma$, где σ – полусфера

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad z\ge 0 .$$

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x+y=4,\quad x=\sqrt{2y},\quad y=0,\quad z=\frac{3x}{5},\quad z=0 .$$

10. Найти статический момент относительно плоскости Oxz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=2\sqrt{2}y,\quad z=x^2+y^2-4,\quad z=0\ (z\ge 0) .$$

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=-2[(x-1)^2+y^2]-1,\quad z=4x-5 .$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$36\le x^2+y^2+z^2\le 144,\quad -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}}\le z\le 0,\quad y\ge\sqrt{3}x,\quad y\ge\frac{x}{\sqrt{3}} .$$

Вариант 17

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=xz+\sqrt{y+1},\quad L: y=x^2-1,\ z=3\quad (-1\le x\le 0)$;

2) $f(x,y,z)=3x-yz,\qquad L:\ \begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=3 \end{cases}\ (x\ge 0,\quad y\le 0)$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx .$$

3. Вычислить $\iint\limits_D y\sin xy\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$y=\pi,\quad y=2\pi,\quad x=\frac{1}{2},\quad x=1 .$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V \left(\frac{10}{3}x+\frac{5}{3}\right)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$y=9x,\quad y=0,\quad x=1,\quad z=\sqrt{xy},\quad z=0 .$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x^2+y^2=36,\quad 3\sqrt{2}y=x^2,\quad y\ge 0 .$$

6. Найти массу пластины D, заданной неравенствами $1\le x^2+\frac{y^2}{25}\le 4,\quad y\ge 0$, если $\gamma=\frac{y}{7}$ – поверхностная плотность.

7. Ввести новые переменные u и v и вычислить интеграл $\iint\limits_D x^2dxdy$, если область D ограничена линиями $y=x^3,\quad y=2x^3,\quad 2y=x,\quad y=3x$.

8. Вычислить интеграл $\int\limits_{(\sigma)}\left(x^2+y^2\right)d\sigma$, где (σ) – граница тела, заданного неравенством $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y=6\sqrt{3x},\quad y=\sqrt{3x},\quad z=0,\quad x+z=3 .$$

10. Найти статический момент относительно плоскости Oyz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=4x,\quad z=12-y^2,\quad z=0 .$$

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=-2(x^2+y^2)-1,\quad z=4y-1 .$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$9\le x^2+y^2+z^2\le 81,\quad -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\le z\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}},\quad 0\le y\le -x .$$

Вариант 18

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=xz, \quad L: y=\ln x,\ z=x \quad \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\le x\le\sqrt{\dfrac{15}{2}}\right)$;

2) $f(x,y,z)=xyz, \quad L: \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, \quad z=5 \quad (x\le 0, \quad y\le 0)$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{y^3} f(x,y)\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dx .$$

3. Вычислить $\iint\limits_D y^2\cos 2xy\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$x=0, \quad y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad y=\frac{x}{2}.$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V (9+18z)\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$y=4x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0 .$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=3\sqrt{x}, \quad y=\frac{3}{x}, \quad x=4 .$$

6. Найти массу пластины D заданной неравенствами, $1\le x^2+\dfrac{y^2}{9}\le 4, \quad y\ge 0,$ если $\gamma=x^2$ – поверхностная плотность.

7. Ввести новые переменные u и v и вычислить интеграл $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, где область D ограничена линиями $y=\dfrac{1}{x}, \quad y=\dfrac{3}{x}, \quad y=3x, \quad y=2x \quad x\ge 0, \quad y\ge 0$.

8. Вычислить интеграл $\int\limits_\sigma \dfrac{d\sigma}{(1+x+y)^2}$, где σ – верхняя грань тетраэдра, заданного неравенствами $x+y+z\le 1, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y=\frac{5}{6}\sqrt{x}, \quad y=\frac{5}{18}x, \quad z=0, \quad z=\frac{5}{18}(3+\sqrt{x}) .$$

10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=8x, \quad x^2+y^2=11x, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0, \quad y=0 \quad (y\le 0).$$

11. Найти статический момент относительно плоскости Oyz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$z=\frac{3}{2}\sqrt{x^2+25y^2}, \quad z=\frac{5}{2}-x^2-25y^2 .$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$36\le x^2+y^2+z^2\le 144, \quad -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\le z\le -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{15}}, \quad 0\le y\le -\sqrt{3}x.$$

Вариант 19

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

   1) $f(x,y,z)=x\,z, \quad L:\ y=1-\ln\left(x^2-1\right), \quad z=3 \quad \left(3\le x\le 4\right)$;

   2) $f(x,y,z)=x\,y\,z, \quad L:\ \dfrac{y^2}{4}+z^2=1, \quad x=3 \quad \left(z\ge 0\right)$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\left(x,y\right)dy+\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\left(x,y\right)dy .$$

3. Вычислить $\iint\limits_D 8\,ye^{4xy}\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями

$$y=\ln 3, \quad y=\ln 4, \quad x=\frac{1}{4}, \quad x=\frac{1}{2}.$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V 3y^2 dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$y=2x, \quad y=0, \quad x=2, \quad z=xy, \quad z=0.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2-4y+x^2=0, \quad y^2-10y+x^2=0, \quad y=\frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y=\sqrt{3}x .$$

6. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $x=2, \quad y^2=2x, \quad y=0\ (y\ge 0)$, если $\gamma=\dfrac{7x^2}{4}+\dfrac{y}{2}$ – поверхностная плотность.

7. Ввести новые переменные u и v и вычислить интеграл $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, где область D ограничена линиями

$$y=x^3, \quad y=2\,x^3, \quad y^2=3\,x, \quad y^2=5\,x.$$

8. Вычислить массу части поверхности

$$z=x^2+y^2 \quad \left(z\le 1\right),$$

если плотность $\gamma=\left|\,xyz\,\right|$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=18, \quad y=\sqrt{3x}, \quad y=0, \quad z=0, \quad z=\frac{5x}{11}.$$

10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=4\sqrt{2}x, \quad z=x^2+y^2-16, \quad z=0 \quad (z\ge 0).$$

11. Найти статический момент относительно плоскости Oyz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$z=30(x^2+y^2)+1, \quad z=60y+1 .$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$36\le x^2+y^2+z^2\le 144, \quad z\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}, \quad \sqrt{3}x\le y\le\frac{x}{\sqrt{3}} .$$

Вариант 20

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=3z, \quad L:\ y=\ln\left(1-x^2\right),\ z=2 \quad \left(0\le x\le \frac{1}{4}\right)$;

2) $f(x,y,z)=\sqrt{6x^2-2y^2}, \quad L: x^2+y^2+z^2=4, \quad y=x, \quad z\ge 0$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f\left(x,y\right)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f\left(x,y\right)dx .$$

3. Вычислить $\iint\limits_D 3y^2 \sin\frac{xy}{2}\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$x=0, \quad y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}, \quad y=\frac{2}{3}x .$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}\right)^4}$,

если область V ограничена поверхностями $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$.

5. Найти момент инерции относительно оси oy однородной фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{25}{4}-x^2, \quad y=x-\frac{5}{2} .$$

6. Найти массу пластины *D,* заданной неравенствами $1\le x^2+\frac{y^2}{16}\le 9, \quad y\ge 0, \quad y\le 4x$,

если $\gamma=\frac{y}{x^3}$ – поверхностная плотность.

7. Ввести новые переменные u и v и вычислить интеграл $\iint\limits_{(D)} \frac{x^2\sin xy}{y}dxdy$, где область $\left(D\right)$ ограничена линиями $2y=x^2, \quad 3y=x^2, \quad y^2=x, \quad y^2=4x$.

8. Вычислить массу части поверхности $z=0,5\cdot(x^2+y^2)$ при $z\le 1$, если плотность $\gamma=z$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x+y=6, \quad y=\sqrt{3x}, \quad z=4y, \quad z=0 .$$

10. Найти статический момент относительно плоскости Oxz однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=4y, \quad z=4-x^2, \quad z=0$.

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=\sqrt{49-x^2-9y^2}, \quad z=3, \quad x^2+9y^2=33 \text{ (внутри цилиндра).}$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$36\le x^2+y^2+z^2\le 100, \quad z\ge -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}}, \quad \frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le \sqrt{3}x .$$

Вариант 21

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{x-y}, \quad L: x=2t,\ \ y=t-2,\ \ z=2, \quad t\in[0,2]$;

2) $f(x,y,z)=2x+3y+z, \quad L:\ x^2+y^2=1, \quad z=3 \quad (x\ge 0, \quad y\le 0)$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y f(x,y)\,dx+\int\limits_1^e dy\int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)\,dx .$$

3. Вычислить $\iint\limits_D y\cos(xy)\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$y=\pi,\ \ y=3\pi,\ \ x=\frac{1}{2},\ \ x=1 .$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V x^2\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$z=10(x+3y),\ \ x+y=1,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0 .$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2-2y+x^2=0, \quad y^2-4y+x^2=0, \quad y=x, \quad x=0 .$$

6. Пластинка D ограничена линиями $x=2, y=0,\ y^2=2x\ \ (y\ge 0)$; $\gamma=\dfrac{7x^2}{4}+y$ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

7. Вычислить массу однородной пластины, заданной неравенствами $\sqrt{3}\le\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{5}, \quad 0\le y\le x$.

8. Вычислить массу полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2, \quad (z\ge 0)$ с поверхностной плотностью $\gamma=\dfrac{z}{a}$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x=7\sqrt{3y}, \quad x=2\sqrt{3y}, \quad z=0, \quad z+y=3 .$$

10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=4y, \quad x^2+y^2=7y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0 .$$

11. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $z=2-18(x^2+y^2), \quad z=2-36y$.

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$9\le x^2+y^2+z^2\le 64, \quad z\ge\sqrt{\frac{(x^2+y^2)}{99}}, \quad y\le\frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y\le-\frac{x}{\sqrt{3}} .$$

Вариант 22

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=\sqrt{x+y^2+2z^2}$, L: $x=y^2$, $z=y$ $(0\le y\le 1)$;

2) $f(x,y,z)=y\sqrt{xz}$, L: $2x^2+y^2=1$, $z=x$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dx\int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy$.

3. Вычислить $\iint\limits_D y^2 e^{\frac{-xy}{2}}\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$x=0,\quad y=1,\quad y=\frac{x}{2}.$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V (8y+12z)\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$y=x,\quad y=0,\quad x=1,\quad z=3x^2+2y^2,\quad z=0.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{2}{x},\quad y=7e^x,\quad y=2,\quad y=7.$$

6. Пластинка D задана системой неравенств $1\le\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}\le 5,\quad x\ge 0,\quad y\ge 2x$; $\gamma=\frac{x}{y}$ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

7. Найти площадь фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной линиями $xy=1$, $xy=2$, $y=2x$, $x=2y$.

8. Вычислить массу части поверхности $x^2+y^2=2z$, вырезанную поверхностью $z=\sqrt{x^2+y^2}$, если плотность $\gamma=z$.

9. Найти момент инерции относительно плоскости Oxz однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x=\frac{5\sqrt{y}}{3},\quad x=\frac{5y}{9},\quad z=0,\quad z=\frac{5\left(3+\sqrt{y}\right)}{9}.$$

10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=4\sqrt{2}y,\quad z=x^2+y^2-16,\quad z=0\quad (z\ge 0).$$

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=9\sqrt{x^2+4y^2},\quad z=22-x^2-4y^2.$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$49\le x^2+y^2+z^2\le 144,\quad z\le -\sqrt{\frac{\left(x^2+y^2\right)}{99}},\quad y\ge\frac{x}{\sqrt{3}},\quad y\ge -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Вариант 23

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=yz, \quad L: \quad y^2=2x,\ z=3$, от точки $A(2,2,3)$ до точки $B(8,4,3)$;

2) $f(x,y,z)=3xyz, \quad L:\ x^2+y^2=a^2, \quad z=2 \quad (x\le 0, \quad y\le 0)$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\cos x} f(x,y)\,dy .$$

3. Вычислить $\iint\limits_D y\sin(2xy)\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$y=\frac{\pi}{2},\ y=\frac{3\pi}{2},\ x=\frac{1}{2},\ x=2 .$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V 63(1+2\sqrt{y})\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$y=x, \quad y=0, \quad x=1, \quad z=\sqrt{xy}, \quad z=0 .$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x=27-y^2$, $x=-6y$.

6. Найти массу пластинки *D,* заданной системой неравенств $1\le \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 5, \quad x\ge 0,$ $y\ge \frac{2x}{3}$, если $\gamma=\frac{x}{y}$ – поверхностная плотность.

7. Вычислить $\iint\limits_D \left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^3 dxdy$, где область D ограничена линией $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ и осями координат.

8. Вычислить $\int\limits_\sigma \sqrt{1+4y^2+4x^2}\,d\sigma$, где σ – конечная часть поверхности $z=1-x^2-y^2$, отсеченная плоскостью $z=0$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=18, \quad x=\sqrt{3}y, \quad x=0, \quad z=0, \quad z=\frac{10y}{11} .$$

10. Найти момент инерции относительно оси *Oz* однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2+2x=0, \quad z=\frac{17}{4}-y^2, \quad z=0 .$$

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=\sqrt{16-x^2-4y^2}, \quad z=\sqrt{\frac{\left(x^2+4y^2\right)}{15}} .$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$9\le x^2+y^2+z^2\le 81, \quad 0\le z\le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}}, \quad y\le 0, \quad y\le \frac{x}{\sqrt{3}} .$$

Вариант 24

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

   1) $f(x,y,z)=x\sqrt{yz}, \quad L: \ x^2+y^2=9, \quad z=y$;

   2) $f(x,y)=y, \quad L$ – половина кривой $\rho=1+\cos\varphi \quad (y\le 0)$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f(x,y)\,dx .$$

3. Вычислить $\iint\limits_D y^2\cos(xy)\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$x=0, \quad y=\sqrt{\pi}, \quad y=2x .$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V (x+y)\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями

$$y=x, \ \ y=0, \ \ x=1, \ \ z=30x^2+60y^2, \ \ z=0 .$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x=\sqrt{72-y^2}\ , \ 6x=y^2\ , \ y=0\,, \ (y\ge 0).$$

6. Найти массу пластинки D, заданной системой неравенств $1\le \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 9, \quad 0\le y\le \dfrac{3}{2}x$, если $\gamma=x^5y$ – поверхностная плотность.

7. Вычислить $\iint\limits_D \left(\sqrt{\dfrac{x}{3}}+\sqrt{\dfrac{y}{2}}\right)^2 dxdy$, где область D ограничена линией $\sqrt{\dfrac{x}{3}}+\sqrt{\dfrac{y}{2}}=1$ и осями координат.

8. Вычислить $\iint\limits_\sigma \left(3x^2+5y^2+3z-2\right)d\sigma$, где σ – часть поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=b$.

9. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x+y=6, \quad x=\sqrt{3y}, \quad z=\frac{4x}{5}, \quad z=0 .$$

10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=9x, \quad x^2+y^2=12x, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \ \ z=0, \quad y=0 \ \ (y\ge 0) .$$

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=\sqrt{36-x^2-y^2}, \quad z=2, \quad x^2+y^2=27 \ \ \text{(внутри цилиндра)}.$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$49\le x^2+y^2+z^2\le 169, \quad -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{24}}\le z\le 0, \quad y\ge 0, \quad y\ge \frac{x}{\sqrt{3}} .$$

Вариант 25

1. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(x,y,z)\,dl$ от функции $f(x,y,z)$ по дуге кривой L:

1) $f(x,y,z)=3x^2+y^2z, \quad L:\ x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ z=2 \quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

2) $f(x,y,z)=x-y, \quad L: x^2+y^2=16, \quad x\ge 0$.

2. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^3} f(x,y)\,dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy .$$

3. Вычислить $\iint\limits_D 6ye^{\frac{xy}{3}}\,dxdy$, если область D ограничена линиями

$$y=\ln 2,\quad y=\ln 3,\quad x=3,\quad x=6 .$$

4. Вычислить $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\right)^2}$, если область V ограничена поверхностями

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0 .$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{6-x^2}$, $y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}$.

6. Пластинка D ограничена линией $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=1$; $\gamma=x^4$ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

7. Вычислить $\iint\limits_D\left(\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{y}{3}}\right)dxdy$, где область D ограничена линией $\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{y}{3}}=1$ и осями координат.

8. Вычислить $\int\limits_\sigma x(y+z)d\sigma$, где σ – часть поверхности $x=\sqrt{b^2-y^2}$, отсеченная плоскостями $z=0$, $z=c$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y=\sqrt{15x},\ y=\sqrt{15}x,\ z=0,\ z=\sqrt{15}\left(1+\sqrt{x}\right).$$

10. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+2\sqrt{2}\,x=0,\quad z=x^2+y^2-4,\quad z=0\quad (z\ge 0)$.

11. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z=4-6\left(x^2+y^2\right),\quad z=12y+4 .$$

12. Найти объем тела, заданного неравенствами

$$16\le x^2+y^2+z^2\le 100,\quad -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\le z\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}},\quad 0\le y\le x .$$

Индивидуальные задания по теории поля

Вариант 1

1. Найти производную поля $u=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}-x^2yz$ в точке $A(1,2,1)$ в направлении, образующем равные острые углы с осями координат.

2. Найти угол между градиентами скалярных полей

$$u(x,y,z)=\frac{x^2}{yz^2},\ v(x,y,z)=\frac{x^3}{2}+6y^3+3z^3\sqrt{6} \quad \text{в точке } M\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

3. Показать, что поле $\vec{a}=\left(2xyz+z^2-\dfrac{z}{x^2}\right)\vec{i}+\left(x^2z-1\right)\vec{j}+\left(x^2y+2xz+\dfrac{1}{x}\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля градиентов функции $u(x,y,z)=y^2+xz+x-z$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=\left(yz-x^2\right)\vec{i}+\left(xz-y^2\right)\vec{j}+\left(xy-z^2\right)\vec{k}$ при перемещении по линии $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1,\\ z=1\end{cases}$ из точки $A(2,0,1)$ в точку $B(0,4,1)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=y^2\vec{i}+y\vec{j}+x\vec{k}$ через плоский треугольник с вершинами в точках $A(2,0,0)$, $B(0,-1,0)$, $C(2,0,4)$. Нормальный вектор плоскости образует острый угол с осью OX.

7. Найти поток поля $\vec{a}=(x+y)\,\vec{i}+(y+2z)\,\vec{j}+(x+y+z)\,\vec{k}$ через полусферу $z=R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля $\vec{a}=yz\vec{i}+\left(xz-x^2+x\right)\vec{j}+xy\vec{k}$, принимая за поверхность интегрирования боковую поверхность пирамиды, ограниченную плоскостями $x-3y-2z=6,\ x=0,\ y=0\ \ (z\le 0)$, а за контур интегрирования – линию пересечения её с плоскостью $z=0$.

9. Доказать, что $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})=0$.

10. Вычислить $\vec{\nabla}\times\left((\vec{r},\vec{a})\,\vec{b}\right)$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ постоянные векторы, а $\vec{r}$ - радиус-вектор точки.

Вариант 2

1. Дано скалярное поля $u(M)=\sqrt{x^2+y^2-z^2}$. Найти $\vec{\nabla}u$, $\vec{\nabla}u^2$, $\vec{\nabla}\dfrac{1}{u}$. Построить поверхности уровня $u=0,\ u=1,\ u=2$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=4\ln\left(3+x^2\right)-8xyz$ в точке $M(1,1,1)$ по направлению нормали к поверхности $x^2-2y^2+2z^2=1$, образующей тупой угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле $\vec{a}=\left(3x^2(y-z)+\frac{1}{y}+\frac{2y}{x^2}\right)\vec{i}+\left(x^3-\frac{x}{y^2}-\frac{2}{x}\right)\vec{j}+\left(-x^3-2z\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля градиентов функции $u(x,y,z)=z^2+xy+x-y$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=\dfrac{yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}}{1+x^2y^2z^2}$ при перемещении по линии (L): $x=1,\ y^2+9z^2=4$ из точки $A\left(1,\sqrt{3},\frac{1}{3}\right)$ в точку $B\left(1,1,\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=(x+2y)\vec{i}+z^2\vec{j}+y\vec{k}$ через часть поверхности $x^2+y^2=4$, лежащую в I октанте и отсеченную плоскостями $z=0,\ z=3$, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=xy\vec{i}-(x+y)\vec{j}-zx\vec{k}$ через часть поверхности $y=7-\sqrt{z^2+x^2}$, отсеченную плоскостью $y=3$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=2z\vec{i}-(3x+z)\vec{j}-x^2z\vec{k}$, принимая за поверхность интегрирования поверхность, лежащую в I октанте, образованную поверхностью $y^2=1-x-z$ и плоскостями $x=0,\ z=0$, а за контур интегрирования – линию пересечения этой поверхности с плоскостью $y=0$.

9. Доказать, что вектор $\vec{a}=u\cdot\operatorname{grad}v$ ортогонален к вектору $\operatorname{rot}\vec{a}$, если $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ – дифференцируемые скалярные функции.

10. Найти $\nabla\cdot\left(\vec{a}\times(\vec{r}\times\vec{b})\right)$, где $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Вариант 3

1. Найти градиент поля $u(M)=\frac{1}{r}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $M(x,y,z)$. Построить поверхности уровня поля, соответствующие значениям $u=1,\ u=2,\ u=3$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=x\sqrt{y}+y\sqrt{z}$ в точке $M(2{,}4{,}2)$ по направлению нормали к поверхности $4z+2x^2-y^2=0$, образующей тупой угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле $\vec{a}=\left(3yx^{3y-1}-1\right)\vec{i}+\left(3x^{3y}\ln x-z\right)\vec{j}+(-y-1)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля градиентов функции $u(x,y,z)=yz+\frac{1}{2}x^2+y-z$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=\dfrac{yz\vec{i}-xz\vec{j}-xy\vec{k}}{zy\sqrt{y^2z^2-x^2}}$ при перемещении по прямой от точки $A\left(\sqrt{2},2\sqrt{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ до точки $B(2,4,1)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=y\vec{i}+\vec{j}+\frac{z}{\pi}\vec{k}$ через часть поверхности $z=6-\sqrt{x^2+y^2}$, лежащую в IV октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=2x^2\vec{i}+2y^2\vec{j}+4z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность, образованную полусферой $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ и параболоидом $2z=x^2+y^2-1$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=x\,\vec{i}+\left(4y^2+y^2z\right)\vec{j}-4z^2\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $y^2+z^2=9,\ x=1,$ а за поверхность интегрирования – поверхность цилиндра $y^2+z^2=9,\ \ x=5,$ натянутую на этот контур.

9. Доказать, что $\operatorname{rot}(u\,\vec{a})=u\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{grad}u\times\vec{a}$, где $u=u(x,y,z)$ — дифференцируемая функция.

10. Найти $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f(r)\right)$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, $r=|\,\vec{r}\,|$, $f(x)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция. В каком случае $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f(r)\right)=0$?

Вариант 4

1. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого имеет вид $u=(\vec{a},\vec{r})$, где $\vec{a}$ — постоянный вектор, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки поля. Построить поверхности равного потенциала $u=\pm1,\ \ u=\pm2$, если $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=2\ln\left(x^2+6\right)-4xyz$ в точке $M(1,1,1)$ по направлению нормали к поверхности $x^2+2y^2-2z^2=1$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле $\vec{a}=\left(\dfrac{zy}{x^2}+\dfrac{1}{1+(x-y)^2}\right)\vec{i}+\left(2y-\dfrac{1}{1+(x-y)^2}-\dfrac{z}{x}\right)\vec{j}-\left(\dfrac{y}{x}+1\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля $\vec{a}=(y-1)\,\vec{i}+(x+1)\,\vec{j}+(z-2)\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=\dfrac{x^2}{y}\vec{i}+xy\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ при перемещении по меньшей дуге кривой $x^{2/3}+z^{2/3}=2^{2/3},\ y=1$ от точки $A(2,1,0)$ к точке $B(0,1,2)$,

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=x\,\vec{j}+\frac{1}{\pi}(z+4)\,\vec{k}$ через часть поверхности $z=4-x^2-y^2$, лежащую в IV октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=(x+z)\,\vec{i}+(x+y)\,\vec{j}+(y+z)\,\vec{k}$ через часть поверхности $z=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$, отсеченную плоскостью $z=1$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля $\vec{a}=\left(yz+4x+z^2\right)\vec{i}+xz\,\vec{j}+\left(xy+y^2\right)\vec{k}$, принимая за контур интегрирования эллипс $9z^2+4x^2=36,\ \ y=0,$ а за поверхность интегрирования – часть поверхности $9z^2+4x^2=36\ \ (0\le y\le 3)$ и часть плоскости $y=3$.

9. Доказать, что $\operatorname{div}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$.

10. Найти $\vec{\nabla}\times(r\,\vec{a})$, где $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, а $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Вариант 5

1. Потенциал электростатического поля имеет вид $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Найти длину и направление вектора напряженности поля. Какую форму имеют эквипотенциальные поверхности?

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=\frac{1}{4}x^2y-\sqrt{x^2+5z^2}$ в точке $M\left(-2,\frac{1}{2},1\right)$ по направлению нормали к поверхности $z^2=x^2+4y^2-4$, образующей тупой угол с направлением оси OZ.

3. Показать, что поле $\vec{a}=2\left(x+y-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2yz}\right)\vec{i}+2\left(x+y+\frac{1}{xy^2z}\right)\vec{j}-2\left(z-\frac{1}{xyz^2}\right)\vec{k}$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля $\vec{a}=(-x+1)\,\vec{i}+(z+3)\,\vec{j}+(y+3)\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу вектора силы $\vec{F}=\frac{x^2}{y}\vec{i}+xy\vec{j}+xz\vec{k}$ по меньшей дуге окружности $x^2+z^2=1$, $y=1$, от точки $A(1,1,0)$ до точки $B(0,1,1)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=x\vec{i}+x\vec{j}+z\vec{k}$ через плоский треугольник с вершинами в точках $A(-4,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(-4,0,4)$. Нормальный вектор плоскости образует с осью OY острый угол.

7. Найти поток поля $\vec{a}=y\,\vec{i}+y^2\,\vec{j}+2z^2\vec{k}$ через границу пространственной области $\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)<z<6-\sqrt{x^2+y^2}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=2xy\vec{i}+\left(x^2+2yz\right)\vec{j}+3y^2\vec{k}$, принимая за контур интегрирования астроиду $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $z=0$, а за поверхность интегрирования – часть плоскости XOY, ограниченную астроидой.

9. Доказать, что поле вектора $\vec{\nabla}u\times\vec{\nabla}v$ соленоидально, если $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ – дифференцируемые скалярные функции.

10. Найти $\vec{\nabla}\times\vec{a}$, где $\vec{a}=\cos r\left(y\vec{i}-2\vec{j}+xz\vec{k}\right)$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, $r=|\,\vec{r}\,|$.

Вариант 6

1. Потенциал электростатического поля имеет вид $u(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right)-z^2$. Найти модуль и направление вектора напряженности поля. Какую форму имеют эквипотенциальные поверхности поля?

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=xz^2-\sqrt{x^3y}$ в точке $M(2,2,4)$ по направлению нормали к поверхности $x^2-y^2-3z+12=0$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле

$$\vec{a}=\left(yz+z^2-y+\frac{z}{x^2y}\right)\vec{i}+\left(xz-x-1+\frac{z}{xy^2}\right)\vec{j}+\left(xy+2xz-\frac{1}{xy}\right)\vec{k}$$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + (x-y)^2\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу вектора силы $\vec{F} = (y-z)\,\vec{i} + (z-x)\,\vec{j} + (x-y)\,\vec{k}$ при перемещении по линии $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x+4z=4. \end{cases}$

6. Вычислить поток поля $\vec{a} = (x+2z)\,\vec{i} + x\,\vec{j} + y^2\vec{k}$ через часть поверхности $x^2+y^2=4$, лежащую во II октанте и отсеченную плоскостями $z=0$, $z=1$, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a} = xz\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + z^2\vec{k}$ через часть поверхности $z = -\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченную плоскостью $z=-2$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$, принимая за поверхность интегрирования – поверхность, лежащую в первом октанте, образованную параболоидом $x = 4 - z^2 - y^2$, а за контур интегрирования – линию пересечения этой поверхности с плоскостью $x=0$.

9. Доказать, что $\operatorname{div}(u\,\vec{a}) = u\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\operatorname{grad}u$, где $u=u(x,y,z)$ — дифференцируемая функция.

10. Найти $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ и $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$, для поля вектора $\vec{a} = \sin r\left(x\vec{i} - 2y\vec{j} + 3z\vec{k}\right)$, где $r = |\,\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Вариант 7

1. Потенциальная энергия частиц имеет вид $u(x,y,z) = \ln r$, где r – модуль радиус-вектора $\vec{r}$ частицы. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Какую форму имеют поверхности, для которых модуль вектора силы $\vec{F}$ постоянен? Изобразить эти поверхности для случаев $\left|\vec{F}\right| = 1$, $\left|\vec{F}\right| = 2$, $\left|\vec{F}\right| = 3$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z) = x\sqrt{y} - yz^2$ в точке $M\left(1,\,1,\,\frac{1}{2}\right)$ по направлению нормали к поверхности $x^2+y^2=4z$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле $\vec{a} = \left(z^2 - y + \dfrac{z}{\sin^2 xz}\right)\vec{i} + (z-x)\,\vec{j} + \left(y + 2xz - 1 + \dfrac{x}{\sin^2 xz}\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a} = (1-x)\,\vec{i} + (z+3)\,\vec{j} + (y+3)\,\vec{k}$.

5. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a} = -x^2y^3\vec{i} + 2\vec{j} + xz\vec{k}$ вдоль контура $x^2+y^2=2$, $z=1$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a} = \left(\dfrac{4}{\pi}x + z\right)\vec{i} + (x+y)\,\vec{k}$ через часть поверхности $x = 3 - \sqrt{y^2+z^2}$, лежащую в I октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\,\vec{j} + 3z\vec{k}$ через границу выпуклой области, заключенной между поверхностями $x^2+y^2+z^2=9$ и $x^2+z^2+2y-6=0$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=\left(yz+x+2y^2\right)\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x^2+y^2=a^2,\ z=0$, а за поверхность интегрирования – поверхность цилиндра $x^2+y^2=a^2$ $(0\le z\le 14)$ и плоскость $z=14$.

9. Доказать, что $\Delta(uv)=u\ \Delta v+v\ \Delta u+2\left(\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}v\right)$, если $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ — дважды дифференцируемые скалярные функции.

10. Найти $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ и $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ для поля вектора $\vec{a}=\cos r\cdot\left(2x\,\vec{i}+3y\,\vec{j}+z\,\vec{k}\right)$, где $r=|\,\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Вариант 8

1. Потенциальная энергия частицы $u=\dfrac{4x^2+(y-1)^2}{z^2}$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Построить эквипотенциальные поверхности $u=0,\ u=1,\ u=4$.

2. Найти производную функции $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}\dfrac{yz}{x}$ в точке $M(-1,1,1)$ в направлению градиента функции $u(x,y,z)=x^2+4y^2+9z^2-1$.

3. Показать, что поле $\vec{a}=\dfrac{y^2}{x^2}\vec{i}+\left(z\cos yz-\dfrac{2y}{x}+\dfrac{z}{y^2}\right)\vec{j}+\left(y\cos yz+2z-\dfrac{1}{y}\right)\vec{k}$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля $\vec{a}=(z-1)\,\vec{i}+y\,\vec{j}+(x+1)\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу вектора силы $\vec{F}=y^2\vec{i}-xz\,\vec{j}+zxy\vec{k}$ при перемещении по меньшей дуге кривой $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}$ от точки $A\left(\sqrt{2},\,0,\,\sqrt{2}\right)$ к точке $B\left(0,\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=z\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ через часть поверхности $y=8-z^2-x^2$, лежащую во II октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\vec{k}$ через часть поверхности $z=4-\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченную плоскостью $z=2$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=5y^2z\,\vec{i}+5z^2x\,\vec{j}+5x^2y\vec{k}$, принимая за контур интегрирования часть параболы $x+y^2=4,\ z=2$ и замыкающей её прямой $z=2,\ x=0$, а за поверхность интегрирования часть поверхности $z=2$, ограниченную этим контуром.

9. Доказать, что $\operatorname{grad}(u\cdot v)=v\cdot\operatorname{grad}u+u\cdot\operatorname{grad}v$, где $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ — дифференцируемые функции. Проверить, что $\operatorname{rot}\left(\operatorname{grad}(uv)\right)=0$.

10. Для поля вектора $\vec{a}=\vec{r}/r^3$ найти $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$, $\vec{\nabla}\times\vec{a}$, потенциал и векторные линии, если $r=|\,\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Вариант 9

1. Потенциальная энергия частицы $u(x,y,z)=\dfrac{2}{x^2+y^2+z}$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Какой вид имеют эквипотенциальные поверхности поля $\vec{F}$? Изобразить эти поверхности в случае $u=\pm1,\ u=\pm2$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=7\ln\left(\frac{1}{13}+x^2\right)-4xyz$ в точке $M(1,1,1)$ по направлению нормали к поверхности $7x^2-4y^2+4z^2=7$, образующей тупой угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле

$$\vec{a}=\left(yz\cos(xyz)-\frac{z}{x^2}\right)\vec{i}+\left(xz\cos(xyz)-\frac{3y^2}{z}\right)\vec{j}+\left(xy\cos(xyz)+\frac{y^3}{z^2}+\frac{1}{x}+2z\right)\vec{k}$$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=\left(z^2-y^2\right)\vec{i}+z\vec{j}-y\vec{k}$.

5. Вычислить работу вектора силы $\vec{F}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$ при перемещении по кривой $\begin{cases} y=x^2, \\ z=2 \end{cases}$ от точки $A(1,1,2)$ к точке $B(2,4,2)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=x^2\vec{i}-3z\vec{j}+(x+z)\vec{k}$ через плоский четырехугольник с вершинами в точках $M_1(1,-2,4)$, $M_2(3,2,4)$, $M_3(-1,2,4)$, $M_4(-3,-2,4)$ в направлении оси OZ.

7. Найти поток поля $\vec{a}=(y+2x)\vec{i}-(z-12y)\vec{j}+3z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую пространственную область $\begin{cases} x^2+y^2<4y, \\ 0<z<x^2+y^2, \end{cases}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=yz^2\vec{i}+zx^2\vec{j}+xy^2\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x^2+y^2=16$, $z=4$, а за поверхность интегрирования – любую поверхность, натянутую на эту окружность.

9. Доказать, что $\vec{\nabla}\left(u^n\right)=n\,u^{n-1}\vec{\nabla}u$, где $u=u(x,y,z)$ – дифференцируемая функция.

10. Найти $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ и $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ для вектора $\vec{a}=\frac{\vec{r}\,\ln r}{r}$, где $r=|\,\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Вариант 10

1. Потенциальная энергия частицы имеет вид $u(x,y,z)=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Какой вид имеют эквипотенциальные поверхности поля, в котором находится частица? Изобразить эти поверхности в случае $u=\frac{\pi}{6}$, $u=\frac{\pi}{4}$, $u=\frac{\pi}{3}$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=\frac{xy}{z}$ по направлению вектора $\overrightarrow{MA}$ в точке M, если $A(0,3,4)$, $M(1,2,1)$.

3. Показать, что поле $\vec{a}=\left(-\frac{2e^z}{x^3}+\frac{1}{x}\right)\vec{i}+\frac{1}{z^3}\vec{j}+\left(\frac{e^z}{x^2}-\frac{3y}{z^4}\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=(2y-z)\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=2xy^2z^2\vec{i}+2yx^2z^2\vec{j}+2zx^2y^2\vec{k}$ при перемещении по прямой из точки $A(2,0,1)$ в точку $B(4,2,3)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=\left(2x+y^2\right)\vec{i}+z^2\vec{j}+x\vec{k}$ через часть поверхности $x^2+z^2=4$, лежащую в I октанте и отсеченную плоскостями $y=1$, $y=4$, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=(x-z)\,\vec{i}+(z-y)\,\vec{j}+z^2\,\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область $\sqrt{x^2+y^2}<z<\sqrt{2-x^2-y^2}$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=\left(4x^2+x^2z\right)\vec{i}+y\vec{j}-4z^2\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x^2+z^2=9$, $y=1$, а за поверхность интегрирования – полусферу, натянутую на этот контур.

9. Вычислить $\operatorname{div}\left(f(r)\,\vec{r}\right)$, где $f(r)=\dfrac{\sin r}{r}$, $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\vec{k}$. Доказать, что пространственное поле вектора $\vec{a}=f(r)\cdot\vec{r}$ будет соленоидальным только тогда, когда $f(r)=\dfrac{c}{r^3}$, $(c\in R)$.

10. Найти $\operatorname{rot}\dfrac{\vec{a}}{r}$, где $\vec{a}$ – постоянный вектор, $r^2=x^2+y^2+z^2$.

Вариант 11

1. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого имеет вид $u(r)=\arcsin\dfrac{1}{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, $r=|\,\vec{r}\,|$. Построить поверхности равного потенциала для случаев $u=\dfrac{\pi}{6}$, $u=\dfrac{\pi}{4}$, $u=\dfrac{\pi}{3}$.

2. Найти производную поля $f(x,y,z)=x^3y^2z$ в направлении градиента функции $\varphi\,(x,y,z)=x^2-4xy+5y-6z^2$ в точке $M\left(3,1,\frac{1}{3}\right)$.

3. Показать, что поле вектора $\vec{a}=\left(-\dfrac{3y}{x^4}+\dfrac{4x^3}{y^2}\right)\vec{i}+\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2x^4}{y^3}+3y^2\right)\vec{j}-5z^4\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=\left(x+y^2+z^2\right)\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=x\,\vec{i}-\dfrac{z^2}{3}\vec{j}+y\vec{k}$ при перемещении по замкнутому контуру $\begin{cases}4x^2+9y^2=1,\\ z=2x-y-\frac{1}{4}.\end{cases}$

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=\left(\frac{2}{\pi}y+z\right)\vec{j}+(x+y)\,\vec{k}$ через часть поверхности $y=\sqrt{z^2+x^2}$, лежащую в I октанте и отсеченную плоскостью $y=3$, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область $\begin{cases}x^2+y^2<2,\\ 0<z<y^2,\end{cases}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=\left(4x^2+yx^2\right)\vec{i}-4y^2\vec{j}+z\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x^2+y^2=a^2,\ z=0$, а за поверхность интегрирования – часть поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2,\ \left(0\le z\le 4\right)$ и $z=4$.

9. Найти $\operatorname{div}\left(\operatorname{grad} f\left(r\right)\right)$, где $r^2=x^2+y^2+z^2$, а $f\left(r\right)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция от r.

10. Найти $\vec{\nabla}\times\vec{a}$, если $\vec{a}=\dfrac{\vec{c}}{\sin r}$, $\vec{c}=\{y,z,x\}$, $r^2=x^2+y^2+z^2.$

Вариант 12

1. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого имеет вид $u\,(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$. Построить эквипотенциальные поверхности для случаев $u=0,\ u=\pm 1$.

2. Найти производную поля $u\,(x,y,z)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+xz$ в точке $M\left(2,\,2,-1\right)$ по направлению нормали к поверхности $x^2+y^2-2z=10$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора $\vec{a}=\left(4x^3e^y-\dfrac{5z^3}{x^2}\right)\vec{i}+\left(x^4e^y-1\right)\vec{j}+\left(\dfrac{15z^2}{x}-1\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=\left(z-y\right)\vec{i}+\left(z-3\right)\vec{j}+\left(y-3\right)\vec{k}$.

5. Вычислить работу вектора силы $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k}$ при перемещении по замкнутому контуру $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x=z.\end{cases}$

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=\frac{2}{\pi}\left(x-4\right)\vec{i}+z\vec{j}+6\vec{k}$ через часть поверхности $x^2+y^2+z^2=4$, лежащую в V октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=x^2\vec{i}+y\vec{j}+2z\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область $\begin{cases}x^2+y^2<6y,\\ 0<z<\frac{1}{16}\sqrt{x^2+y^2},\end{cases}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=yz^2\vec{i}+zx^2\vec{j}+xy^2\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x^2+y^2=9,\ z=1$, а за поверхность интегрирования – часть параболоида $x^2+y^2=9z$, натянутого на этот контур.

9. Доказать, что $\vec{\nabla}u=\vec{c}+\dfrac{df}{dr}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r}$, где $u=\left(\vec{c},\vec{r}\right)+f\left(r\right)$, $\vec{c}$ - постоянный вектор, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки, $r=|\,\vec{r}\,|$, $f(r)$ - произвольная дифференцируемая функция от r.

10. Для поля вектора $\vec{a}=r^3\cdot\vec{r}$. Найти $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$, $\vec{\nabla}\times\vec{a}$, если $\vec{r}$ — радиус-вектор точки, $r=|\,\vec{r}\,|$.

Вариант 13

1. Потенциальная энергия частицы задана функцией $u(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x^2+z^2}}{y}$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Какой вид имеют эквипотенциальные поверхности поля $\vec{F}$? Изобразить эти поверхности в случае $u=1,\ u=2,\ u=-1$.

2. Найти производную поля $f(x,y,z)=x\,y^3z^4$ в направлении градиента функции $u(x,y,z)=x^3-4x^2y+5z^2+3$ в точке $M\left(-1,\frac{1}{2},-1\right)$.

3. Показать, что поле вектора $\vec{a}=-\dfrac{yz^4}{x^2}\,\vec{i}+\left(\dfrac{z^4}{x}+z\,e^{zy}+6y^5\right)\vec{j}+\left(\dfrac{4yz^3}{x}+y\,e^{zy}\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=\dfrac{\vec{i}}{x-3}+\dfrac{\vec{j}}{y+4}-\dfrac{\vec{k}}{z+9}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=\left(yz-x^2\right)\vec{i}+\left(xz-y^2\right)\vec{j}+\left(xy-z^2\right)\vec{k}$ при перемещении по окружности $\begin{cases}x^2+y^2=9,\\ z=0,\end{cases}$ лежащей в I октанте, от точки $A(3,0,0)$ к точке $B(0,3,0)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=(x+y)\,\vec{i}+y\,\vec{j}-z\,\vec{k}$ через плоский треугольник с вершинами в точках $A(2,0,0)$, $B(2,0,4)$, $C(2,-2,0)$ в направлении оси OX.

7. Найти поток поля $\vec{a}=(x-z)\,\vec{i}+(x-y)\,\vec{j}+(z-y)\,\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область $x^2+y^2<z<\frac{3}{2}\left(3+\sqrt{x^2+y^2}\right)$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=y^2z\,\vec{i}+z^2x\,\vec{j}+x^2y\,\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x^2+y^2=4,\ z=2$, а за поверхность интегрирования – круг, ограниченный этой окружностью.

9. Доказать, что $\operatorname{div}\left(f(r)\,\vec{r}\right)=3f(r)+r\dfrac{df}{dr}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, $r=|\,\vec{r}\,|$, $f(r)$ – произвольная дифференцируемая функция от r.

10. Для поля вектора $\vec{a}=r^3\vec{c}$ найти $\operatorname{rot}\vec{a}$, если

$$r^2=x^2+y^2+z^2,\quad \vec{c}=2x\vec{i}+y^2x\,\vec{j}-z\,\vec{k}.$$

Вариант 14

1. Потенциальная энергия частицы задана функцией $u(x,y,z)=2x^2+y^2-z^2$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Какой вид имеют эквипотенциальные поверхности поля, в которых находится частица? Изобразить эти поверхности в случае $u=0,\ u=\pm1,\ u=\pm2$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)-\sqrt{x^2+z^2}$ в точке $M(0,0,5)$ по направлению нормали к поверхности $x^2-6x+9y^2+z^2=4z+5$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле $\vec{a}=\left(y^4+z\,x^{z-1}+2\,y\,x^{y-1}\right)\vec{i}+\left(4\,x\,y^3+2x^y\ln x\right)\vec{j}+\left(x^z\ln x+1\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=(y+2)\,\vec{i}+(x-2)\,\vec{j}-z\,\vec{k}$.

5. Показать, что поле вектора $\vec{a}=\frac{1}{y}\,\vec{i}+\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)\vec{j}-\frac{y}{z^2}\,\vec{k}$ является потенциальным и вычислить линейный интеграл этого вектора от точки $A(-2,-3,-1)$ до точки $B(4,6,2)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=(x+z)\,\vec{i}+x\,\vec{j}+y\,\vec{k}$ через часть поверхности $z^2+x^2=4$, лежащую в IV октанте и отсеченную плоскостями $y=-3$, $y=-1$, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=z\,\vec{i}+(x+y)\,\vec{j}+yz\,\vec{k}$ через часть поверхности $y=z^2+x^2-4$, отсеченную плоскостью $y=-2$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=(y-z)\,\vec{i}+z\,\vec{j}+y\,\vec{k}$, принимая за поверхность интегрирования поверхность, лежащую в I октанте, ограниченную параболоидом $y=9-x^2-z^2$ и плоскостями $x=0$, $z=0$, а за линию интегрирования – линию пересечения этой поверхности с плоскостью $y=0$.

9. Доказать, что $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})-\Delta\vec{a}$.

10. Найти $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$, $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ для вектора $\vec{a}=\vec{r}\,\sin^2 r$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, $r=|\,\vec{r}\,|$.

Вариант 15

1. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого задан функцией $u(M)=x^2+3y^2-z^2$. Построить поверхности равного уровня для случаев $u=0$, $u=\pm 1$, $u=\pm 2$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}-z$ в точке $M(3,\,4,\,1)$ по направлению нормали к поверхности $x^2+y^2=25z$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле $\vec{a}=\left(-yzx^{y-1}+1\right)\vec{i}+\left(5zy^4-x^y z\ln x-2y\right)\vec{j}+\left(y^5-x^y-3z^2\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=z\,\vec{i}+(z-x)^2\,\vec{j}+x\,\vec{k}$.

5. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a}=y\,\vec{i}-x\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ по контуру, составленному из осей координат и дуги кривой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ между точками $A(a,0,1)$ и $B(0,a,1)$ в плоскости $z=1$.

6. Найти поток поля $\vec{a}=z\,\vec{i}+y\,\vec{j}+x\,\vec{k}$ через часть поверхности $y=-\sqrt{z^2+x^2}$, лежащую в IV октанте и отсеченную плоскостью $y=-2$, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=y\,\vec{i}+x\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область $\begin{cases}(x-2)^2+y^2<4,\\ 0<z<8-x,\end{cases}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a} = yz\,\vec{i} + (xz + 4x)\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$, принимая за контур интегрирования эллипс $4x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, а за поверхность интегрирования – часть поверхности цилиндра $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$ и плоскости $z = 2$.

9. Показать, что любое решение уравнения $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) - k^2 \vec{a} = 0$, удовлетворяющее условию соленоидальности, удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца $\vec{\nabla}^2 \vec{a} + k^2 \vec{a} = 0$.

10. Вычислить $\operatorname{rot} \vec{a}$ и $\operatorname{div} \vec{a}$, где $\vec{a} = \left(yz\vec{i} - 2xz\,\vec{j}\right)\cos r$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Вариант 16

1. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого задан функцией $u(M) = x^2 - 2x + 1 + 4z^2 - 4y$. Построить эквипотенциальные поверхности для случаев $u = 0$, $u = \pm 4$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z) = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x}$ в точке $M(1, 1, -2)$ по направлению нормали к поверхности $x^2 - y^2 + z^2 = 4$, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора

$$\vec{a} = \frac{10x^4}{y}\,\vec{i} + \left(\frac{z}{1 + y^2z^2} - \frac{2x^5}{y^2} + \frac{2y}{z}\right)\vec{j} + \left(\frac{y}{1 + y^2z^2} - 1 - \frac{y^2}{z^2}\right)\vec{k}$$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a} = (y - 2)\,\vec{i} + (x - 2)\,\vec{j} + (z + 2)\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F} = \frac{x^2}{z}\,\vec{i} + \frac{y^2}{z}\,\vec{j} + xy\vec{k}$ при перемещении по дуге окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, расположенной в I октанте между точками $A(1, 0, 1)$ и $B(0, 1, 1)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a} = \{y, x, z/\pi\}$ через часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, лежащую в III октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + xy\,\vec{j} + 3zx\vec{k}$ через полную поверхность пирамиды с вершинами в точках $A(4, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$, $C(0, 0, 4)$, $O(0, 0, 0)$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a} = z\,\vec{i} + x\vec{j} + (x - y)^2\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x = b\cos t$, $y = 0$, $z = b\sin t$, а за поверхность интегрирования – поверхность конуса с высотой H, натянутую на этот контур.

9. Доказать, что $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{r}\,(\vec{r}, \vec{a})\right) = 4\,(\vec{a}, \vec{r})$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки поля, $\vec{a}$ – заданный постоянный вектор.

10. Найти $\operatorname{rot}\left(\vec{a}\, f(r)\right)$, где $\vec{a} = y\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + xz\vec{k}$, $f(r)$ – произвольная дифференцируемая функция, а $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Вариант 17

1. Потенциальная энергия частицы задана функцией $u = x^2 + 2x + 1 - 3z^2 - 9y$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Какой вид имеют эквипотенциальные поверхно-

сти поля, в котором находится частица? Изобразить эти поверхности в случае $u=0,\ u=\pm 9$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=\sqrt{x\,y}-\sqrt{4-z^2}$ в точке $M(1,1,0)$ по направлению нормали к поверхности $z=x^2-y^2$, образующей тупой угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле $\vec{a}=\left(-y\,z\sin x-\dfrac{3}{z}\right)\vec{i}+\left(z\cos x+1\right)\vec{j}+\left(y\cos x+\dfrac{3\,x}{z^2}+1\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=y\,(z-1)\,\vec{i}+x\,(z-1)\,\vec{j}-x\,y\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=y\,z^2\,\vec{i}+x^2y\,\vec{j}+y^2x\,\vec{k}$ при перемещении по прямой из точки $A(2,3,-1)$ до точки $B(4,6,-2)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=(x+y)\,\vec{i}+(z+y)\,\vec{j}+(x+y)\,\vec{k}$ через плоский треугольник с вершинами $A(6,6,0)$, $B(-6,6,0)$, $C(0,6,6)$ в направлении оси OY.

7. Найти поток поля $\vec{a}=75\left(x^3\,\vec{i}+y^3\,\vec{j}+z^3\,\vec{k}\right)$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область $\begin{cases} x^2+y^2<x, \\ 0<z<\sqrt{x^2+y^2}, \end{cases}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=3\,y^2\,\vec{i}-3\,z^2\,\vec{j}+3\,x^2\,\vec{k}$, принимая за поверхность интегрирования поверхность, лежащую в I октанте, ограниченную сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и плоскостями $x=0,\ y=0$, а за линию интегрирования – линию пересечения этой поверхности с плоскостью $z=0$.

9. Доказать, что в потенциальном поле вектора $\vec{a}$ его потенциал $u(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u=\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$.

10. Найти $\operatorname{rot}\vec{a}$ и $\operatorname{div}\vec{a}$ для вектора $\vec{a}=(r\sin r)\cdot\vec{r}$, $r=|\,\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Вариант 18

1. Потенциальная энергия частицы описывается функцией $u=x^2-2\,x+2\,y^2+4\,y+4\,z^2-16\,z+15$. Найти силу $\vec{F}$, действующую на частицу. Какой вид имеют эквипотенциальные поверхности поля, в котором находится частица? Изобразить эти поверхности в случае $u=0,\ u=\pm 4$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}$ в точке $M(1,1,0)$ по направлению нормали к поверхности, заданной уравнением $2\,x^2-y^2+z^2=1$.

3. Показать, что поле вектора $\vec{a}=-\dfrac{4\,x^3}{z^3}\,\vec{i}+\left(z\cos y-1\right)\vec{j}+\left(\sin y+\dfrac{3\,x^4}{z^4}+2\,z\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=(1+z)\,\vec{i}+y\,\vec{j}+(x-1)\,\vec{k}$.

5. Вычислить циркуляцию ротора вектора $\vec{F}=y\,z^2\,\vec{i}+x^2z\,\vec{j}+x^2y\,\vec{k}$ по контуру, состоящему из дуги параболы $y=x^2$ и отрезка прямой $y=x$ в плоскости $z=0$.

6. Найти поток поля $\vec{a} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ через часть поверхности $(z-4)^2 + x^2 = 16$, лежащую во II октанте и отсеченную плоскостями $y=0$, $y=2$, в направлении внешней нормали.

7. Вычислить поток поля $\vec{a} = x\,y\,\vec{i} + x\,z\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ через часть поверхности $z = 4 - x^2 - y^2$ отсеченную плоскостью $z = 2$, в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + (x-y)\,\vec{k}$, принимая за поверхность интегрирования поверхность, лежащую во II октанте, ограниченную сферой с центром в начале координат радиуса a и плоскостями $y=0$, $z=0$, а за контур интегрирования – линию пересечения этой поверхности с плоскостью $x=0$.

9. Доказать, что $\vec{\nabla}\cdot\left(\varphi\,\vec{\nabla}\varphi\right) = \varphi\,\Delta\varphi + \left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2$, где $\varphi = \varphi(x,y,z)$ — дважды дифференцируемая функция.

10. Найти $\operatorname{rot}\vec{a}$ и $\operatorname{div}\vec{a}$ для вектора $\vec{a} = \left(\vec{r} + \vec{b}\right)\cos r$, где $r = |\,\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки, $\vec{b}$ - постоянный вектор.

Вариант 19

1. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого $u(x,y,z) = \dfrac{3}{x^2 + y + z^2}$. Построить эквипотенциальные поверхности $u = \pm 1$, $u = \pm 2$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z) = 4\ln\left(3 + y^2\right) - 8\,x\,y\,z$ в точке $M(1,1,1)$ по направлению нормали к поверхности $x^2 + 2\,y^2 - 2\,z^2 = 1$, образующей тупой угол с положительным направлением оси OZ.

3. Показать, что поле вектора

$$\vec{a} = \left(z\,e^{4y} - \frac{3\,z^3}{x^4}\right)\vec{i} + \left(4\,x\,z\,e^{4y} - 5\,y^4\right)\vec{j} + \left(x\,e^{4y} + \frac{3\,z^2}{x^3} + 1\right)\vec{k}$$

потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a} = x\vec{i} + (1+z)\,\vec{j} + (y-1)\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{a} = y\,z\,\vec{i} - x\,z\,\vec{j}$ при перемещении по дуге винтовой линии $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \dfrac{4t}{\pi}$ от точки пересечения кривой с плоскостью $z=0$ до точки её пересечения с плоскостью $z=8$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a} = (y+2)\,\vec{i} - \frac{1}{\pi}(z-2)\,\vec{k}$ через часть поверхности $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, лежащую во II октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую область $\begin{cases} x^2 + y^2 < 2\,y, \\ 0 < z < 4 - y, \end{cases}$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a} = y\,z\,\vec{i} + \left(x\,z - \frac{1}{8}x^3\right)\vec{j} + x\,y\,\vec{k}$, принимая за поверхность интегрирования боковую поверхность пирамиды, ограниченную плоскостями $x=0$, $y=0$, $x + 2\,y - 4\,z = 8$ $(z \le 0)$, а за контур интегрирования – линию её пересечения с плоскостью $z=0$.

9. Доказать, что $\operatorname{rot}\left(\bar{c}\, f(r)\right)=\frac{1}{r}\frac{d f}{d r}\,[\bar{r},\bar{c}]$, где $r=|\,\bar{r}\,|$, $\bar{r}$ – радиус-вектор точки, $\bar{c}$ – постоянный вектор, $f(r)$ — произвольная дифференцируемая функция от r.

10. Найти $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ и $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$ для поля вектора $\vec{a}=\vec{c}\sin r$, если $\vec{c}$ – постоянный вектор, $r=|\,\vec{r}\,|$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки.

Вариант 20

1. Найти вектор напряженности электрического поля, потенциал которого описывается функцией $u(x,y,z)=\dfrac{1}{y^2+z^2+x}$. Построить эквипотенциальные поверхности для случаев $u=\pm 1$, $u=\pm 2$.

2. Найти производную скалярного поля $u(x,y,z)=\ln\left(e^x+e^y+e^z\right)$ в начале координат по направлению луча, образующего угол 60° с осью абсцисс, угол 45° с осью ординат, а с осью аппликат – тупой угол.

3. Показать, что поле вектора $\vec{a}=\dfrac{1}{x+yz}\,\vec{i}+\left(\dfrac{z}{x+yz}-e^y+\dfrac{5}{y}\right)\vec{j}+\left(\dfrac{y}{x+yz}+1\right)\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал поля.

4. Найти векторные линии поля вектора $\vec{a}=(z-1)\,\vec{i}+(z-x)\,\vec{j}+(x-1)\,\vec{k}$.

5. Вычислить работу силы $\vec{F}=zy\,\vec{i}+\dfrac{z^2}{x}\,\vec{j}+\dfrac{y^2}{x}\,\vec{k}$ при перемещении вдоль линии (L): $x=4$, $y^2+z^2=16$ от точки $A(4,\,4,\,0)$ к точке $B(4,\,0,\,4)$.

6. Вычислить поток поля $\vec{a}=x^3\,\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ через часть поверхности $x^2+y^2+z^2=1$, лежащую в IV октанте, в направлении внешней нормали.

7. Найти поток поля $\vec{a}=6xy\,\vec{i}+3y^2\,\vec{j}+5\,\vec{k}$ через полную поверхность пирамиды с вершинами в точках $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,-1)$, $D(0,0,0)$ в направлении внешней нормали.

8. Проверить формулу Стокса для поля вектора $\vec{a}=y^2z\,\vec{i}+z^2x\,\vec{j}+x^2y\,\vec{k}$, принимая за контур интегрирования окружность $x^2+y^2=4$, $z=2$, а за поверхность интегрирования – поверхность кругового цилиндра $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ 0\le z\le 2,\end{cases}$ натянутую на эту окружность, и плоскость $z=0$.

9. Доказать, что $\operatorname{div}(u\cdot\operatorname{grad}v)=u\cdot\Delta v+(\operatorname{grad}u,\,\operatorname{grad}v)$, где $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

10. Вычислить $\operatorname{rot}\left((\vec{r},\,\vec{a})\cdot\vec{b}\right)$, если $\vec{a}=2\,\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=3\,\vec{i}+2\,\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$.

Оглавление

Учебное издание

Кратные интегралы и теория поля

Сборник типовых заданий

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Компьютерная верстка *Р.М. Миньковой, Н.В.Чуксиной*

ИД № 06263 от 12.11. 2001 г.

Подписано в печать 25.10. 2007 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Плоская печать Усл. печ.л. 2,56
Уч.-изд. л. 1,6 Тираж 200 экз. Заказ Цена "С"

Редакционно-издательский отдел УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19
Ризография НИЧ УГТУ-УПИ

620002, Екатеринбург, Мира, 19