

Министерство образования Российской Федерации
ФГАОУ ВПО «Уральский Федеральный Университет
им.первого Президента России Б.Н.Ельцина»

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Сборник типовых заданий
для студентов физических специальностей

Екатеринбург
2011

УДК 514.742.4

Составители: Н.М. Кравченко, М.М. Михалева, Г.А. Чердынцева

Научный редактор: доц., канд. физ–мат. наук Р.М. Минькова

Функции нескольких переменных: Сборник типовых заданий для студентов физических специальностей/ сост. Н.М. Кравченко, М.М. Михалева, Г.А. Чердынцева, под общ.ред. Р.М. Миньковой. Екатеринбург: ФГАОУ ВПО УрФУ им.первого Президента России Б.Н. Ельцина, 2010. 37 с.

Приведены типовые индивидуальные задания по теме «Функции нескольких переменных»; разбирается решение типовых примеров и задач по этой теме. Сборник заданий предназначен для студентов физических специальностей физико–технического факультета.

Рис. 2.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы
и уравнения математической физики»

© ФГАОУ ВПО «Уральский Федеральный Университет
им.первого Президента России Б.Н.Ельцина», 2011

**Образец выполнения домашнего задания по теме
«Функции нескольких переменных»**

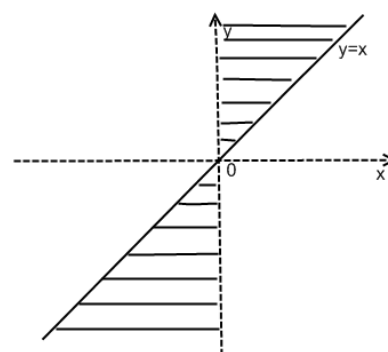
Задача 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $f(x, y) = \arcsin(x/y) + \ln(xy)$.

Решение. Данная функция определена в точках, удовлетворяющих следующим неравенствам: $\begin{cases} |x/y| \leq 1 \\ xy > 0. \end{cases}$ Если заменить (x, y) на $(-x, -y)$ соответственно, то неравенства

не изменятся, следовательно, искомая область симметрична относительно начала координат и достаточно построить ее в I четверти, затем отобразить относительно точки O . Для I четверти систему можно записать в виде

$$\begin{cases} x \leq y \\ x > 0, y > 0 \end{cases}.$$

Строим границу области: прямые $x = y$, $x = 0$, $y = 0$ (оси Ox и Oy изображены пунктирной линией, так как соответствующие неравенства строгие). Чтобы определить саму область, используем метод пробных точек: точка $(1; 2)$ удовлетворяет системе, значит, она входит в искомую область, а так же все точки, расположенные в I четверти между прямыми $x = 0$ и $x = y$. Отражаем построенную область симметрично относительно точки O . Заштрихованная область и является областью определения данной функции.



Задача 2. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \operatorname{ch} \frac{x+z}{y^2} + y^{x-z}$ в окрестности точки $A(0; 2; 0)$.

Решение. Формула для линеаризации функции $f(x, y, z)$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) :

$f(x, y, z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)$ Выхисляем частные производные функции $f(x, y, z)$, их значения и значение функции в точке $A(0; 2; 0)$:

$$f'_x = \operatorname{sh} \frac{x+z}{y^2} \cdot \frac{1}{y^2} + y^{x-z} \cdot \ln y; \quad f'_x(A) = \operatorname{sh} \frac{0}{4} \cdot \frac{1}{4} + 2^0 \cdot \ln 2 = \ln 2;$$

$$f'_y = \operatorname{sh} \frac{x+z}{y^2} \cdot \frac{-2(x+z)}{y^3} + (x-z) \cdot y^{x-z-1}; \quad f'_y(A) = \operatorname{sh} \frac{0}{4} \cdot \frac{0}{8} + 0 \cdot 2^{-1} = 0;$$

$$f'_z = \operatorname{sh} \frac{x+z}{y^2} \cdot \frac{1}{y^2} + (-1) \cdot y^{x-z} \cdot \ln y; \quad f'_z(A) = \operatorname{sh} \frac{0}{4} \cdot \frac{1}{4} - 2^0 \cdot \ln 2 = -\ln 2;$$

$$f(A) = \operatorname{ch} \frac{0}{2} + 2^0 = 2.$$

Теперь подставляем найденные коэффициенты в формулу линейризации функции:
 $f(x, y, z) \approx 2 + \ln 2(x - 0) + 0(y - 2) + (-\ln 2)(z - 0) = 2 + \ln 2 \cdot x - \ln 2 \cdot z$.

Задача 3(а). Является ли функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^2}{x^2 + y^2}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$ в точке $(0, 0)$ непрерывной? Дифференцируемой? Существуют ли $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

Решение. Функция непрерывна в точке (x_0, y_0) , если $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Вычисляем предел:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 + y^2}{x^2 + y^2} = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 (\rho^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi)}{\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi) = \sin^2 \varphi.$$

Предел функции принимает различные значения в зависимости от значений φ и, следовательно, не существует. Значит, функция в точке $(0, 0)$ не является непрерывной. Следовательно, она и не дифференцируема (известно, что если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке).

Так как функция неэлементарная, то частные производные вычисляем по определению:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta x)^4}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} = \infty.$$

Значит, частная производная $f'_y(0, 0)$ не существует.

Задача 3(б). Показать, что функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$ непрерывна и имеет частные производные в точке $(0, 0)$, но не дифференцируема в этой точке.

Решение. Аналогично предыдущей задаче, исследуем функцию на непрерывность:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4} = \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{array} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^5 \cos^3 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}{\rho^4 (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos^3 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi} = 0 = f(0, 0).$$

Значит, функция непрерывна в точке $(0, 0)$.

Вычисляем частные производные (по определению):

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{(\Delta x)^4} - 0}{\Delta x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{(\Delta y)^4} - 0}{\Delta y} = 0.$$

Значит, частные производные в точке $(0, 0)$ равны 0.

Функция дифференцируема в точке (x_0, y_0) , если ее полное приращение в этой точке представимо в виде $\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \rho \cdot \gamma$, где $\gamma = \gamma(\rho)$ бесконечно малая при $\rho \rightarrow 0$ ($\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$).

Предположим, что данная функция дифференцируема в точке $(0, 0)$, тогда ее приращение $\Delta f(0, 0) = \frac{(\Delta x)^3(\Delta y)^2}{(\Delta x)^4 + (\Delta y)^4}$ представимо в виде:

$$\Delta f(0, 0) = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \rho \cdot \gamma = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \cdot \gamma \text{ или}$$

$$\Delta f(0, 0) = \frac{(\Delta x)^3(\Delta y)^2}{(\Delta x)^4 + (\Delta y)^4} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \cdot \gamma. \text{ При } \Delta y = \Delta x > 0 \text{ это равенство имеет}$$

$$\text{вид: } \frac{(\Delta x)^5}{2(\Delta x)^4} = \sqrt{2(\Delta x)^2} \cdot \gamma, \quad \frac{(\Delta x)}{2} = \sqrt{2}(\Delta x) \cdot \gamma. \text{ Тогда } \gamma = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \text{ т.е. } \gamma \text{ не является беско-}$$

нечно малой, и, следовательно, функция не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

Задача 4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$, если $\omega = f(u, v)$ – дважды дифференцируемая функция; $u = y/x, v = x - y$.

Решение. Находим частную производную $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ как производную сложной функции:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 1. \text{ Теперь от полученной производной } \frac{\partial \omega}{\partial x} \text{ вы-}$$

числяем производную по y , учитывая, что $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ являются функциями от u, v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)'_y \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right)'_y + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)'_y = \\ &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right] \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right] = \\ &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot (-1)\right] \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot (-1)\right] = \\ &= \frac{-y}{x^3} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{y+x}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

Задача 5. Доказать, что $xz'_x + yz'_y = z$, если $f(z/y) = z/x$ и $f(u)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Решение. Равенство $f(z/y) = z/x$ определяет z как неявную функцию от x, y . Дифференцируем это равенство, учитывая, что $f'_u du = d(z/x)$ (1).

Используем формулу для дифференциала произведения:

$$du = d\left(z \cdot \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} dz + z d\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{dz}{y} - \frac{z dy}{y^2}, \quad d\left(z \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} dz + z d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{dz}{x} - \frac{z dx}{x^2}.$$

Подставляем эти выражения в равенство (1): $f'_u\left(\frac{dz}{y} - \frac{z dy}{y^2}\right) = \frac{dz}{x} - \frac{z dx}{x^2}$. Находим

$$dz = \frac{f'_u(z/y^2) dy - (z/x^2) dx}{f'_u(1/y) - (1/x)} = \frac{x^2 z f'_u dy - y^2 z dx}{xy(x f'_u - y)}.$$

В этой форме коэффициент при dx

есть z'_x , коэффициент при dy есть z'_y , так как $dz = z'_x dx + z'_y dy$. Тогда $z'_x = \frac{-y^2 z}{xy(x f'_u - y)}$,

$$z'_y = \frac{x^2 z f'_u}{xy(x f'_u - y)}.$$

Составляем выражение из левой части доказываемого равенства и преобразуем его:

$$x z'_x + y z'_y = x \frac{-y^2 z}{xy(x f'_u - y)} + y \frac{x^2 z f'_u}{xy(x f'_u - y)} = \frac{-yz + xz f'_u}{(x f'_u - y)} = z.$$

Получили требуемое равен-

ство.

Задача 6. Найти производные второго порядка от функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ в точке

$$x = -1, \quad y = 1, \quad \text{заданных неявно системой} \quad \begin{cases} u + v = x + y + \pi/2, \\ \sin u + \sin v = -xy, \end{cases} \quad \text{если } u(-1, 1) = 0,$$

$$v(-1, 1) = \pi/2.$$

Решение. Продифференцируем оба уравнения системы:

$$\begin{cases} d(u + v) = d(x + y), \\ d(\sin u + \sin v) = -d(yx), \end{cases} \quad \begin{cases} du + dv = dx + dy, \\ \cos u du + \cos v dv = -(y dx + x dy), \end{cases} \quad (2).$$

Еще раз продифференцируем оба уравнения, учитывая, что $d^2 u(x, y) = d(du)$, $d^2 v(x, y) = d(dv)$ при фиксированных dx , dy и поэтому $d(dx) = d(dy) = 0$:

$$\begin{cases} d^2 u + d^2 v = 0, \\ -\sin u (du)^2 + \cos u d^2 u - \sin v (dv)^2 + \cos v d^2 v = -(dy dx + dx dy), \end{cases} \quad (3).$$

$$\text{Из системы (2) в заданной точке:} \quad \begin{cases} du + dv = dx + dy, \\ \cos 0 du + \cos(\pi/2) dv = -(1 \cdot dx - 1 \cdot dy), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} du = -dx + dy, \\ dv = 2dx. \end{cases} \quad \text{Из системы (3) в заданной точке:}$$

$$\begin{cases} d^2 u + d^2 v = 0, \\ -\sin 0 (du)^2 + \cos 0 d^2 u - \sin(\pi/2) (dv)^2 + \cos(\pi/2) d^2 v = -(dy dx + dx dy), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d^2u + d^2v = 0, \\ d^2u - (dv)^2 = -2dx dy. \end{cases} \quad \text{Подставляя } dv, \text{ получим: } \begin{cases} d^2u + d^2v = 0, \\ d^2u - (2dx)^2 = -2dx dy, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d^2u = 4dx^2 - 2dx dy, \\ d^2v = -4dx^2 + 2dx dy. \end{cases}$$

Из последней системы получаем, что

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(-1;1)} = 4, \quad \left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{(-1;1)} = -4, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{(-1;1)} = \left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{(-1;1)} = 0.$$

Задача 7. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 + 6xz + 6yz.$$

Решение. Находим критические точки, используя необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0, \\ f'_z = 0. \end{cases} \quad \text{В нашем случае } \begin{cases} 2x + 6z = 0, \\ 2y + 6z = 0, \\ 3z^2 + 6x + 6y = 0. \end{cases}$$

$$\text{Решаем систему: } \begin{cases} x = -3z, \\ y = -3z, \\ z^2 - 12z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = z = 0; \\ x = y = -36, z = 12. \end{cases}$$

Каждую из двух полученных точек проверяем по достаточному условию экстремума. Для этого вычисляем вторые производные и их значения в найденных критических точках $M_1(0;0;0)$ и $M_1(-36;-36;12)$.

$$f''_{xx} = 2, \quad f''_{yy} = 2, \quad f''_{zz} = 6z, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{xz} = 6, \quad f''_{yz} = 6.$$

Для точки $M_1(0;0;0)$:

$$A_{11} = f''_{xx} = 2, \quad A_{22} = f''_{yy} = 2, \quad A_{33} = f''_{zz} = 0, \quad A_{12} = A_{21} = f''_{xy} = 0, \quad A_{13} = A_{31} = f''_{xz} = 6, \\ A_{23} = A_{32} = f''_{yz} = 6. \text{ Находим определители } \Delta_1 = A_{11} = 2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -144.$$

По достаточному признаку экстремума для $f(x, y, z)$: если $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – положительны, то в точке M_1 функция имеет минимум, если знаки $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ чередуются, начиная с минуса, то в точке M_1 функция имеет максимум. Здесь этот достаточный признак не работает. Поэтому воспользуемся другим достаточным признаком экстремума: если $d^2 f(x, y, z) > 0$, то функция в соответствующей точке имеет минимум, если $d^2 f(x, y, z) < 0$, то – максимум, если $d^2 f(x, y, z)$ меняет знак в окрестности точки, то в этой точке экстремума нет.

В нашем случае:

$$d^2 f(x, y, z) = f''_{xx}(dx)^2 + f''_{yy}(dy)^2 + f''_{zz}(dz)^2 + 2f''_{xy}dx dy + 2f''_{xz}dx dz + 2f''_{yz}dy dz =$$

$= 2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 12dx dz + 12dy dz$. Если $dy = 0, dz = dx$, то $d^2 f = 14(dx)^2 > 0$. Если $dy = 0, dz = -dx$, то $d^2 f = -10(dx)^2 < 0$. Так как $d^2 f$ принимает значения разных знаков, то экстремума в точке M_1 нет.

Проверяем достаточное условие для точки $M_2(-36; -36; 12)$:

$$A_{11} = 2, A_{22} = 2, A_{33} = 72, A_{12} = A_{21} = 0, A_{13} = A_{31} = 6, A_{23} = A_{32} = 6.$$

Находим определители $\Delta_1 = 2$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 72 \end{vmatrix} = 144$. Так как все опре-

делители больше нуля, точка M_2 является точкой минимума, при этом $f_{\min} = f(M_2) = -864$.

Задача 8. Исследовать на локальный экстремум функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 2x - 2y + 4z + 10$.

Решение. Представим исходное уравнение в виде $F(x, y, z) = 0$ и продифференцируем:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 &= 0, \\ 2xdx + 2ydy + 2zdz - 2dx + 2dy - 4dz &= 0 \end{aligned} \quad (4).$$

Выразим отсюда dz : $dz = \frac{-xdx - ydy + dx - dy}{z - 2} = \frac{1-x}{z-2}dx + \frac{-1-y}{z-2}dy$.

Тогда $z'_x = \frac{1-x}{z-2}$, $z'_y = \frac{-1-y}{z-2}$. Найдем критические точки из условия: $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \\ F = 0. \end{cases}$ Полу-

чим:

$$\begin{cases} \frac{1-x}{z-2} = 0, \\ \frac{-1-y}{z-2} = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \\ z^2 - 4z - 12 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(1, -1), z_1 = -2, \\ M_2(1, -1), z_2 = 6. \end{cases}$$

Каждую из двух полученных точек проверяем по достаточному условию экстремума. Для этого продифференцируем равенство (4), учитывая, что dx, dy – фиксированные, а z – функция от x, y :

$$2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 + 2zd^2z - 4d^2z = 0.$$

Так как в критической точке $dz = 0$, то $d^2z = \frac{2(dx)^2 + 2(dy)^2}{4-2z} = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{2-z}$.

Вычисляем значение дифференциала в критических точках:

$$d^2z(M_1) = \frac{dx^2 + dy^2}{4} > 0, \text{ следовательно, } M_1(1, -1) \text{ точка минимума и } z_{\min} = -2;$$

$$d^2z(M_2) = \frac{dx^2 + dy^2}{-4} < 0, \text{ следовательно, } M_2(1, -1) \text{ точка максимума и } z_{\max} = 6.$$

Задача 9. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z) = xy + yz$, если $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$ ($x > 0, y > 0, z > 0$).

Решение. Имеем задачу на условный экстремум. Запишем уравнения связи в виде $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$, $G(x, y, z) = y + z - 2 = 0$ и составим функцию Лагранжа:

$$\Phi = f + \lambda F + \mu G = xy + yz + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(y + z - 2).$$

Находим критические точки из системы:

$$\begin{cases} \Phi'_x = 0, \\ \Phi'_y = 0, \\ \Phi'_z = 0, \\ F = 0, \\ G = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 2\lambda x = 0, \\ x + z + 2\lambda y + \mu = 0, \\ y + \mu = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0, \\ y + z - 2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{выразим } \lambda \text{ из 1}^{\text{го}} \text{ уравнения} \\ \mu - \text{из 3}^{\text{го}} \text{ уравнения} \\ \text{подставим их во 2}^{\text{е}} \text{ уравнение,} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -y/(2x), \\ x + (2 - y) + 2(-y/(2x))y - y = 0, \\ \mu = -y, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ z = 2 - y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -y/(2x), \\ x^2 + 2x - 2xy - y^2 = 0, \\ \mu = -y, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ z = 2 - y; \end{cases} \Rightarrow$$

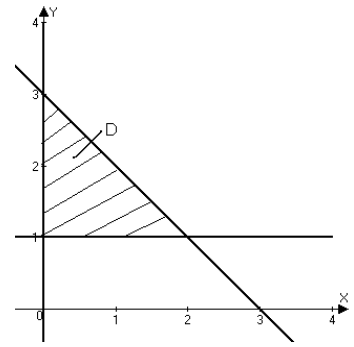
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{из уравнения связи} \\ x^2 + y^2 = 2 \text{ выразим } x^2 \text{ и} \\ \text{подставим во 2}^{\text{е}} \text{ уравнение,} \\ \text{сократим его на 2,} \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -y/(2x), \\ x - xy - y^2 + 1 = 0, \\ \mu = -y, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ z = 2 - y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -y/(2x), \\ (1 - y)(x + y + 1) = 0, \\ \mu = -y, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ z = 2 - y. \end{cases}$$

Получаем единственное решение системы $x = y = z = 1$, соответствующее коэффициентам $\lambda = -1/2$, $\mu = -1$. Вычисляем вторые производные и находим значение дифференциала второго порядка в критической точке: $\Phi''_{xx} = 2\lambda$, $\Phi''_{yy} = 2\lambda$, $\Phi''_{zz} = 0$, $\Phi''_{xy} = 1$, $\Phi''_{xz} = 0$, $\Phi''_{yz} = 1$, $d^2\Phi = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz$.

Из уравнения связи следует, что $dy = -dz$, поэтому $d^2\Phi = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy - 2dy^2 = -(dx + dy)^2 - 2dy^2 < 0$. Таким образом, точка $(1, 1, 1)$ является максимумом функции и $f_{\max} = 2$.

Задача 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $D: x \geq 0, y \geq 1, x + y \leq 3$.

Решение. Находим критические точки функции внутри области из условия $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$ Получаем $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ 2y - x - 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 1)$ – точка лежит на границе области D . Значит, внутри области критических точек нет.



Исследуем на границе области D . Для исследования разбиваем границу на три участка (соответственно сторонам треугольника):

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ 1 \leq y \leq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ y = 3 - x. \end{cases}$$

На первом участке функция имеет вид $z = x^2 - 2x$. Находим критические точки из условия $z' = 0$: $2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ (принадлежит первому участку); тогда $z_1 = z(1, 1) = -1$.

На втором участке функция имеет вид $z = y^2 - y$. Находим критические точки: $2y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1/2$ (не принадлежит второму участку).

На третьем участке функция имеет вид $z = x^2 + (3 - x)^2 - x(3 - x) - x - (3 - x)$ или $z = 3x^2 - 9x + 6$. Находим критические точки: $6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3/2$ (принадлежит третьему участку); тогда $z_2 = z(3/2, 3/2) = -3/4$.

Вычисляем значения функции в точках стыка участков (вершины треугольника): $z_3 = z(0, 1) = 0$, $z_4 = z(2, 1) = 0$, $z_5 = z(0, 3) = 6$. Выбираем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

$$\begin{aligned} z_5 = z(0, 3) = 6 & \text{ – наибольшее значение,} \\ z_1 = z(1, 1) = -1 & \text{ – наименьшее значение.} \end{aligned}$$

Задача 11. Определить, каковы размеры открытой прямоугольной ванны данной вместимости V , если она имеет наименьшую площадь поверхности.

Решение. Ванна имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Обозначим его размеры через x, y, z (длина, ширина, высота). Так как объем $V = xyz$ задан, то $z = \frac{V}{xy}$.

Площадь поверхности ванны: $S = 2(xz + yz) + xy$. Подставляем значение z и получаем

функцию двух переменных: $S(x, y) = 2\left(x \cdot \frac{V}{xy} + y \cdot \frac{V}{xy}\right) + xy$ или

$S(x, y) = 2V\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) + xy$. Нужно найти точку минимума полученной функции, причем по смыслу задачи $x > 0, y > 0$.

Находим критические точки, используя необходимое условие экстремума: $\begin{cases} S'_x = 0, \\ S'_y = 0. \end{cases}$

$$\text{В нашем случае } \begin{cases} -\frac{2V}{x^2} + y = 0, \\ -\frac{2V}{y^2} + x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2V}{x^2}, \\ -\frac{2V}{(2V/x^2)^2} + x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{2V}, \\ y = \sqrt[3]{2V}. \end{cases}$$

Вычисляем вторые производные и находим значение дифференциала второго порядка в критической точке: $S''_{xx} = \frac{4V}{x^3}$, $S''_{yy} = \frac{4V}{y^3}$, $S''_{xy} = 1$,

$$d^2S = \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3}(dx)^2 + 2dx dy + \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3}(dy)^2 = 2(dx)^2 + 2dx dy + 2(dy)^2 > 0. \text{ Значит, функция } S(x, y) \text{ имеет минимум при } x = \sqrt[3]{2V}, y = \sqrt[3]{2V}. \text{ Тогда } z = \frac{V}{(\sqrt[3]{2V})^2} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}.$$

Задача 12. Показать, что касательные плоскости к поверхности $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ отсекают на осях координат отрезки, сумма квадратов которых постоянна и равна a^2 .

Решение. Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$: $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$.

Запишем исходное уравнение в виде $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} - a^{2/3} = 0$ (5).

Тогда $F = x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} - a^{2/3}$, $F'_x = \frac{2x^{-1/3}}{3}$, $F'_y = \frac{2y^{-1/3}}{3}$, $F'_z = \frac{2z^{-1/3}}{3}$. Составляем уравнение касательной плоскости к поверхности в произвольной точке M_0 , причем координаты этой точки удовлетворяют равенству (5):

$$\frac{2x_0^{-1/3}}{3}(x - x_0) + \frac{2y_0^{-1/3}}{3}(y - y_0) + \frac{2z_0^{-1/3}}{3}(z - z_0) = 0, \quad (6).$$

Чтобы найти отрезки, которые касательная плоскость отсекает на осях координат, запишем соответствующее уравнение плоскости в отрезках. Преобразуем уравнение (6):

$$\begin{aligned} (6): \quad x_0^{-1/3}(x - x_0) + y_0^{-1/3}(y - y_0) + z_0^{-1/3}(z - z_0) = 0, \Rightarrow \\ \frac{x}{x_0^{1/3}} - x_0^{2/3} + \frac{y}{y_0^{1/3}} - y_0^{2/3} + \frac{z}{z_0^{1/3}} - z_0^{2/3} = 0, \Rightarrow \frac{x}{x_0^{1/3}} + \frac{y}{y_0^{1/3}} + \frac{z}{z_0^{1/3}} = x_0^{2/3} + y_0^{2/3} + z_0^{2/3}, \\ \Rightarrow \frac{x}{x_0^{1/3}} + \frac{y}{y_0^{1/3}} + \frac{z}{z_0^{1/3}} = a^{2/3}, \Rightarrow \frac{x}{x_0^{1/3} a^{2/3}} + \frac{y}{y_0^{1/3} a^{2/3}} + \frac{z}{z_0^{1/3} a^{2/3}} = 1. \end{aligned}$$

Тогда плоскость отсекает на осях координат отрезки: $x_0^{1/3} a^{2/3}$, $y_0^{1/3} a^{2/3}$, $z_0^{1/3} a^{2/3}$.

Составляем сумму квадратов полученных отрезков:

$$\left(x_0^{1/3} a^{2/3}\right)^2 + \left(y_0^{1/3} a^{2/3}\right)^2 + \left(z_0^{1/3} a^{2/3}\right)^2 = a^{4/3} \left(x_0^{2/3} + y_0^{2/3} + z_0^{2/3}\right) = a^{4/3} \left(a^{2/3}\right) = a^2.$$

Индивидуальные задания по теме «Функции нескольких переменных»

Вариант 1

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = 3^{\ln(-x^2 - y^2 - 4x)} + \frac{1}{\sqrt[4]{xy}}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^4 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = e^{\sin x}(y + z^2) + z \ln(x^2 + y^2 + 3z)$ в окрестности точки $A(0; 0; 1)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$, если $\omega = f\left(\frac{x}{y}, y\right)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Доказать, что $a \cdot z'_x + b \cdot z'_y = c$, если $f(cx - az, cy - bz) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ при $x = 1$, $y = -1$, если функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ определяются системой $\begin{cases} xu + yv = 0, \\ uv - xy = 5, \end{cases}$ причем $u(1; -1) = v(1; -1) = 2$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

б) функцию $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ ($x > 0, y > 0, z > 0$);

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением $z^3 - xyz = 8$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = 2x - 2y - z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 36$;

б) $f(x, y, z) = x^2 - 2y + z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $y - 2z - 1 = 0$ ($x \neq 0$).

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в треугольнике с вершинами в точках $A(-2; -2)$, $B(2; -2)$, $C(2; 2)$.

10. Представить положительное число a в виде суммы четырех положительных чисел так, чтобы произведение их обратных величин было наименьшим.

11. Для поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ найти уравнение нормали, ортогональной плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

Вариант 2

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \lg \sqrt[3]{\frac{x^2 - y - 1}{x - y}}.$$

2. Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} (1 + xy)^{1/(x^2+y^2)}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \sin \frac{xz^2}{x+y} + e^{x+2y-z}$ в окрестности точки $A(1; 1; 0)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$, если $\omega = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$, где $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

5. Показать, что $(y-z) \cdot z'_x + (z-x) \cdot z'_y = x-y$, если $f(x^2 + y^2 + z^2) = x + y + z$ и $f(u)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ при $x = y = 1$, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определяются системой

$$\begin{cases} xu - yv = 0, \\ yu + xv = 2, \end{cases} \text{ причем } u(1; 1) = v(1; 1) = 1.$$

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 \ln x - 3 \ln y$;

б) функцию $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением $e^z - x^2z - y^2z = e$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($x > 0, y > 0, z > 0$);

б) $f(x, y, z) = xz + y$, $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + x - 2y$, если $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq x + y \leq 1$.

10. Доказать, что среднее геометрическое трех положительных чисел, сумма которых постоянна, не превосходит их среднего арифметического.

11. На поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ найти точки, в которых нормаль параллельна оси Oz .

Вариант 3

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = e^{\sqrt[4]{x-y^2-4y+3}} + \ln(-x-2y).$$

2. Является ли в точке $(0,0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} (1+xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}, & |x|+|y| \neq 0, \\ 1, & x=y=0, \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \ln \frac{yx^2}{z+y} + 5z^2 + 3x - y$ в окрестности точки $A(1; 1; 1)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$, если $\omega = f(x+y, xy)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Доказать, что $(x-1) \cdot z'_x + (y+2) \cdot z'_y = z$, если $f\left(\frac{x-1}{z}, \frac{y+2}{z}\right) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ при $x=1$, $y=2$, если функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ определяются систе-

мой $\begin{cases} x e^{u+v} + 2uv = 1, \\ y e^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x, \end{cases}$ причем $u(1; 2) = v(1; 2) = 0$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$;

б) функцию $f(x, y, z) = x^3 - y^2 - z^2 + yz - 3x + 6y$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z$, $x - y + z^2 = 3$;

б) $f(x, y, z) = x^2 + z^2 - 2y$, $2x + y^2 + 1 = 0$, $y - 2z + 9 = 0$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2x + 18y - 4$ в области: $-1 \leq y \leq 1$, $-y - 2 \leq x \leq 0$.

10. Найти три положительных числа, произведение которых наибольшее, если сумма их равна a .

11. Для поверхности $z = 4x - xy + y^2$ найти уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $4x + 2y - 2z + 9 = 0$.

Вариант 4

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = 2^{\log_3(4x^2 - y^2)} + \sqrt{4y - x^2 - y^2}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^6 + y^6}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \operatorname{sh} \frac{x-y}{z^2} + \ln(x^2 - y^2 + 4z)$ в окрестности точки $A(0; 0; 2)$.

4. Проверить равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, если

$$u(x, y) = x \cdot \varphi(x + y) + y \cdot \psi(x + y).$$

5. Доказать, что $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = z - xy$, если $f\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ при $x = y = 1$, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ заданы системой

$$\begin{cases} u + v = x + y - 2 + \pi / 2, \\ y \sin u = x \sin v, \end{cases} \quad \text{причем } u(1; 1) = v(1; 1) = \frac{\pi}{4}.$$

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;

б) функцию $f(x, y, z) = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{16}{z}$ ($x > 0, y > 0, z > 0$);

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением $e^z - xy + z + x^2 + y^2 - 1 = 0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = x + y + z, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$;

б) $f(x, y, z) = xyz, x + y + z = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

9. В треугольнике с вершинами в точках $A(0; 0)$, $B(2; 2)$, $C(2; -2)$ найти наибольшее

и наименьшее значения функции $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$.

10. Доказать, что сумма трех положительных чисел, имеющих данное произведение будет наименьшей, если все эти числа равны между собой.

11. На поверхности $x^2 + y^2 - z^2 + 2x = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости XOY .

Вариант 5

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = 5\sqrt[4]{2x - x^2 - y^2} - \sqrt{xy^3}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^6 + y^3}, & x^6 + y^3 \neq 0, \\ 0, & x^6 + y^3 = 0, \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}$ в окрестности точки $A(-1; 0; 1)$.

4. Доказать, что если $z = f(x - y)$, где $f(u)$ – дважды дифференцируемая функция, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

5. Найти z'_x, z'_y , если $f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ при $x = y = 1$, если функции $u(x, y), v(x, y)$ заданы системой

$$\begin{cases} e^{u/x} \cdot \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \\ e^{u/x} \cdot \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \text{причем } u(1; 1) = 0, v(1; 1) = \frac{\pi}{4}.$$

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;

б) функцию $f(x, y, z) = x y^2 z^3 (1 - x - 2y - 3z)$ ($x > 0, y > 0, z > 0$);

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$2(x^2 + z^2) + 3(2y^2 + 1) + 4(xz - y) - 4x = 0.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = x^2 + 4y + z^2, 2x - y^2 + 4z = 6$;

б) $f(x, y, z) = 4x + 2y + z, x^2 + y - 1 = 0, y^2 + z - 2 = 0$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^2x$ в области: $x + y \leq 4, x \geq -1, y \geq 0$.

10. Положительное число a разложить на три положительных слагаемых x, y, z так, чтобы произведение $x y^2 z^3$ было максимальным.

11. Для поверхности $x^2 - z^2 - 2x + 6y = 8$ найти уравнение нормали, параллельной прямой $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$.

Вариант 6

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \frac{\ln(x-3)}{\sqrt{y^2 - x^2 - 4}}$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - y^3 x}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1+xy} + z \ln(z + x^2 + y^2)$ в окрестности точки $A(0; 0; 1)$.

4. Доказать, что функция $z = x \cdot \varphi(y/x) + y \cdot \psi(y/x)$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

5. Найти z'_x, z'_y , если $f(x+y, y+z, z-x) = 0$ и $f(u, v, w)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $x=1, y=2$, если функции $u(x, y), v(x, y)$ заданы системой $xu + yv = 0, x + y = -u - v - 3$, причем $u(1; 2) = v(1; 2) = 0$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;

б) функцию $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$\frac{x^3}{3} + 12y^2 - z^2 x + z - 4y = 0 \quad (x > 0, z > 0).$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = x + 2y + z/2, x^2 + y^2 + z^2 = 21$;

б) $f(x, y, z) = xyz, x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, если $|x| + |y| \leq 1$.

10. В сегмент эллиптического параболоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{z}{2}, z = 2$ вписан параллелепипед. При каких размерах параллелепипеда его объем будет максимальным?

11. Найти углы, которые образует с осями координат нормаль к поверхности $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ в точке $M\left(1; 1; \frac{\pi}{4}\right)$.

Вариант 7

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}}{\ln(x + y)}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & x^6 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^6 + y^2 = 0, \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = (\sin x)^{\cos y} + e^{z^2 - xy}$ в окрестности точки $A\left(\frac{\pi}{2}; 0; -1\right)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$, если $\omega = f\left(x - y, \frac{y}{x}\right)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Показать, что $(x^2 - y^2 - z^2) \cdot z'_x + 2xy \cdot z'_y = 2xz$, если $x^2 + y^2 + z^2 = y f\left(\frac{z}{y}\right)$ и $f(u)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ при $x=1$, $y=0$, если функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ заданы системой

$$\begin{cases} u + v = x + y + 1, \\ xu + yv = 3, \end{cases} \text{ причем } u(1; 0) = -1, v(1; 0) = 3.$$

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$;

б) функцию $f(x, y, z) = 3x^2 + z^2 - 3y^2x + 6xy - 8z + 5$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением $x^2 + y^2 + 4xz + 4 + \frac{z^2 + z}{2} = 0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 5$, $3x^2 + y + z = 1$;

б) $f(x, y, z) = 4x^2 + y - 2z$, $z^2 + 2x = 0$, $2xy + 1 = 0$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x - y$ в области: $-1 \leq y \leq 0$, $-y - 2 \leq x \leq 1$.

10. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине найти наибольший по площади.

11. В какой точке эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

Вариант 8

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\lg(1 - x^2 - y^2)}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в окрестности точки $A(-1; 1; 1)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$, если $\omega = f(x - y, xy)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Найти z'_x, z'_y , если $f(x - 2y, y - 3z, z - x) = 0$ и $f(u, v, w)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ при $x = y = 1$, если функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ заданы системой $xu^2 + yv^2 = 2$, $xv^2 - yu^2 = 0$, причем $u(1; 1) = v(1; 1) = 1$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;

б) функцию $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x + z^2 - 2z - 5y$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = e^{xyz}$, $x + 2y - 3z = 6$, $(x > 0, y > 0, z > 0)$;

б) $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$, $x + y + z = 2$, $2x + y + 2z = 3$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, если $x^2 + y^2 \leq 100$.

10. Тело состоит из прямого кругового цилиндра, завершеного прямым круговым конусом. Площадь полной поверхности тела $S = 4\pi(3 + \sqrt{5})$. Определить радиус основания, высоту цилиндра и высоту конуса, таким образом, чтобы объем тела был наибольшим.

11. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ отсекают на осях координат отрезки, сумма длин которых есть величина постоянная.

Вариант 9

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y} + \ln(4 - x^2 - y).$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \operatorname{sh} \frac{x+y}{z^2} + 3x^3 - 2xy + z$ в окрестности точки $A(0; 0; -1)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$, если $\omega = f\left(\frac{x}{y}, y\right)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Найти z'_x, z'_y , если $f(x - y + z, x^2 + y - z^2) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ при $x=1, y=1$, если функции $u(x, y), v(x, y)$ заданы системой

$$\begin{cases} e^u \cdot \cos(v^2) = x^2 + y^2 - 1, \\ e^v \cdot \cos(u^2) = x^2 - y^2 + 1, \end{cases} \text{ причём } u(1; 1) = v(1; 1) = 0.$$

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = (x - y + 1)^2 - 4x + \frac{y^3}{3}$;

б) функцию $f(x, y, z) = 2x^3 + y^3 + 4z^2 - 3y^2 - 8xz - 8x + 5$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = x + y + z, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 3$;

б) $f(x, y, z) = xyz, x + y - z = 4, x - y - z = 8$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy - 3x - y$ в области: $y \geq x - 2, x \geq 0, y \leq 1$.

10. Даны три точки $A(4; 0; 4), B(4; 4; 4), C(4; 4; 0)$. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ найти точку S такую, чтобы объем пирамиды $SABC$ был наибольшим.

11. В каких точках эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ касательные плоскости параллельны плоскости $x + 4y + 6z = 0$?

Вариант 10

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \sqrt[8]{9 - x^2 - y^2} + y / \sqrt{4x^2 - y^2}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \operatorname{ch} \frac{z}{(x+y)^2} - z^{x-y}$ в окрестности точки $A(-1; -1; 2)$.

4. Проверить выполнение равенства $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ для функции $f(x, y) = x \cdot \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$,

где $\varphi(u)$ произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Доказать, что $2z'_x - 3z'_y = 1$, если $f(x - 2z, y + 3z) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $x = \pi$, $y = 0$, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ заданы систе-

мой
$$\begin{cases} x^2 u^3 + y^2 v = \sin x + \pi^2, \\ x v^3 - y^2 u = \cos x + \pi + 1, \end{cases} \quad \text{причем } u(\pi; 0) = v(\pi; 0) = 1.$$

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

б) функцию $f(x, y, z) = 2x^3 - x^2 + xy^2 - 4x + 4z^2 - 2z$ ($x > 0$);

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + y + \frac{z^2}{2}$, $x^2 - y^2 - z^2 = 1$;

б) $f(x, y, z) = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2$, $x^2 + y^2 = -2z$, $x + y + z = 1$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x + y \geq -3$.

10. В эллипсоид $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} + z^2 = 1$ вписать параллелепипед наибольшего объема.

11. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ ($a > 0$) образуют с координатными плоскостями тетраэдр постоянного объема.

Вариант 11

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{4y^2 + 4x^2 + 8y - 5}}{\ln(-x - y)}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = e^{\sin y} \cdot (x + z^2) + x \cdot \ln(z^2 + 3x)$ в окрестности точки $A(0; \pi/2; 1)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z}$, если $\omega = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Доказать, что $4z'_x - z'_y = 2$, если $f(2x - 4z, 2y + z) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ заданы системой:
$$\begin{cases} u \sin v + v \sin u = x^2 + y^2 - 2, \\ u \cos v + v \cos u = x^2 - y^2 + p. \end{cases}$$

Найти $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ при $x = y = 1$, если $u(1; 1) = 0$, $v(1; 1) = \pi$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x^2y + 10y$;

б) функцию $f(x, y, z) = xyz(4a - x - y - z)$ ($a > 0, x > 0, y > 0, z > 0$);

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением $x^2 + 5z^2 + y^2 - 4xz - 2y = 0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $x + 2y + 3z = 6$, ($x > 0, y > 0, z > 0$);

б) $f(x, y, z) = x^2 + yz$, $x^2 + y^2 = 8$, $4x - y + z = 0$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^3 - y^3 - 9xy - 27$ в области: $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq x$.

10. Найти точку S в области: $0 \leq y \leq 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$, $z = 0$, расстояние от которой до плоскости $\frac{x}{7} + \frac{y}{6} + \frac{z}{1} = 1$ наименьшее.

11. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M(1; -2; 1)$ к кривой
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Вариант 12

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \frac{2x - 3y}{\ln(x - 2)} - \sqrt[4]{x + y^2 + 4y - 3}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x + y)^4}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \sin \frac{z x^2}{z + y} + e^{2y + z - x}$ в окрестности точки $A(0; 1; 1)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$, если $\omega = f(x - y, x y)$, где $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

5. Доказать, что $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = z - x y$, если $f\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $x = 1$, $y = 0$, если функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ определяются системой:
$$\begin{cases} x \cdot e^{u^2} + uv = e, \\ y \cdot e^{v^2} - uv = x - 1, \end{cases}$$
 причем $u(1; 0) = 1$, $v(1; 0) = 0$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = x y^2(1 - x - y)$ ($y > 0$);

б) функцию $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную уравнением $6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 4x - 8y - 8z + 5 = 0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = x^2 y + z$, $8x y + 4y^2 + z^2 + 11 = 0$ ($z > 0$);

б) $f(x, y, z) = x y + x z$, $x^2 + y^2 = 4$, $y + z = 2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x \cdot e^{y + x \sin y}$ в области: $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi/6$.

10. Известны длины сторон a и b треугольника и угол φ между ними. Разделить этот треугольник на две части равной площади отрезком прямой, пересекающим заданные стороны и имеющим наименьшую длину.

11. Через точку $M(1; 2; 2)$ провести плоскость, образующую с плоскостями координат тетраэдр наименьшего объема.

Вариант 13

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 2x - 8)}{\sqrt[4]{4 - x - y^2}}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} (1 + x^2 y^2)^{1/(x^2 + y^2)}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \cos \frac{zx}{y} + 5y^2 + 3x - z$ в окрестности точки $A(1; 1; 0)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x}$, если $\omega = f(x + y, xy)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Доказать, что $(x - 1) \cdot z'_x + (y + 2) \cdot z'_y = z$, если $f\left(\frac{x-1}{z}, \frac{y+2}{z}\right) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ заданы системой $\begin{cases} x \operatorname{tg} u + y \operatorname{tg} v = 0, \\ x \ln u + y \ln v = 2 \ln \pi + \ln 2. \end{cases}$

Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ при $x = y = 1$, если $u(1; 1) = 2\pi$, $v(1; 1) = \pi$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = 2xy + (1 - x - y)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)$, $(x > 0, y > 0)$;

б) функцию $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 - 6xy + 2z + 15x$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 3$;

б) $f(x, y, z) = y^2 + xz$, $x + 4y - z = 0$, $y^2 + z^2 = 18$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4 \ln x - 2 \ln y$ в области: $1 \leq x \leq 2y$, $y \leq 1$.

10. Найти наибольшее расстояние между точками поверхности $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 6 = 0$ и плоскостью $z = 0$.

11. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M(1; 1; 1)$

к кривой $\begin{cases} y = x, \\ z = x^2. \end{cases}$

Вариант 14

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x; y) = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y^2} + \ln x.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} (1 + xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}, & |x|+|y| \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = z^y \cdot \ln(x-1)$ в окрестности точки $A(2; 1; 2)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$, если $\omega = f\left(x - y, \frac{y}{x}\right)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Найти z'_x, z'_y , если $f(x + 3y, y + 2z, z - x) = 0$ и $f(u, v, w)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ в точке $x = 0, y = 1$, если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ задаются системой:

$$\begin{cases} uv + u^2v^2 = xy, \\ xuv + yv^2 = x + y, \end{cases} \quad \text{причем } u(0; 1) = 0, v(0; 1) = 1.$$

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = x^3 y^2 (6 - x - y)$ ($x > 0, y > 0$);

б) функцию $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - 4z^2 - x^2 y^2 + \frac{5}{4}(x + y) - z$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = x - 2y + z, x^2 + y^2 - z^2 = 1$;

б) $f(x, y, z) = xyz, x^2 + y^2 = 2z, x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ в области: $\sqrt{x} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$.

10. Найти треугольник данного периметра $2p$, который вращением вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

11. Показать, что плоскости, касательные к поверхности $z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$, проходят через одну и ту же точку.

Вариант 15

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x; y) = \frac{\lg(-x - y)}{\sqrt{x^2 + 2x + y}}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ в окрестности точки $A(-1; 1; 0)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z}$, если $\omega = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Найти z'_x, z'_y , если $f(x + y - z, x - y + z^2) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ заданы системой $\begin{cases} \ln(u + v) + xu = 1, \\ \ln(u + v) + yv = 0. \end{cases}$

Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ при $x = y = 1$, если $u(1; 1) = 1$, $v(1; 1) = 0$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$;

б) функцию $f(x, y, z) = x^3 - y^2 + 2z^2 - yz - 3xy - 3z - 21x$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 3z - 6x = 0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $x + 3y^2 + 9z^3 = 1$ ($x > 0, y > 0, z > 0$);

б) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $x^2 + y + 2 = 0$, $3z - 2y = 7$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$ в области: $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$.

10. Найти точку S в области: $-1 \leq z \leq 1$, $2y + x = 2$, $1 \leq x \leq 2$, расстояние от которой до плоскости $z - 7x - y = 0$ наименьшее.

11. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке

$M(1; -1; 2)$ к кривой $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9, \\ 3x^2 + y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$

Вариант 16

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \sqrt{y^2 + x^2} - x + \ln(2x - x^2 - y^2).$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = x^y \ln(x + y + z^2)$ в окрестности точки $A(1; 1; 1)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$, если $\omega = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$, где $f(u, v)$ – дважды дифференцируемая функция.

5. Доказать, что $z'_x + 2z'_y = 3$, если $f(3x - z, 3y - 2z) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ заданы системой: $\begin{cases} u + v = x + y, \\ xu + yv = 1. \end{cases}$ Найти $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

при $x = 0$, $y = 1$, если $u(0; 1) = 1$, $v(0; 1) = 0$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$;

б) функцию $f(x, y, z) = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2 + \frac{256}{x}$ ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$);

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + xy - x + 3y - z - 7/3 = 0 \quad (z > 0).$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y) = xy^2z^3$, $x + y + z = 12$ ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$);

б) $f(x, y, z) = xyz$, $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x + 8y$ в области: $x \geq 0$, $y \geq -x$, $y \leq x$, $x \leq 5$.

10. Если в электрической цепи, имеющей сопротивление R , течет ток I , то количество тепла, выделяющееся в единицу времени, пропорционально $I^2 R$. Определить, как надо разветвить ток I на токи I_1, I_2, I_3 с помощью трех проводов, сопротивления которых R_1, R_2, R_3 , чтобы выделение тепла было наибольшим.

11. На поверхности $x^2 + y^2 + 5z^2 = 28$ найти точки, касательные плоскости в которых параллельны плоскости $2x + 2y + 10z = 11$.

Вариант 17

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x; y) = \frac{y}{\ln(x+y)} + \sqrt{y-x^2-4x-3}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \ln(1-x-y-z) + e^{x-y+z}$ в окрестности точки $A(0; 0; -2)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z}$, если $\omega = f\left(x+y, \frac{x+y}{z}\right)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Найти z'_x, z'_y , если $f(y-x, y+z, x-3z) = 0$ и $f(u, v, w)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ заданы системой $\begin{cases} uv + 2xy = 1, \\ x^2u - y^2v = -1. \end{cases}$

Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ при $x = y = 1$, если $u(1; 1) = v(1; 1) = 1$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 - y^2 + 4xy$;

б) функцию $f(x, y, z) = 2x^3 + y^2 + 2z^2 - 2xz - 2y - 2x + 3$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением $z^2 + x^3 - y^2 - 3x + 4y + z - 8 = 0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$, $2x + 3y + 4z = 39$;

б) $f(x, y, z) = 2x - 2y + z^2$, $2z - x^2 + 1 = 0$, $yx + 2 = 0$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$ в области: $y \geq x-1$, $x \geq 0$, $y \leq 0$.

10. На части плоскости $x+y=0$, вырезанной цилиндром $x^2 + (z-1)^2 = 9$, найти точку, сумма квадратов расстояний до которой от точек $A(0; 4; 1)$ и $B(2; -5; 1)$ наибольшая.

11. Найти точки на поверхности $\sqrt{(x^2+y^2)^3} - z^2 = 0$, в которых нормали к поверхности параллельны прямой $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$.

Вариант 18

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \frac{\lg(x^2 + y^2 - 8)}{\sqrt{y^2 - x^2 - 4}}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^{21/10} + y^{21/10})}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \arccos \frac{xz^2}{\sqrt{x+y}}$ в окрестности точки $A(1; 1; -1)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z}$, если $\omega = f(x^2 + y, z)$, где $f(u, v)$ – дважды дифференцируемая функция.

5. Показать, что $(y - z) \cdot z'_x + (z - x) \cdot z'_y = x - y$, если $f(x^2 + y^2 + z^2) = x + y + z$ и $f(u)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ заданы системой $\begin{cases} uv - x^2 y^2 = 1, \\ x^2 u^2 + y^2 v^2 = 1. \end{cases}$

Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $x = 1$, $y = 0$, если $u(1; 0) = v(1; 0) = 1$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)}$;

б) функцию $f(x, y, z) = x + \frac{4y^3}{x^2} + \frac{3z}{y} + \frac{3}{z}$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением $18(x^2 + y^2 + z^2) = x^4 + y^4 + z^4$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = xyz$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ($x > 0$, $z > 0$);

б) $f(x, y, z) = x + y - z$, $4x^3 + 4y^3 + 4z^3 + 12x + 12y + 12z = 13$, $x + y = 1$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2x - xy$ в области: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

10. Тело состоит из прямого кругового цилиндра, завершеного прямым круговым конусом. Площадь полной поверхности тела $S = 20\pi(3 + \sqrt{5})$. Определить радиус основания, высоту цилиндра и высоту конуса, таким образом, чтобы объем тела был наибольшим.

11. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M(0; 1; -1/6)$ к кривой $\begin{cases} x^2/4 - y^2/3 = 2z, \\ x - 2y + 2 = 0. \end{cases}$

Вариант 19

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x; y) = \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{y-x}} + \ln(y - x^2 + 4x - 4).$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \operatorname{sh} \frac{x+z}{y} + 3y^2 - 2xz$ в окрестности точки $A(0; -1; 0)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z}$, если $\omega = f(x + y^2, x y z)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Найти z'_x, z'_y , если $f(x - yz, x y^2 + z^2) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Функции $u(x, y), v(x, y)$ заданы системой $\begin{cases} u + v = x + y, \\ x^2 \cos u = (y^2 + x^2) \cos v. \end{cases}$ Найти $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$

при $x = \pi/2, y = 0$, если $u(\pi/2; 0) = v(\pi/2; 0) = \pi/4$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$;

б) функцию $f(x, y, z) = (7 - x - 2y - 3z)x y^2 z^3$ ($x > 0, y > 0, z > 0$);

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z + 2 = 0.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4, 2x + 3y + 4z = 9$ ($x > 0, y > 0, z > 0$);

б) $f(x, y, z) = x^2 + yz, x + y - z - 1 = 0, y^2 + z^2 - 2 = 0$ ($z > 0$).

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = (y - 4x^2)\sqrt{1 - y}$ в области: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

10. Даны три точки $A(1; 0; 1), B(1; 1; 1), C(1; 1; 0)$. В шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ найти точку S такую, чтобы объем пирамиды $SABC$ был наименьшим.

11. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке

$M(1; -4; 4)$ к кривой $\begin{cases} 28x^2 + y^2 - 3z^2 + 4 = 0, \\ 16x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0. \end{cases}$

Вариант 20

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \frac{\log_3(8 - x^2 - y^2 + 2y)}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \ln \frac{x}{(z + y)^2} - x^{z-y}$ в окрестности точки

$$A(4; -1; -1).$$

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$, если $\omega = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Найти z'_x, z'_y , если $f(x - y, 2y + z, z - 3x) = 0$ и $f(u, v, w)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ заданы системой $\begin{cases} xu + uv + vy = 0, \\ x^2 + y^2 + u^3 + v^3 = 2. \end{cases}$

Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $x = 0, y = 1$, если $u(0; 1) = 1, v(0; 1) = 0$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3xy^2 + 3x - 1$;

б) функцию $f(x, y, z) = z^3 + 2x^2 + y^2 - 3zx + 2xy - 2x$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 3zy - xy + 2 = 0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z, 2x + 2y + (z - 2)^2 + 3 = 0$;

б) $f(x, y, z) = xy + yz, x^2 + y^2 = 2, z^2 + y^2 = 2$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ в области: $x^2 \leq y \leq 2x^2, 0 \leq x \leq 1$.

10. В области: $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2, z = 0$ найти точку, расстояние от которой до плоскости $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} - z + 2 = 0$ наибольшее.

11. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M(2; -1; 1)$ к кривой $\begin{cases} y^2 + z^2 = x, \\ x + 2y - z + 1 = 0. \end{cases}$

Вариант 21

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 2y + \ln(4 - x^2 - y).$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \operatorname{sh} \frac{x+y}{z^2} + 3^{x^3 - 2xy + z}$ в окрестности точки $A(0; 0; -1)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$, если $\omega = f\left(\frac{x}{y}, y\right)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Найти z'_x, z'_y , если $f(x - y + z, x^2 + y - z^2) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $x = \pi$, $y = 0$, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ заданы системой

$$\begin{cases} x^2 u^3 + y^2 v = \sin x + \pi^2, \\ x v^3 - y^2 u = \cos x + \pi + 1, \end{cases} \quad \text{причем } u(\pi; 0) = v(\pi; 0) = 1.$$

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

б) функцию $f(x, y, z) = 2x^3 - x^2 + x y^2 - 4x + 4z^2 - 2z$ ($x > 0$);

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = \frac{x^3}{3} + y + \frac{z^2}{2}$, $x + y + z = 2$;

б) $f(x, y, z) = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2$, $x^2 + y^2 = -2z$, $x + y + z = 1$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x + y \geq -3$.

10. В эллипсоид $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} + z^2 = 1$ вписать параллелепипед наибольшего объема.

11. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ ($a > 0$) образуют с координатными плоскостями тетраэдр постоянного объема.

Вариант 22

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \frac{2x - 3y}{\ln(x - 2)} - \sqrt[4]{x + y^2 + 4y + 3}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^3 y^3 + (x + y)^4}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = \sin \frac{z x^2}{z + y}$ в окрестности точки $A(0; 1; 1)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$, если $\omega = f(x - y, x y)$, где $f(u, v)$ – дифференцируемая функция.

5. Доказать, что $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = z - x y$, если $f\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $x = 1$, $y = 0$, если функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ определяются

системой: $\begin{cases} x \cdot e^{u^2} + uv = e, \\ y \cdot e^{v^2} - uv = x - 1, \end{cases}$ причем $u(1; 0) = 1$, $v(1; 0) = 0$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = 2x y + (1 - x - y)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)$, $(x > 0, y > 0)$;

б) функцию $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 - 6x y + 2z + 15x$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2x y - 2x z - 2y z - 72 = 0.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 3$;

б) $f(x, y, z) = y^2 + x z$, $x + 4y - z = 0$, $y^2 + z^2 = 18$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 + 2x y - 4 \ln x - 2 \ln y$ в области: $1 \leq x \leq 2y$, $y \leq 1$.

10. Найти наибольшее расстояние между точками поверхности $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2x z - 6 = 0$ и плоскостью $z = 0$.

11. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке

$M(1; 1; 1)$ к кривой $\begin{cases} y = x, \\ z = x^2. \end{cases}$

Вариант 23

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}}{\ln(x + y)}.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & x^6 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^6 + y^2 = 0, \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = (\sin x)^{\cos y} + e^{z^2 - xy}$ в окрестности точки $A\left(\frac{\pi}{3}; 0; -1\right)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$, если $\omega = f\left(x - y, \frac{y}{x}\right)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Доказать, что $4z'_x - z'_y = 2$, если $f(2x - 4z, 2y + z) = 0$ и $f(u, v)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ заданы системой:
$$\begin{cases} u \sin v + v \sin u = x^2 + y^2 - 2, \\ u \cos v + v \cos u = x^2 - y^2 + p. \end{cases}$$

Найти $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ при $x = y = 1$, если $u(1; 1) = 0$, $v(1; 1) = \pi$.

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x^2 y + 10y$;

б) функцию $f(x, y, z) = xyz(4a - x - y - z)$ ($a > 0, x > 0, y > 0, z > 0$);

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением $x^2 + 5z^2 + y^2 - 4xz - 2y = 0$.

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $x + 2y + 3z = 6$, ($x > 0, y > 0, z > 0$);

б) $f(x, y, z) = x^2 + yz$, $x^2 + y^2 = 8$, $4x - y + z = 0$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^3 - y^3 - 9xy - 27$ в области: $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq x$.

10. Найти точку S в области: $0 \leq y \leq 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$, $z = 0$, расстояние от которой до плоскости $\frac{x}{7} + \frac{y}{6} + \frac{z}{1} = 1$ наименьшее.

11. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке $M(1; -2; 1)$ к кривой
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Вариант 24

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$f(x; y) = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y^2} + \ln x.$$

2. Является ли в точке $(0, 0)$ функция $f(x, y) = \begin{cases} (1 + xy)^{\frac{1}{|x|+|y|}}, & |x| + |y| \neq 0, \\ 0, & x = y = 0, \end{cases}$

непрерывной? дифференцируемой? Существуют ли производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$?

3. Линеаризовать функцию $f(x, y, z) = z^y \cdot \ln(x - 1)$ в окрестности точки $A(2; 1; 2)$.

4. Найти $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$, если $\omega = f\left(x - y, \frac{y}{x}\right)$, где $f(u, v)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

5. Найти z'_x, z'_y , если $f(x + 3y, y + 2z, z - x) = 0$ и $f(u, v, w)$ – произвольная дифференцируемая функция.

6. Найти $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ в точке $x = 0, y = 1$, если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ задаются системой:

$$\begin{cases} uv + u^2v^2 = xy, \\ xuv + yv^2 = x + y, \end{cases} \quad \text{причем } u(0; 1) = 0, v(0; 1) = 1.$$

7. Исследовать на локальный экстремум:

а) функцию $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$;

б) функцию $f(x, y, z) = x^3 - y^2 + 2z^2 - yz - 3xy - 3z - 21x$;

в) функцию $z(x, y)$, заданную неявно уравнением

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 3z - 6x = 0.$$

8. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y, z)$ при указанных ограничениях:

а) $f(x, y, z) = xy^2z^3, x + 3y^2 + 9z^3 = 1 (x > 0, y > 0, z > 0)$;

б) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2, x^2 + y + 2 = 0, 3z - 2y = 7$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$ в области: $-1 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1$.

10. Найти точку S в области: $-1 \leq z \leq 1, 2y + x = 2, 1 \leq x \leq 2$, расстояние от которой до плоскости $z - 7x - y = 0$ наименьшее.

11. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке

$M(1; -1; 2)$ к кривой $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9, \\ 3x^2 + y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$

Оглавление

1. Образец выполнения домашнего задания по теме «Функции нескольких переменных»	3
2. Индивидуальные задания по теме «Функции нескольких переменных»	12

Учебное издание

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
Сборник типовых заданий
для студентов физических специальностей

Составители: Кравченко Нелли Михайловна, Михалева Марина Михайловна
Чердынцева Галина Алексеевна

Редактор

Компьютерная верстка М.М. Михалева

Пописано в печать		Формат 60×84
		1/16
Бумага типограф- ская	Плоская печать	Усл. печ. л.
Уч.-изд. л.	Тираж	экз
	Заказ	

Редакционно-издательский отдел ФГАОУ ВПО УрФУ
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Ризография НИЧ ФГАОУ ВПО УрФУ
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19