Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет − УПИ»

Р. М. Минькова

Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных

Учебное пособие

Научный редактор − проф., д-р физ.-мат. наук Е. Ф. Леликова

Екатеринбург
2007

УДК 517.2 : 517.3
ББК 22.161.1
М 62

Рецензенты:
кафедра математики Уральского государственного горного университета (зав. кафедрой, проф., д-р физ.-мат. наук В.Б. Сурнев);
проф. д-р физ.-мат. наук И.В. Мельникова (Уральский государственный университет им. А.М, Горького, кафедра математического анализа)

Минькова Р.М.

М 62 Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных: учебное пособие / Р.М.Минькова. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2007. 120 с.

ISBN 978-5-321-01006-8

Рассмотрены дифференцирование и экстремум функций нескольких переменных, интегрирование функций нескольких переменных (двойные, тройные, криволинейные, поверхностные интегралы), теория скалярного и векторного полей. Учебное пособие предназначено для студентов физических специальностей физико-технического факультета.

Библиогр.: 7 назв. Рис.83.

Подготовлено кафедрой «Вычислительные методы и уравнения математической физики» при поддержке физико-технического факультета.

УДК 517.2: 517.3
ББК 22.161.1

ISBN 978-5-321-01006-8

© ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет − УПИ», 2007
© Р.М.Минькова, 2007

Оглавление

Глава 1. Функции нескольких переменных

1. Понятие функции нескольких переменных ……5
2. Предел и непрерывность функции ……6
3. Дифференцирование функции ……8
3.1. Частные производные ……8
3.2. Дифференцируемые функции ……10
3.3. Дифференциалы……12
3.4. Сложные функции и их дифференцирование……14
3.5. Дифференциалы сложной функции ……16
3.6. Неявные функции и их дифференцирование……17
3.7. Формула Тейлора……22
4. Геометрические приложения ……23
5. Экстремумы функции ……27
5.1. Локальный экстремум функции ……27
5.2. Глобальный экстремум функции……31
5.3. Условный экстремум функции ……32

Глава 2. Интегралы по фигуре

6. Понятие интеграла по фигуре и его свойства ……36
6.1. Фигура и ее мера ……36
6.2. Задача о вычислении массы фигуры ……37
6.3. Понятие интеграла по фигуре ……37
6.4. Конкретные виды интегралов по фигуре ……38
6.5. Свойства интеграла по фигуре……39
6.6. Механические приложения интеграла по фигуре ……41
7. Вычисление интегралов по фигуре……43
7.1. Определенный интеграл……43
7.2. Криволинейный интеграл первого рода……52
7.3. Двойной интеграл в прямоугольной системе……54
7.4. Двойной интеграл в криволинейной системе ……58
7.5. Тройной интеграл в прямоугольной системе ……62
7.6. Тройной интеграл в криволинейной системе……66
7.7. Поверхностный интеграл первого рода ……70

Глава 3. Теория скалярного и векторного полей

8. Скалярное поле ……73
8.1. Производная поля по направлению……74
8.2. Градиент скалярного поля и его свойства ……75
9. Векторное поле и векторные линии ……77
10. Поток векторного поля……79
10.1. Задача о количестве жидкости ……79
10.2. Понятие потока и формы его записи ……81
10.3. Вычисление потока ……81

10.4. Формула Остроградского. Дивергенция поля.....85
11. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля ……...……89
11.1. Задача о работе силы ….....…89
11.2. Понятие линейного интеграла и его свойства ….....89
11.3. Вычисление линейного интеграла ….....……90
11.4. Формулы Грина и Стокса. Ротор поля.....……..…..….....92
11.5. Условия независимости линейного интеграла от формы пути 96
12. Некоторые классы векторных полей.....99
12.1. Потенциальное поле.....99
12.2. Соленоидальное поле.....102
12.3. Гармонические поля.....105
13. Повторные операции теории поля.....107
14. Оператор Гамильтона.....108
15. Теория поля в ортогональной криволинейной системе.....110
15.1. Криволинейная система координат и ее базис.....110
15.2. Основные характеристики поля в ортогональных координатах....112
Библиографический список……..…….....119

Глава 1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие функции нескольких переменных

Рассмотрим линейное пространство R_k, элементы (точки) которого $M(x_1, x_2, ..., x_k)$ есть совокупности из k чисел. Введем ряд понятий.

1). ***Расстояние*** между точками $M(x_1, x_2, ..., x_k)$ и $N(y_1, y_2, ..., y_k)$ пространства R_k определим по формуле

$$\rho(M, N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_k - y_k)^2}.$$

2). Последовательность точек M_n назовем ***сходящейся*** к точке M при $n \to \infty$, если $\rho(M_n, M) \to 0$ при $n \to \infty$.

3). ***Окрестностью*** точки M_0 радиуса r назовем множество

$$S_r(M_0) = \{M \in R_k : \rho(M_0, M) < r\}.$$

Например, на плоскости XOY окрестность точки M_0 есть круг с центром в точке M_0 радиуса r (рис. 1).

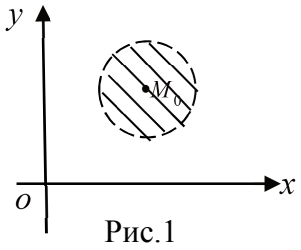

Рис.1

Выколотой окрестностью точки M_0 радиуса r назовем множество

$$\overset{\circ}{S}_r(M_0) = S_r(M_0) \setminus \{M_0\} = \{M \in R_k : 0 < \rho(M_0, M) < r\}.$$

4). Точку M_0 из множества D назовем ***внутренней*** (рис.2), если она принадлежит множеству D с некоторой своей окрестностью.

5). Точку P_0 из множества D назовем ***граничной*** (рис.2) , если в любой ее окрестности содержатся точки, как принадлежащие множеству D, так и не принадлежащие множеству D.

6). Множество D назовем ***открытым,*** если любая его точка является внутренней (рис.1).

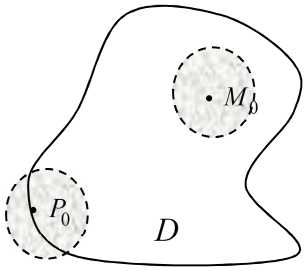

Рис.2

7). Множество D назовем ***замкнутым***, если оно содержит все свои граничные точки (рис.2).

8). Множество D назовем ***ограниченным*** (рис.2), если оно содержится в некоторой окрестности конечной точки. В противном случае множество назовем ***неограниченным*** (например, первая четверть на плоскости).

9). Множество D назовем ***связным,*** если любые его две точки можно соединить линией, лежащей в этом множестве (например, множество на рис.3, состоящее из дуги и окружностей, не является связным; оно имеет четыре компоненты связности).

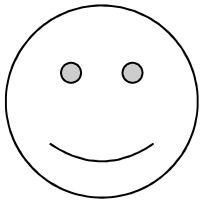
Рис.3

10). Открытое (замкнутое) связное множество назовем открытой (замкнутой) ***областью***.

Определение. Функцией k переменных называют отображение, которое каждой точке $M(x_1, x_2, ..., x_k)$ из множества D пространства R_k ставит в соответствие действительное число u. При этом принята запись $u = f(M) = f(x_1, x_2, ...x_k)$, а множество D называют областью определения функции f.

Приведем простейшие примеры функций нескольких переменных.

1. Объем прямого кругового цилиндра $V = \pi R^2 H$ есть функция двух переменных R и H. Область определения этой функции $\{R > 0,\ H > 0\}$ есть открытое неограниченное множество.

2. Функция $z = x^2 + y^2$ есть функция переменных x и y, определенная на всей плоскости OXY. Графиком этой функции называется множество точек (x, y, z), координаты которых удовлетворяют уравнению $z = x^2 + y^2$, т.е. график функции есть параболоид (рис. 4).

3. Функция $u = \ln\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)$ является функцией трех переменных x, y, z, определенной на множестве $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Геометрическое изображение функции трех переменных с помощью ее графика невозможно, так как для этого потребовалось бы четырехмерное пространство.

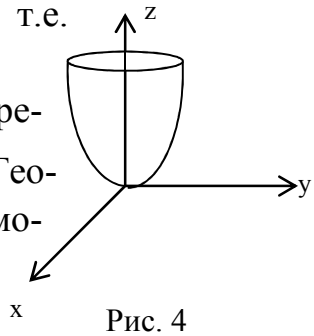

Рис. 4

2. Предел и непрерывность функции

Предел функции нескольких переменных обобщает понятие предела функции одной переменной.

Определение. Конечное число b называется пределом функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_k) = f(M)$ при $M \to M_0$, если для любой последовательности точек M_n, сходящейся к точке M_0 $(M_n \neq M_0)$, соответствующие значения функции $f(M_n)$ сходятся к числу b, т.е.

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = b, \text{ если } f(M_n) \to b \text{ при } \forall M_n \to M_0 \quad (M_n \neq M_0).$$

Можно дать и другое ***эквивалентное определение*** предела:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = b, \text{ если для } \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \text{ такое, что } f(M) \in S_\varepsilon(b) \text{ для } \forall M \in \overset{\circ}{S}\delta(M_0).$$

Для функции двух переменных используют и другую запись:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b.$$

Из определения следует, что предел b не зависит от способа приближения точки M к точке M_0.

Свойства пределов функции одной переменной остаются справедливыми и для функций многих переменных.

Пример 2.1

1). $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{x + y - 1}{x^2 + x y^2 + 3} = \dfrac{0 + 2 - 1}{0 + 0 + 3} = \dfrac{1}{3}$.

В этом примере мы воспользовались тем, что предел элементарной функции в области ее определения равен значению функции в точке.

2). $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim\limits_{\substack{xy\to 0\\ x\to 3}} \frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x = 1\cdot 3 = 3$.

Здесь мы воспользовались первым замечательным пределом.

3). $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\cdot \sin\frac{1}{y} = 0$.

4). $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\,y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x\cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \right) = 0$.

В примерах 3 и 4 мы воспользовались тем, что x есть бесконечно малая функция, функции $\sin\frac{1}{y}$, $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ есть ограниченные функции (по модулю не больше единицы), а произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.

5). $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \left| \begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{array} \right| = \lim\limits_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)}{\rho^2} = \lim\limits_{\rho\to 0} \rho\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right) = 0$.

6). $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\,y}{x^2+y^2}$ не существует, т.к. функция $f(x,y)=\frac{x\,y}{x^2+y^2}$ стремится к разным числам при различных способах приближения точки (x,y) к точке $(0,0)$:

$$\text{при } x=y \text{ имеем } \lim_{x=y\to 0} \frac{x\,y}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{2\,y^2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{при } x=2y \text{ имеем } \lim_{x=2\,y\to 0} \frac{x\,y}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{2\,y^2}{5\,y^2} = \frac{2}{5}.$$

Определение. Функция $f(M)$ называется ***непрерывной*** в точке M_0, если

$$\boxed{\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)\ .}$$

Свойства функции, непрерывной в точке, также переносятся с функции одной переменной на функцию нескольких переменных.

Пример 2.2

1). Функция $f(x,y)=\frac{x\,y^2}{x^2+y^2}$ − элементарна и поэтому непрерывна во всех точках, кроме точки $(0,0)$, где функция не определена.

2). Функция $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x\,y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ непрерывна в точке $(0,0)$, так как (см. пример 1.1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

3). Функция $f(x,y)=\frac{1}{y-x^2}$ − элементарна и поэтому непрерывна во всех точках,

кроме точек линии $y = x^2$, где функция не определена.

Функцию $f(M)$ называют ***непрерывной в области*** D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Аналогично свойствам функции одной переменной, непрерывной на отрезке, формулируются свойства функции нескольких переменных, непрерывных в ограниченной замкнутой области.

Теорема 2.1. Пусть функция $f(M)$ ***непрерывна в ограниченной замкнутой области*** D. Тогда

1) функция $f(M)$ ограничена в области D, т.е. $|f(M)| \le K$ в области D;
2) функция $f(M)$ достигает в области D наибольшего и наименьшего значений;
3) функция $f(M)$ принимает в области D все промежуточные значения между наибольшим и наименьшим значениями;
4) функция $f(M)$ ***равномерно непрерывна*** в области D, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$ для любых точек M', M'' из области D, расстояние между которыми меньше δ.

3. Дифференцирование функции

3.1. Частные производные

Определения

Для простоты записи ограничимся функцией двух переменных $f(x, y)$. Введем ***полное приращение*** функции

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

и ***частные приращения*** функции по x и y:

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \qquad \Delta_y f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Частными производными $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ функции $f(x, y)$ называются пределы

$$\boxed{f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x, y)}{\Delta x}}, \qquad \boxed{f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x, y)}{\Delta y}}.$$

Приняты и другие обозначения: $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично.

Способ вычисления

Так как в определении, например, производной f'_x при вычислении $\Delta_x f$ изменяется только x при неизменных других переменных, то справедливо следующее ***правило:***

При дифференцировании функции по одному из ее аргументов, остальные аргументы считаются постоянными.

Пример 3.1

1) $u = x^3 \sin y \;\Rightarrow\; u'_x = 3x^2 \sin y$, $\quad u'_y = x^3 \cos y$,

2) $u = e^{2x+3y} + \ln z \quad \Rightarrow \quad u'_x = e^{2x+3y} \cdot 2, \quad u'_y = e^{2x+3y} \cdot 3, \quad u'_z = \frac{1}{z}$,

3) $z = x^y \quad \Rightarrow \quad z'_x = y \cdot x^{y-1}, \quad z'_y = x^y \ln x$.

Связь с непрерывностью

Отметим два момента.

1). Из непрерывности функции ***не следует*** существование частных производных (***как и для функции одной переменной***). Например, функция $f(x,y) = |x| + y$ непрерывна в точке $(0,0)$, но производная $f'_x(0,0)$ не существует.

2). Из существования частных производных функции нескольких переменных ***не следует*** непрерывность функции (***в отличие от функции одной переменной***). Например, функция $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ имеет частные производные в точке $(0,0)$, т.к. $f'_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0-0}{\Delta x} = 0$ и аналогично $f'_y(0,0) = 0$; но функция $f(x,y)$ разрывна в точке $(0,0)$, так как $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не существует, как показано в примере 2.1.

Производные высших порядков

Частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ являются функциями от x, y и от них можно снова находить частные производные по x и y. Они называются частными производными второго порядка:

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x, \quad f''_{xy} = \left(f'_x\right)'_y, \quad f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x, \quad f'_{yy} = \left(f'_y\right)'_y .$$

Другие обозначения этих же производных: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Аналогично определяются и частные производные более высоких порядков, например, $f'''_{xyx} = (f'_{xy})'_x$.

Производные, в которых идет дифференцирование по различным переменным, называются смешанными, например, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{xyx}. Не доказывая, отметим, что ***смешанная производная***, в случае ее непрерывности, ***не зависит от порядка дифференцирования***, например, $f''_{yx} = f''_{xy}$, $f'''_{xyx} = f'''_{xxy} = f'''_{yxx}$.

Замечание. Требование непрерывности смешанных производных существенно. Например, можно показать, что для функции $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} разрывны в точке $(0,0)$ и различны: $f''_{xy}(0,0) = -1$, $f''_{yx}(0,0) = 1$.

Пример 3.2

1). Показать, что $f''_{xy} = f''_{yx}$ для функции $f(x,y) = e^{xy^2}$.

Имеем: $f'_x = y^2 e^{xy^2}$, $f''_{xy} = \left(y^2 e^{xy^2}\right)'_y = 2ye^{xy^2} + e^{xy^2} \cdot y^2 \cdot 2xy$,

$$f'_y = e^{xy^2} \cdot 2xy, \quad f''_{yx} = \left(e^{xy^2} \cdot 2xy\right)'_x = e^{xy^2} \cdot 2xy^3 + e^{xy^2} \cdot 2y.$$

2). Найти f'''_{xzx}, f'''_{xzz} для функции $f(x,y,z) = xy^2z^3$.

Имеем $f'_x = y^2 z^3$, $f''_{xz} = (f'_x)'_z = 3y^2z^2$, $f'''_{xzx} = 0$, $f'''_{xzz} = 6y^2z$.

3.2. Дифференцируемые функции

Напомним, что функция одной переменной $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, если ее приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $A = const$, $\alpha = \alpha(\Delta x)$ есть функция бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Аналогично, функция двух переменных $f(x,y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке (x_0, y_0), если ее полное приращение в этой точке представимо в виде

$$\boxed{\Delta f(x_0,y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y}, \qquad (3.1)$$

где $A = const$, $B = const$, $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ есть функции бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Для более компактной записи формулы (3.1) введем величину $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ (рис.5). Тогда

$$\Delta x = \rho \cdot \cos\varphi, \ \Delta y = \rho \cdot \sin\varphi,$$

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y = \rho\left(\alpha \cdot \cos\varphi + \beta \cdot \sin\varphi\right) = \rho \cdot \gamma,$$

где $\gamma = \alpha \cdot \cos\varphi + \beta \cdot \sin\varphi$. При этом,

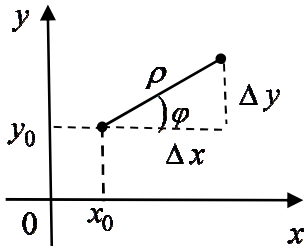

Рис.5

если $\rho \to 0$, то $\begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \to 0, \\ \beta \to 0, \end{cases} \Rightarrow \gamma \to 0.$

Поэтому равенство (3.1) можно переписать в следующем виде:

$$\boxed{\Delta f(x_0,y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \rho \cdot \gamma}, \qquad (3.2)$$

где $A = const$, $B = const$, $\gamma = \gamma(\rho)$ есть функция бесконечно малая при $\rho \to 0$.

Отметим, что $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\rho \cdot \gamma}{\rho} = 0$, то есть $\rho \cdot \gamma$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем ρ: $\rho \cdot \gamma = o(\rho)$; поэтому равенство (3.2) можно переписать в виде

$$\boxed{\Delta f(x_0,y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho)}. \qquad (3.3)$$

Аналогично для дифференцируемой функции трех переменных

$$\boxed{\Delta f(x_0,y_0,z_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + o(\rho)},$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Напомним, что для функции одной переменной необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции является существование ее производной. Для функции нескольких переменных необходимое условие дифференцируемости и достаточное условие не совпадают. Рассмотрим эти условия для функции двух переменных (для простоты записи).

Теорема 3.1 (необходимые условия дифференцируемости). Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ является ***дифференцируемой*** в точке $P_0(x_0,y_0)$. Тогда

1. функция $f(x,y)$ ***непрерывна*** в точке $P_0(x_0,y_0)$,
2. функция $f(x,y)$ ***имеет частные производные*** $f'_x(P_0)$, $f'_y(P_0)$,
3. $A=f'_x(P_0)$, $B=f'_y(P_0)$ в формулах (3.1), (3.2), (3.3).

Доказательство. Для дифференцируемой функции справедливо равенство (3.1):

$$\Delta f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y.$$

Из этого равенства следует:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f(P_0)=0 \text{ или } \lim_{P\to P_0}\left[f(P)-f(P_0)\right]=0;$$

тогда $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$ и функция $f(P)$ непрерывна в точке P_0 .

Если $\Delta y=0$, то равенство $\Delta f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$ примет вид

$$\Delta_x f(P_0)=A\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x \ .$$

Поэтому $\dfrac{\Delta_x f(P_0)}{\Delta x}=A+\alpha$ $(\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0)$ и $f'_x(P_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x f(P_0)}{\Delta x}=A$.

Аналогично, при $\Delta x=0$ получим $f'_y(P_0)=B$.

Замечание. Необходимые условия дифференцируемости не являются достаточными, т.е. из непрерывности функции и существования ее частных производных не следует ее дифференцируемость. Это подтверждает следующий пример.

Пример 3.3. Показать, что функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ непрерывна и имеет частные производные в точке $(0,0)$, но не дифференцируема в этой точке.

Решение. Данная функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$, так как (пример 2.1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$. Кроме того, данная функция $f(x,y)$ имеет частные производные в точке $(0,0)$, т.к.

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{0}{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=0;$$

аналогично $f'_y(0,0)=0$. Предположим, что функция дифференцируема в точке $(0,0)$, т.е. ее приращение $\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{\Delta x\,(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ представимо в виде

$$\Delta f(0,0)=f'_x(0,0)\cdot\Delta x+f'_y(0,0)\cdot\Delta y+\rho\cdot\gamma=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\rho\cdot\gamma=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\gamma,\quad \gamma\to 0 \text{ при } \rho\to 0,$$

или $\Delta f(0,0)=\dfrac{\Delta x\,(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\gamma$. При $\Delta y=\Delta x>0$ это равенство примет вид: $\dfrac{(\Delta x)^3}{2\,(\Delta x)^2}=\sqrt{2(\Delta x)^2}\cdot\gamma$. Тогда $\gamma=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, то есть γ не является бесконечно малой, а функция $f(x,y)$ не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Итак, из непрерывности функции и существования ее частных производных не следует дифференцируемость функции; нужны дополнительные условия на функцию, например, непрерывность ее частных производных.

Теорема 3.2 (достаточное условие дифференцируемости).
Пусть функция $f(x,y)$ имеет ***непрерывные*** частные производные в точке $P_0(x_0,y_0)$. Тогда функция $f(x,y)$ является ***дифференцируемой*** в этой точке.

Доказательство этой теоремы опустим.

Назовем функцию ***n раз дифференцируемой*** в точке, если функция в этой точке имеет ***непрерывные*** частные производные n – го порядка.

3.3. Дифференциалы

Дифференциал первого порядка

Пусть функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x,y). Тогда из равенства (3.1) и теоремы 3.1 следует, что приращение функции представимо в виде

$$\boxed{\Delta f(x,y)=f'_x(x,y)\cdot\Delta x+f'_y(x,y)\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y},\qquad (3.4)$$

где $\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)$, $\beta=\beta(\Delta x,\Delta y)$ есть функции бесконечно малые при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

В равенстве (3.4) выражение $f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$ линейно относительно $\Delta x,\Delta y$ и является главной частью приращения функции. Это выражение называют ***дифференциалом функции двух переменных*** $f(x,y)$ и обозначают $d\,f(x,y)$. Таким образом,

$$\boxed{d\,f(x,y)=f'_x(x,y)\cdot\Delta x+f'_y(x,y)\cdot\Delta y}\,.\qquad (3.5)$$

Для функций $\varphi(x,y)=x$, $\psi(x,y)=y$ из равенства (3.5) следует:

$$d\,x=d\,\varphi(x,y)=\varphi'_x\cdot\Delta x+\varphi'_y\cdot\Delta y=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y\ \Rightarrow\ d\,x=\Delta x,$$
$$d\,y=d\,\psi(x,y)=\psi'_x\cdot\Delta x+\psi'_y\cdot\Delta y=0\cdot\Delta x+1\cdot\Delta y\ \Rightarrow\ d\,y=\Delta y.$$

Тогда равенство (3.5) примет вид

$$\boxed{d\,f(x,y)=f'_x(x,y)\cdot d\,x+f'_y(x,y)\cdot d\,y}\ . \qquad (3.6)$$

Аналогично определяется ***дифференциал функции трех переменных*** $f(x,y,z)$:

$$\boxed{d\,f(x,y,z)=f'_x(x,y,z)\cdot d\,x+f'_y(x,y,z)\cdot d\,y+f'_z(x,y,z)\cdot d\,z}\ .$$

Применение дифференциала первого порядка

Запишем равенство (3.3) $\Delta f(x_0,y_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+o(\rho)$ в виде

$$\Delta f(x_0,y_0)=d\,f(x_0,y_0)+o(\rho).$$

Так как $\Delta f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)$, то

$$\boxed{f(x,y)=f(x_0,y_0)+d\,f(x_0,y_0)+o(\rho)} \text{ или}$$

$$\boxed{f(M)=f(M_0)+d\,f(M_0)+o(\rho)}\ .$$

Если пренебречь бесконечно малой $o(\rho)$, заменить $d\,f(x_0,y_0)$ по формуле (3.5) и учесть, что $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, то получим приближенное равенство:

$$\boxed{f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)}\ . \qquad (3.7)$$

Это равенство позволяет ***линеаризовать*** функцию, т.е. заменить функцию $f(x,y)$ в окрестности точки (x_0,y_0) ***линейной*** функцией.

Равенство (3.7) используется также для приближенного вычисления значения функции $f(x,y)$, если известно значение функции $f(x_0,y_0)$.

Пример 3.4. Линеаризовать функцию $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)$ в окрестности точки $(1,1)$.

Решение. Найдем значения функции и ее частных производных в точке $(1,1)$:

$$f(1,1)=\ln\left(\sqrt[3]{1}+\sqrt[4]{1}-1\right)=\ln 1=0,$$

$$f'_x=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\cdot\frac{1}{3}x^{-2/3},\qquad f'_x(1,1)=\frac{1}{3},$$

$$f'_y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\cdot\frac{1}{4}y^{-3/4},\qquad f'_y(1,1)=\frac{1}{4}.$$

Теперь воспользуемся приближенным равенством (3.7)

$$f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)\approx\frac{1}{3}(x-1)+\frac{1}{4}(y-1).$$

Итак, мы заменили функцию $f(x,y)$ в окрестности точки (x_0,y_0) ***линейной*** функцией.

Дифференциалы высших порядков

Из равенства (3.5) следует, что дифференциал функции $df(x,y)=f'_x(x,y)\,\Delta x+f'_y(x,y)\,\Delta y$ при фиксированных Δx и Δy есть снова функция от переменных x и y. Ее дифференциал называют ***вторым дифференциалом*** функции $f(x,y)$ и обозначают $d^2f(x,y)$.

Таким образом,

$$\boxed{d^2 f(x,y) = d\left(d\, f(x,y)\right)}$$

при фиксированных Δx, Δy.

Выведем формулу для вычисления $d^2 f(x,y)$:

$$d^2 f(x,y) = d\left(d\, f(x,y)\right) = \left(d\, f\right)'_x \cdot \Delta x + \left(d\, f\right)'_y \cdot \Delta y =$$

$$= \left(f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y\right)'_x \cdot \Delta x + \left(f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y\right)'_y \cdot \Delta y =$$

$$= \left(f''_{xx} \cdot (\Delta x)^2 + f''_{yx} \cdot \Delta y \Delta x\right) + \left(f''_{xy} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{yy} \cdot (\Delta y)^2\right).$$

Таким образом,

$$\boxed{d^2 f(x,y) = f''_{xx} (\Delta x)^2 + 2 f''_{xy}\ \Delta x \Delta y + f''_{yy} (\Delta y)^2}\ . \qquad (3.8)$$

Запишем эту формулу в другом виде

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\ \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2\ .$$

Так как это выражение напоминает формулу для квадрата суммы, удобно символически это выражение записать в виде

$$\boxed{d^2 f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y\right)^2 f(x,y)}.$$

Аналогично определяются и вычисляются дифференциалы порядков выше второго:

$d^3 f(x,y) = d\left(d^2 f(x,y)\right), \ldots,\ d^n f(x,y) = d\left(d^{n-1} f(x,y)\right)$ при фиксированных Δx, Δy;

$$\boxed{d^n f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y\right)^n f(x,y)}\ . \qquad (3.9)$$

В частности,

$$d^3 f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y\right)^3 f(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \left(\Delta x\right)^2 \Delta y + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Delta x \left(\Delta y\right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} (\Delta y)^3.$$

Для функции трех переменных

$$\boxed{d^n f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \Delta z\right)^n f(x,y,z)}.$$

Применение дифференциалов высших порядков будет рассмотрено далее при исследовании функции нескольких переменных на экстремум.

3.4. Сложные функции и их дифференцирование

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в области D, функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ определены на множестве S со значениями в области D. Если подставить значения $x = x(t)$, $y = y(t)$ в функцию $z = f(x,y)$, то получим ***сложную функцию*** $z = f\left(x(t), y(t)\right)$ одной переменной t, определенную на множестве S. Переменные x, y называют промежуточными переменными, переменную t называют независимой переменной.

Теорема 3.3. Пусть $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ − дифференцируемые функции. Тогда производная сложной функции $z = f\left(x(t), y(t)\right)$ равна

$$\boxed{z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t\,.} \qquad (3.10)$$

Доказательство. Придадим t приращение Δt. Тогда переменные x, y получат приращение $\Delta x, \Delta y$, и переменная z получит приращение Δz. Так как функция $z = f(x, y)$ − дифференцируема, то

$$\Delta z = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y\,,$$

$\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ есть функции бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Разделим равенство на Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = z'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + z'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}\ . \qquad (3.11)$$

Так как функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ − дифференцируемы, то

а) эти функции имеют производные $x'_t = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, $y'_t = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$,

б) эти функции непрерывны и, значит, $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ при $\Delta t \to 0$, из чего следует, что и $\alpha \to 0$, и $\beta \to 0$.

С учетом этого при переходе в равенстве (3.11) к пределу при $\Delta t \to 0$, получим:

$$z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t + 0 \cdot x'_t + 0 \cdot y'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t\,.$$

Полученная формула (3.10) обобщается на сложные функции с любым числом промежуточных и независимых переменных. Справедливо общее правило:

> Для отыскания производной сложной функции по независимому аргументу надо ее производную по каждому промежуточному аргументу умножить на производную этого промежуточного аргумента по независимому аргументу и сложить эти произведения.

Поясним это правило в следующих случаях:

1) $z = f(u, v)$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Тогда $z = f(u(x, y), v(x, y))$ есть сложная функция независимых переменных x, y и

$$\boxed{\begin{aligned} z'_x &= z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x \\ z'_y &= z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y \end{aligned}}\,.$$

2) $z = f(x, y, t)$ и $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Тогда $z = f(x(t), y(t), t)$ есть сложная функция ***одной*** независимой переменной t. Поэтому ее производную обозначим $\dfrac{dz}{dt}$ (полная производная), а не $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ (частная производная). Промежуточные переменные – x, y, t. Итак, согласно общему правилу:

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t}\,.}$$

Пример 3.5. Найти частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и полную производную $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x^2 + y^3 + \operatorname{arctg} t$, $x = \sin t$, $y = \cos t$.

Решение. Так как $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2$, $\frac{\partial z}{\partial t}=(\operatorname{arctg} t)'=\frac{1}{1+t^2}$, то

$$\frac{dz}{dt}=2x\cdot\cos t+3y^2\cdot(-\sin t)+\frac{1}{1+t^2}=2\sin t\cdot\cos t-3\cos^2 t\cdot\sin t+\frac{1}{1+t^2}.$$

Пример 3.6. Найти z''_{xx} для функции $z=f\left(x^2y,\ \frac{x}{y}\right)$.

Решение. Представим функцию в виде $z=f(u,v)$, где $u=x^2y$, $v=\frac{x}{y}$. Тогда

$$z'_x=f'_u\cdot u'_x+f'_v\cdot v'_x=f'_u\cdot 2xy+f'_v\cdot\frac{1}{y},$$

$$z''_{xx}=\left(f'_u\cdot 2xy+f'_v\cdot\frac{1}{y}\right)'_x=f'_u\cdot(2y)+\left(f'_u\right)'_x\cdot 2xy+\left(f'_v\right)'_x\cdot\frac{1}{y}=$$

$$=2y\cdot f'_u+\left(f''_{uu}\cdot u'_x+f''_{uv}\cdot v'_x\right)\cdot 2xy+\left(f''_{vu}\cdot u'_x+f''_{vv}\cdot v'_x\right)\cdot\frac{1}{y}=$$

$$=2y\cdot f'_u+\left(f''_{uu}\cdot 2xy+f''_{uv}\cdot\frac{1}{y}\right)\cdot 2xy+\left(f''_{vu}\cdot 2xy+f''_{vv}\cdot\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}.$$

Учитывая, что $f''_{uv}=f''_{vu}$, получим $z''_{xx}=2y\cdot f'_u+4x^2y^2\cdot f''_{uu}+4x\cdot f''_{uv}+f''_{vv}\cdot\frac{1}{y^2}$.

3.5. Дифференциалы сложной функции

1). Сначала рассмотрим случай функции $z=f(x,y)$ независимых переменных x,y. Для такой функции

$$dz=f'_x\cdot dx+f'_y\cdot dy,\quad (dx,\ dy-const); \tag{3.12}$$

$$d^2z=d(dz)=d\left(f'_x\cdot dx+f'_y\cdot dy\right)=d\left(f'_x\right)\cdot dx+d\left(f'_y\right)\cdot dy. \tag{3.13}$$

2). Теперь рассмотрим случай функции $z=f(x,y)$, где x,y – зависимые переменные $x=x(t)$, $y=y(t)$. Получим сложную функцию $z=f(x(t),\ y(t))=F(t)$, для которой

$$dz=F'_t\,dt=\left(f'_x\cdot x'_t+f'_y\cdot y'_t\right)dt=f'_x\cdot\left(x'_t\,dt\right)+f'_y\cdot\left(y'_t\,dt\right)=f'_x\,dx+f'_y\,dy.$$

Итак, для сложной функции $z=f(x,y)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$

$$dz=f'_x\cdot dx+f'_y\cdot dy, \tag{3.14}$$

но в отличие от формулы (3.12) здесь $dx=x'_t\,dt$, $dy=y'_t\,dt$ есть функции. Поэтому

$$d^2z=d(dz)=d\left(f'_x\cdot dx+f'_y\cdot dy\right)=\left[d\left(f'_x\right)\cdot dx+d\left(f'_y\right)\cdot dy\right]+\left[f'_x\cdot d^2x+f'_y\cdot d^2y\right]. \tag{3.15}$$

Отметим, что, формулы (3.13) и (3.15) различны; они совпадут, если $d^2x=x''(t)\cdot(dt)^2=0$, $d^2y=y''(t)\cdot(dt)^2=0$, т.е., если $x=at+b$, $y=ct+d$ – линейные функции.

Итак, сравнивая формулы (3.12) и (3.14), (3.13) и (3.15), приходим к следующему выводу:

Форма дифференциала первого порядка функции $f(x,y)$ ***инвариантна***, т.е. одна и та же, и когда аргументы функции x,y независимы, и когда аргументы x,y сами являются функциями.

Форма дифференциала функции $f(x,y)$ ***порядка выше первого инвариантна, если*** аргументы x,y есть линейные функции.

3.6. Неявные функции и их дифференцирование

Неявные функции, определяемые уравнением $F(x,y)=0$

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 3.7. Уравнение $x^3+y^3-1=0$ для любого x определяет функцию $y=\sqrt[3]{1-x^3}$, заданную неявно уравнением $x^3+y^3-1=0$.

Пример 3.8. Уравнение $x^2+y^2+1=0$ не имеет действительного решения $y(x)$ ни для какого действительного x, т.е. это уравнение не определяет функцию.

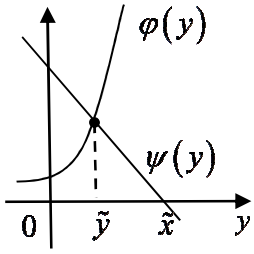

Рис. 6

Пример 3.9. Из уравнения $e^{xy}-x+y=0$ мы не можем выразить y через x, но можем графически установить, имеет ли это уравнение решение. Для этого зафиксируем $x=\tilde{x}$, запишем исходное уравнение в виде $e^{\tilde{x}y}=\tilde{x}-y$ и построим графики функций $\varphi(y)=e^{\tilde{x}y}$, $\psi(y)=\tilde{x}-y$ для $\tilde{x}>0$ (рис. 6), для $\tilde{x}<0$ (рис.7).

Для $\tilde{x}>0$ уравнение имеет единственное решение $\tilde{y}$ (рис. 6);
для $\tilde{x}<0$ уравнение не имеет решения (рис. 7);
для $\tilde{x}=0$ уравнение примет вид $e^0+y=0$ и имеет решение $y=-1$.

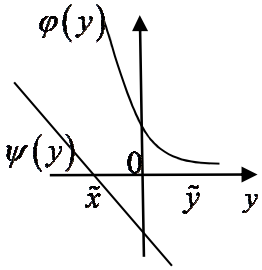

Рис. 7

Таким образом, уравнение $e^{xy}-x+y=0$ имеет единственное решение при каждом $x\geq 0$, т.е. уравнение определяет неявную функцию $y=y(x)$ при $x\geq 0$, но ее нельзя выразить через элементарные функции.

Определение. Пусть для $x\in X$ уравнение $F(x,y)=0$ имеет решение $y=\varphi(x)$. Тогда функцию $y=\varphi(x)$, $x\in X$, называют ***неявной функцией***, определяемой уравнением $F(x,y)=0$.

Теорема 3.4 (о существовании и единственности неявной функции).
Пусть 1) функция $F(x,y)$ и ее частные производные непрерывны в окрестности точки (x_0,y_0), 2) $F(x_0,y_0)=0$, 3) $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$.
Тогда уравнение $F(x,y)=0$ в окрестности точки (x_0,y_0) имеет единственное решение $y=\varphi(x)$ такое, что $\varphi(x_0)=y_0$. Неявная функция $y=\varphi(x)$, определяемая уравнением $F(x,y)=0$, непрерывна и имеет непрерывную производную в окрестности точки x_0.

Замечание. Если в условии 3) теоремы $F'_y(x_0,y_0)=0$, но $F'_x(x_0,y_0)\neq 0$, тогда уравнение $F(x,y)=0$ определяет неявную функцию $x=x(y)$.

Рассмотрим вопрос о дифференцировании неявной функции, определяемой уравнением $F(x,y)=0$. Пусть выполняются условия теоремы 3.4. Тогда уравне-

ние $F(x,y)=0$ определяет неявную функцию $y=y(x)$. Эта функция при подстановке ее в уравнение $F(x,y)=0$ обращает уравнение в тождество: $F(x,y(x))\equiv 0$. Дифференцируя это тождество по x, получим

$$F'_x\cdot x'_x+F'_y\cdot y'_x=0.$$

Так как $F'_y\neq 0$ (по теореме 3.4), то $y'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$. Сформулируем правило, которым удобно пользоваться для отыскания производной.

Если неявная функция $y=y(x)$ задана уравнением $F(x,y)=0$, то для нахождения производной $y'(x)$ необязательно разрешать уравнение $F(x,y)=0$ относительно y; следует продифференцировать это уравнение по x, учитывая, что y есть функция от x.

Пример 3.10. Линеаризовать в окрестности точки $(0,-1)$ неявную функцию $y(x)$, заданную уравнением $e^{xy}-x+y=0$.

Решение. Продифференцируем равенство $e^{xy}-x+y=0$ по x, учитывая, что $y=y(x)$:

$$e^{xy}\cdot(xy)'_x-1+y'_x=0,\ \text{или}\ e^{xy}\cdot(y+xy'_x)-1+y'_x=0,\ \text{или}\ y'_x\left(1+xe^{xy}\right)=1-ye^{xy}.$$

Отсюда получим $y'_x=\dfrac{1-ye^{xy}}{1+xe^{xy}}$, $y'_x(0,-1)=2$. Тогда

$$y(x)\approx y(x_0)+y'(x_0)\cdot(x-x_0)\ \text{или}\ y(x)\approx -1+2x.$$

Неявные функции, определяемые уравнением $F(x,y,z)=0$

Теперь рассмотрим функцию, неявно заданную уравнением $F(x,y,z)=0$. Из этого уравнения, если возможно, выразим одну из переменных, например z, через две другие переменные x и y, т.е. найдем решение $z=z(x,y)$ исходного уравнения $F(x,y,z)=0$. Это решение $z=z(x,y)$ называется функцией, неявно заданной уравнением $F(x,y,z)=0$. Однако, как и в примере 3.9, уравнение $F(x,y,z)=0$ теоретически может определять неявную функцию $z=z(x,y)$, но мы ее не всегда можем выразить через элементарные функции.

Теорема 3.5 (о существовании и единственности неявной функции). Пусть 1) функция $F(x,y,z)$ и ее частные производные непрерывны в окрестности точки (x_0,y_0,z_0), 2) $F(x_0,y_0,z_0)=0$, 3) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Тогда уравнение $F(x,y,z)=0$ в окрестности точки (x_0,y_0,z_0) имеет единственное решение $z=\varphi(x,y)$ такое, что $\varphi(x_0,y_0)=z_0$. Неявная функция $z=\varphi(x,y)$, определяемая уравнением $F(x,y,z)=0$, непрерывна и имеет непрерывные частные производные в окрестности точки (x_0,y_0).

Пример 3.11. Сколько неявных функций и каких определяет уравнение $x^2+y^2+z^2-1=0$ в окрестности точки $P(0,0,-1)$?

Решение. В окрестности точки $P(0,0,-1)$ уравнение $x^2+y^2+z^2-1=0$ определяет одну функцию $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, определенную в круге $x^2+y^2\le 1$, или две функции $x=\sqrt{1-z^2-y^2}$, $x=-\sqrt{1-z^2-y^2}$, определенные в круге $z^2+y^2\le 1$, или две функции $y=\sqrt{1-x^2-z^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$, определенные в круге $x^2+z^2\le 1$.
Это не противоречит теореме 3.5, так как $F'_z(P)\ne 0$, а $F'_x(P)=0$, $F'_y(P)=0$.

Правило, которым удобно пользоваться для отыскания производной неявной функции, определяемой уравнением $F(x,y,z)=0$, аналогично правилу отыскания производной неявной функции, определяемой уравнением $F(x,y)=0$.

> Для отыскания частной производной z'_x функции $z=z(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, следует продифференцировать это уравнение по x, (а для отыскания z'_y продифференцировать уравнение по y), учитывая, что x,y – независимые переменные, а z – функция от x,y.

Пример 3.12. Линеаризовать в окрестности точки $(1;1)$ неявную функцию $z(x,y)$, определяемую уравнением $z^3+yz-xy^2-x^3=0$, если $z(1;1)=1$.

Решение. Продифференцируем равенство $z^3+yz-xy^2-x^3=0$ сначала по x, затем по y, учитывая, что x,y – независимые переменные, а z – функция от x,y:

$$3z^2\cdot z'_x+y\cdot z'_x-y^2-3x^2=0,\qquad 3z^2\cdot z'_y+z+y\cdot z'_y-2xy=0.$$

Отсюда выразим z'_x и z'_y:

$$z'_x=\frac{y^2+3x^2}{y+3z^2},\quad z'_y=\frac{2xy-z}{y+3z^2}.$$

Можно применить и другой способ для отыскания z'_x и z'_y: в равенстве $z^3+yz-xy^2-x^3=0$ вычислить не производные, а дифференциалы:

$$3z^2dz+(y\,dz+z\,dy)-\left(y^2dx+2xy\,dy\right)-3x^2dx=0.$$

Отсюда $\left(3z^2+y\right)dz=\left(3x^2+y^2\right)dx+(2xy-z)\,dy$, $\quad dz=\dfrac{3x^2+y^2}{3z^2+y}\,dx+\dfrac{2xy-z}{3z^2+y}\,dy$.

Сравнивая последнее равенство с тем, что $dz=z'_x\,dx+z'_y\,dy$, снова получим

$$z'_x=\frac{y^2+3x^2}{y+3z^2},\quad z'_y=\frac{2xy-z}{y+3z^2}.$$

При $x=y=z=1$ имеем

$$z'_x=1,\quad z'_y=1/4.$$

Воспользуемся формулой (3.7): $f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$.
Тогда в окрестности точки $(1;1)$ неявная функция $z(x,y)$, определяемая уравнением $z^3+yz-xy^2-x^3=0$, приближенно равна $z(x,y)\approx 1+(x-1)+\frac{1}{4}(y-1)$.

Неявные функции, определяемые системой уравнений

Пусть задана система k уравнений с $n+k$ неизвестными

$$\begin{cases} F_1\left(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_k\right) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_k\left(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_k\right) = 0. \end{cases} \qquad (3.16)$$

Из k уравнений выразим k неизвестных $y_1, y_2, ..., y_k$ через остальные неизвестные $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} y_1 = y_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_k = y_k\left(x_1, x_2, ..., x_n\right). \end{cases}$$

Полученные k функций называют неявными функциями, определяемыми системой (3.16). Для формулировки условий существования этих функций введем следующий определитель, называемый определителем Якоби или ***якобианом:***

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_k}{\partial y_k} \end{vmatrix} = \frac{D\left(F_1, ..., F_k\right)}{D\left(y_1, ..., y_k\right)}.$$

Теорема 3.6 (о существовании и единственности неявных функций). Пусть:
1) функции $F_1\left(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_k\right), ..., F_k\left(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_k\right)$ и их частные производные непрерывны в окрестности точки $M_0\left(x_1^0, ..., x_n^0, y_1^0, ..., y_k^0\right)$,
2) координаты точки M_0 удовлетворяют системе (3.16),
3) якобиан $\dfrac{D\left(F_1, ..., F_k\right)}{D\left(y_1, ..., y_k\right)}$ отличен от нуля в точке M_0.
Тогда система уравнений (3.16) в окрестности точки M_0 имеет единственное решение $y_1 = y_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), ..., y_k = y_k\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, т.е. определяет неявные функции, причем $y_1\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) = y_1^0, ..., y_k\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) = y_k^0$. Эти неявные функции непрерывны и имеют непрерывные частные производные в окрестности точки $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$.

Рассмотрим два частных случая.

1). Система ***двух*** уравнений $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ определяет ***две*** функции;

если $\dfrac{D(F, G)}{D(y, z)} \neq 0$, то переменные y, z будут функциями от x, т.е. $y = y(x)$, $z = z(x)$;

если $\dfrac{D(F, G)}{D(x, z)} \neq 0$, то переменные x, z будут функциями от y, т.е. $x = x(y)$, $z = z(y)$;

если $\dfrac{D(F, G)}{D(x, y)} \neq 0$, то переменные x, y будут функциями от z, т.е. $x = x(z)$, $y = y(z)$.

2). Система ***трех*** уравнений $\begin{cases} F(x,y,z,u,v)=0, \\ G(x,y,z,u,v)=0, \\ R(x,y,z,u,v)=0 \end{cases}$ при условии $\dfrac{D(F,G,R)}{D(z,u,v)} \neq 0$ определяет ***три*** функции z, u, v от x, y, т.е. $z=z(x,y)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$.

Рассмотрим вопрос о дифференцировании неявных функций $y_1=y_1(x_1,x_2,...,x_n)$, ..., $y_k=y_k(x_1,x_2,...,x_n)$, определяемых системой уравнений (3.16).

Правило, которым удобно пользоваться при дифференцировании неявных функций, определяемых системой уравнений, аналогично правилу отыскания производной неявной функции, определяемой одним уравнением.

Для отыскания частных производных по переменной x_i от функций $y_1=y_1(x_1,x_2,...,x_n)$, ..., $y_k=y_k(x_1,x_2,...,x_n)$, заданных системой уравнений (3.16), следует продифференцировать каждое уравнение системы по x_i, учитывая, что $x_1,x_2,...,x_n$ – независимые переменные, а $y_1,y_2,...,y_k$ – функции от $x_1,x_2,...,x_n$.

Часто удобно вычислять не производные, а дифференциалы.

Пример 3.13. При каких условиях система уравнений $\begin{cases} x=u^2+v^2 \\ y=u^3+v^3 \end{cases}$ определяет u, v как функции от x, y? Найти производные первого порядка от этих функций.

Решение. Запишем систему в виде $\begin{cases} u^2+v^2-x=0 \\ u^3+v^3-y=0 \end{cases}$, введем функции $F=u^2+v^2-x$, $G=u^3+v^3-y$ и вычислим якобиан

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 3u^2 & 3v^2 \end{vmatrix}=6uv^2-6u^2v=6uv(v-u).$$

Если $u\neq 0$, $v\neq 0$, $u\neq v$, то этот якобиан отличен от нуля и заданная система уравнений $\begin{cases} x=u^2+v^2 \\ y=u^3+v^3 \end{cases}$ определяет u, v как функции от x, y. Для отыскания производных этих функций вычислим дифференциалы:

$$\begin{cases} dx=2u\,du+2v\,dv, \\ dy=3u^2du+3v^2\,dv. \end{cases}$$

Решим систему относительно du и dv. Для этого сначала умножим 1-е уравнение на $3v$, 2-е уравнение на -2 и сложим, потом умножим 1-е уравнение на $3u$, 2-е уравнение на -2 и сложим:

$$\begin{cases} 3v\,dx-2\,dy=(6uv-6u^2)du, \\ 3u\,dx-2\,dy=(6uv-6v^2)dv \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} du=\dfrac{v}{2u(v-u)}dx-\dfrac{1}{3u(v-u)}dy, \\ dv=\dfrac{u}{2v(u-v)}dx-\dfrac{1}{3v(u-v)}dy. \end{cases}$$

Отсюда $u'_x=\dfrac{v}{2u(v-u)}$, $u'_y=-\dfrac{1}{3u(v-u)}$; $v'_x=\dfrac{u}{2v(u-v)}$, $v'_y=-\dfrac{1}{3v(u-v)}$.

3.7. Формула Тейлора

Напомним формулу Тейлора для функции одной переменной:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right).$$

Учитывая, что $x-x_0=\Delta x$, $f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n=f^{(n)}(x_0)\cdot(\Delta x)^n=d^n f(x_0)$, $o\left((x-x_0)^n\right)=o\left(f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\right)=o\left(d^n f(x_0)\right)$, запишем формулу Тейлора в виде

$$f(x)=f(x_0)+\frac{d\,f(x_0)}{1!}+\ldots+\frac{d^n f(x_0)}{n!}+o\left(d^n f(x_0)\right). \qquad (3.17)$$

Аналогичная формула справедлива и для функции нескольких переменных. Об этом следующая теорема.

Теорема 3.7. Пусть функция $f(M)$ нескольких переменных n раз дифференцируема в окрестности точки M_0. Тогда имеет место следующая ***формула Тейлора***:

$$f(M)=f(M_0)+\frac{d\,f(M_0)}{1!}+\ldots+\frac{d^n f(M_0)}{n!}+o\left(d^n f(M_0)\right). \qquad (3.18)$$

Доказательство для простоты проведем для функции двух переменных. Рассмотрим отрезок, соединяющий точки $M_0(x_0,y_0)$, $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ (рис. 8).

Запишем параметрические уравнения этого отрезка:

$$x=x_0+t\cdot\Delta x,\quad y=y_0+t\cdot\Delta y. \qquad (3.19)$$

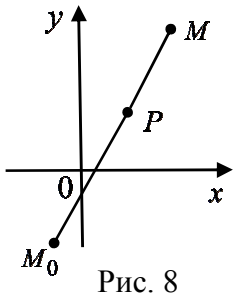

Рис. 8

Для точки $P(x,y)$, принадлежащей этому отрезку, функция $f(P)=f(x,y)$ примет вид $f(P)=f\left(x_0+t\cdot\Delta x,\ y_0+t\cdot\Delta y\right)$ и станет функцией ***одной переменной*** t, которую обозначим $F(t)$. Запишем для функции $F(t)$ формулу Тейлора в виде (3.17)

$$F(t)=F(t_0)+\frac{d\,F(t_0)}{1!}+\ldots+\frac{d^n F(t_0)}{n!}+o\left(d^n F(t_0)\right).$$

При $t=1$, $t_0=0$ эта формула примет вид

$$F(1)=F(0)+\frac{d\,F(0)}{1!}+\ldots+\frac{d^n F(0)}{n!}+o\left(d^n F(0)\right). \qquad (3.20)$$

Из (3.19) следует, что значению параметра $t=0$ соответствует точка $M_0(x_0,y_0)$, значению параметра $t=1$ соответствует точка $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Поэтому

$$F(0)=f(M_0),\quad F(1)=f(M). \qquad (3.21)$$

Кроме того, в функции $F(t)=f\left(x_0+t\cdot\Delta x,\ y_0+t\cdot\Delta y\right)$ ее промежуточные аргументы $x=x_0+t\cdot\Delta x$, $y=y_0+t\cdot\Delta y$ есть линейные функции от t; в этом случае имеет место свойство инвариантности дифференциалов, т.е.

$$d\,F(0)=d\,f(x_0,y_0)=d\,f(M_0),\ \ldots,\ d^n F(0)=d^n f(x_0,y_0)=d^n f(M_0).$$

С учетом этого и равенств (3.21) формула (3.20) примет вид

$$f(M)=f(M_0)+\frac{d\,f(M_0)}{1!}+\ldots+\frac{d^n f(M_0)}{n!}+o\left(d^n f(M_0)\right).$$

4. Геометрические приложения

Касательная плоскость и нормаль к поверхности $F(x,y,z)=0$

Пусть поверхность задана уравнением $F(x,y,z)=0$. Рассмотрим на поверхности точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Будем предполагать, что $F'_x(M_0)$, $F'_y(M_0)$, $F'_z(M_0)$ одновременно не равны нулю. На поверхности через точку M_0 проведем всевозможные линии L и касательные прямые к этим линиям (рис. 9). Справедлива следующая теорема.

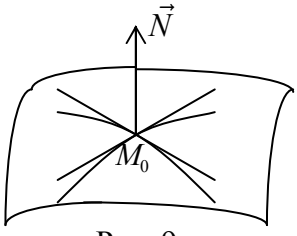

Рис. 9

Теорема 4.1. Касательные прямые, проведенные к всевозможным линиям поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке M_0, лежат в одной плоскости, называемой ***касательной*** плоскостью. ***Нормальный вектор*** касательной плоскости (называемый также нормальным вектором поверхности) есть вектор

$$\vec{N}=\left\{F'_x(M_0),\ F'_y(M_0),\ F'_z(M_0)\right\}.$$

Доказательство. Пусть произвольная линия L, лежащая на поверхности и проходящая через ее точку M_0, задана параметрическими уравнениями:

$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t).$$

Пусть точке M_0 соответствует значение параметра $t=t_0$. Так как линия L лежит на поверхности, то координаты любой ее точки $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ удовлетворяют уравнению поверхности $F(x,y,z)=0$, т.е. $F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0$. Продифференцируем это равенство по t:

$$F_x{}'\cdot x_t{}'+F_y\cdot y_t{}'+F_z{}'\cdot z_t{}'=0.$$

Равенство верно для любого t, в частности для значения $t=t_0$, соответствующего точке M_0, поэтому

$$F_x{}'(M_0)\cdot x_t{}'(t_0)+F_y{}'(M_0)\cdot y_t{}'(t_0)+F_z{}'(M_0)\cdot z_t{}'(t_0)=0.$$

Левая часть этого равенства равна скалярному произведению вектора $\vec{N}=\left\{F'_x(M_0),\ F'_y(M_0),\ F'_z(M_0)\right\}$ и вектора $\vec{S}=\left\{x_t{}'(t_0),y_t{}'(t_0),z_t{}'(t_0)\right\}$. Следовательно, $\vec{N}\cdot\vec{S}=0$, т.е. векторы $\vec{S}$ и $\vec{N}$ перпендикулярны.

Вектор $\vec{S}$, как известно, есть касательный вектор к линии L, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$. Вектор $\vec{N}$ определяется только уравнением поверхности и не зависит от линии L. Таким образом, касательные прямые, проведенные к произвольным линиям поверхности в точке M_0, перпендикулярны одному и тому же вектору $\vec{N}$, т.е. лежат в одной плоскости − в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{N}$.

Зная нормальный вектор $\vec{N}=\{F_x{}'(M_0),F_y{}'(M_0),F_z{}'(M_0)\}$ касательной плоскости и точку касания $M_0(x_0,y_0,z_0)$, можно записать ***уравнение касательной плоскости***

к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке M_0:

$$\boxed{F_x'(M_0)\cdot(x-x_0)+F_y'(M_0)\cdot(y-y_0)+F_z'(M_0)\cdot(z-z_0)=0.}$$

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку касания M_0, называется ***нормалью*** к поверхности в точке M_0. Нормальный вектор касательной плоскости $\overline{N}=\{F_x'(M_0),F_y'(M_0),F_z'(M_0)\}$ является направляющим вектором нормали. Поэтому ***уравнение нормали*** к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке M_0 имеет вид:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)}.}$$

Пример 4.1. На поверхности $3x^2+y^2+2z^2-21=0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $6x+y+4z=96$.

Решение. Найдем нормальный вектор касательной плоскости $\overline{N}=\{F_x'(M_0),\ F_y'(M_0),\ F_z'(M_0)\}=\{6x_0,2y_0,4z_0\}$ и нормальный вектор заданной плоскости $\overline{N}_1=\{6,1,4\}$. Так как касательная и заданная плоскости параллельны, то их нормальные векторы параллельны $\overline{N}\parallel\overline{N}_1$.

Условием параллельности двух векторов является пропорциональность их одноименных координат, т.е. $\frac{6x_0}{6}=\frac{2y_0}{1}=\frac{4z_0}{4}=\lambda$. Тогда $x_0=\lambda$, $y_0=\frac{\lambda}{2}$, $z_0=\lambda$.

Точка касания $M(x_0,y_0,z_0)$ лежит на заданной поверхности, значит ее координаты $x_0=\lambda$, $y_0=\frac{\lambda}{2}$, $z_0=\lambda$ удовлетворяют уравнению поверхности , т.е.

$$3\lambda^2+\frac{\lambda^2}{4}+2\lambda^2-21=0 \quad \text{и} \quad \lambda=\pm 2.$$

При $\lambda=2$ получим точку $M_1(2,1,2)$; при $\lambda=-2$ получим точку $M_2(-2,-1,-2)$.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности, заданной параметрически

Для задания кривой параметрическими уравнениями требуется один параметр; для задания поверхности требуется два параметра. Пусть поверхность задана параметрическими уравнениями:

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v) \quad \text{или} \quad \vec{r}=\vec{r}(u,v).$$

Введем понятие координатных линий l_u, l_v, проходящих через точку $P_0(u_0,v_0)$.

Координатная линия l_u – это множество точек поверхности, у которых параметр u меняется, параметр v фиксирован, $v=v_0$; при этом $\vec{r}=\vec{r}(u,v_0)$ есть векторно-параметрическое уравнение линии l_u; вектор $\vec{r}_u'(u_0,v_0)$ является касательным вектором к линии l_u (рис. 10).

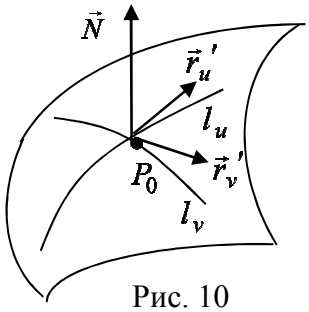

Рис. 10

Координатная линия l_v – это множество точек поверхности,

у которых параметр v меняется, параметр u фиксирован, $u = u_0$; при этом $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ есть векторно-параметрическое уравнение линии l_v; вектор $\vec{r}_v{}'(u_0, v_0)$ является касательным вектором к линии l_v (рис. 10).

Нормальный вектор $\vec{N}$ касательной плоскости (рис. 10) перпендикулярен двум векторам $\vec{r}_u{}'(u_0, v_0)$, $\vec{r}_v{}'(u_0, v_0)$; поэтому $\boxed{\vec{N} = \vec{r}_u{}'(u_0, v_0) \times \vec{r}_v{}'(u_0, v_0).}$
Зная нормальный вектор $\vec{N}$ касательной плоскости можно записать уравнения касательной плоскости и нормали.

Касательная прямая и нормальная плоскость к пространственной кривой

Рассмотрим два способа задания пространственной кривой.

1). Пусть пространственная кривая L задана параметрически в векторной форме $\vec{r} = \vec{r}(t)$ или в координатной форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

При изучении вектор-функции было установлено, что вектор $\vec{r}\,'(t_0) = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ является направляющим вектором касательной прямой к линии L в точке P_0. Поэтому канонические ***уравнения касательной*** прямой к линии L в точке P_0 имеют вид:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.}$$

Плоскость, проходящая через точку касания P_0 перпендикулярно касательной прямой к линии L, называется ***нормальной плоскостью*** линии L в точке P_0. Вектор $\vec{r}\,'(t_0) = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ коллинеарен касательной прямой и, значит, перпендикулярен нормальной плоскости. Поэтому ***уравнение нормальной плоскости*** к линии L в точке P_0 имеет вид:

$$\boxed{x'(t_0)\cdot(x - x_0) + y'(t_0)\cdot(y - y_0) + z'(t_0)\cdot(z - z_0) = 0.}$$

2). Рассмотрим другой способ задания пространственной кривой.
Кривую можно задать как пересечение двух поверхностей, но не всегда. Например, система уравнений $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 4y + 6z = b \end{cases}$ при $b = 10$ определяет плоскость, т.к. оба уравнения равносильны, а при $b \neq 10$ уравнения системы противоречивы, т.е. система не определяет никакой геометрический образ.

Выясним, при каких условиях пересечение двух поверхностей $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$ определяет кривую L в пространстве (рис. 11).

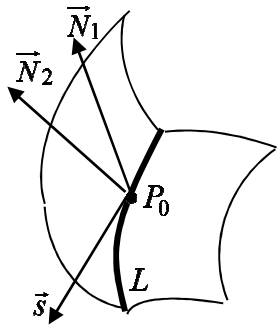

Рис. 11

Составим так называемую матрицу Якоби $\begin{pmatrix} F_x' & F_y' & F_z' \\ G_x' & G_y' & G_z' \end{pmatrix}$.

Пусть ранг этой матрицы равен двум, т.е. один из определителей второго порядка этой матрицы отличен от нуля. Если, например, $\dfrac{D(F,G)}{D(y,z)}=\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}\neq 0$, то система $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ определяет две неявные функции $y=y(x)$, $z=z(x)$. Присоединяя к ним равенство $x=x$, получим кривую $x=x$, $y=y(x)$, $z=z(x)$, заданную параметрически ($x-$параметр). Сформулируем вывод.

Если ранг матрицы $\begin{pmatrix} F_x' & F_y' & F_z' \\ G_x' & G_y' & G_z' \end{pmatrix}$ равен двум, то система уравнений $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ определяет кривую в пространстве.

Касательный вектор $\vec{s}$ к линии L пересечения поверхностей (рис.11) перпендикулярен нормальному вектору $\vec{N}_1=\left\{F_x',\, F_y',\, F_z'\right\}_{P_0}$ одной поверхности и перпендикулярен нормальному вектору $\vec{N}_2=\left\{G_x',\, G_y',\, G_z'\right\}_{P_0}$ другой поверхности, а потому

$$\boxed{\vec{s}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2}.$$

Вектор $\vec{s}$ является направляющим вектором касательной к линии L и нормальным вектором для нормальной плоскости к линии L. Зная их, можно записать уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к линии L.

Пример 4.2. Определяет ли система уравнений $\begin{cases} x^2+z^2-4y=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$ кривую? Если да, то записать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к этой кривой в точке, имеющей абсциссу $x=2$ и аппликату $z>0$.

Решение. Найдем все координаты точки касания P_0: из второго уравнения $y=2$, из первого уравнения $z=2$ (с учетом условия $z>0$). Теперь составим матрицу Якоби в точке P_0:

$$\begin{pmatrix} F_x' & F_y' & F_z' \\ G_x' & G_y' & G_z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & -4 & 2z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{P_0}=\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен двум, поэтому исходная система уравнений определяет кривую в пространстве. Найдем направляющий вектор касательной к этой кривой в точке P_0:

$$\vec{s}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x' & F_y' & F_z' \\ G_x' & G_y' & G_z' \end{vmatrix}_{P_0}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-4\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}.$$

Направляющим вектором касательной будет являться также вектор

$$\vec{s}_0=\frac{1}{4}\vec{s}=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}=\{-1,\,1,\,2\}.$$

Теперь запишем уравнение касательной прямой $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{2}$ и уравнение нормальной плоскости $-(x-2)+(y-2)+2(z-2)=0$ или $x-y-2z+4=0$.

5. Экстремумы функции

5.1. Локальный экстремум функции

Локальный экстремум (то есть максимум или минимум) для функции нескольких переменных определяется так же, как и для функции одной переменной, а именно:

1. Функция $f(M)$ имеет локальный ***максимум*** в точке M_0, если $f(M)<f(M_0)$ в некоторой окрестности точки M_0.

2. Функция $f(M)$ имеет локальный ***минимум*** в точке M_0, если $f(M)>f(M_0)$ в некоторой окрестности точки M_0.

Отметим, что в окрестности точки экстремума M_0 приращение функции $\Delta f(M_0)=f(M)-f(M_0)$ сохраняет знак, а именно $\Delta f(M_0)<0$ для точки максимума и $\Delta f(M_0)>0$ для точки минимума.

Для исследования функции на экстремум используют необходимое условие и достаточное условие экстремума.

Теорема 5.1 (необходимое условие экстремума)
Пусть функция $f(M)$ имеет экстремум в точке M_0. Тогда в этой точке ***каждая ее частная производная равна нулю или не существует.***

Доказательство для простоты проведем для функции двух переменных .

Пусть, например, функция $f(x,y)$ имеет максимум в точке (x_0,y_0). Тогда $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ в окрестности точки (x_0,y_0); в частности, $f(x_0,y_0)>f(x,y_0)$. Это означает, что функция ***одной*** переменной $f(x,y_0)$ имеет максимум в точке x_0. Следовательно, ее производная $f'_x(x,y_0)$ в точке x_0 равна нулю или не существует. Аналогично доказывается, что производная $f'_y(x_0,y_0)$ равна нулю или не существует.

Следствие. Пусть функция $f(M)$ дифференцируема и имеет экстремум в точке M_0. Тогда в этой точке $d\,f(M_0)=0$.

Действительно, в точке экстремума M_0 для дифференцируемой функции $f'_x(M_0)=f'_y(M_0)=0$, и поэтому $d\,f(M_0)=f'_x(M_0)\,dx+f'_y(M_0)\,dy=0$.

Замечание. Необходимый признак экстремума не является достаточным. Например, для функции $z=x^2-y^2$ её частные производные $z'_x=2x$, $z'_y=2y$ равны нулю в точке $(0,0)$, но $z(0,y)<z(0,0)$, а $z(x,0)>z(0,0)$, поэтому в точке $(0,0)$ экстремума нет.

Таким образом, для исследования функции на экстремум нужно

1) найти точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют (их называют критическими точками),
2) исследовать функцию в критических точках, используя достаточные условия экстремума или определение экстремума.

Рассмотрим достаточные условия экстремума.

Теорема 5.2 (первое достаточное условие экстремума).
Пусть M_0 критическая точка функции $f(M)$ и функция $f(M)$ дважды дифференцируема в окрестности точки M_0. Тогда
1) если $d^2f(M_0)>0$ в окрестности точки M_0, то функция $f(M)$ в точке M_0 имеет минимум,
2) если $d^2f(M_0)<0$ в окрестности точки M_0, то функция $f(M)$ в точке M_0 имеет максимум,
3) если $d^2f(M_0)$ меняет знак в окрестности точки M_0, то функция $f(M)$ в точке M_0 экстремума не имеет,
4) если $d^2f(M_0)=0$ в окрестности точки M_0, то нужно дополнительное исследование (в частности, если $d^3f(M_0)\neq 0$ в точке M_0 экстремума нет).

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора (3.18) при $n=2$.

$$f(M)=f(M_0)+d\,f(M_0)+\frac{1}{2}d^2f(M_0)+o\left(d^2f(M_0)\right). \qquad (5.1)$$

В критической точке M_0 для дифференцируемой функции имеем: $d\,f(M_0)=0$. Поэтому равенство (5.1) примет вид:

$$f(M)-f(M_0)=\frac{1}{2}d^2f(M_0)+o\left(d^2f(M_0)\right).$$

Величина $o\left(d^2f(M_0)\right)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $d^2f(M_0)$, поэтому она не влияет на знак $f(M)-f(M_0)$, т.е. знак $f(M)-f(M_0)$ совпадает со знаком $d^2f(M_0)$ в некоторой окрестности точки M_0. Следовательно,

если $d^2f(M_0)>0$, то и $f(M)-f(M_0)>0$ в окрестности точки M_0, значит функция $f(M)$ в точке M_0 имеет минимум;

если $d^2f(M_0)<0$, то и $f(M)-f(M_0)<0$ в окрестности точки M_0, значит функция $f(M)$ в точке M_0 имеет максимум;

если $d^2f(M_0)$ меняет знак, то и $f(M)-f(M_0)$ меняет знак в окрестности точки M_0, значит функция $f(M)$ в точке M_0 экстремума не имеет;

если $d^2f(M_0)=0$ в окрестности точки M_0, то $f(M)-f(M_0)=o\left(d^2f(M_0)\right)$ и для исследования этой величины нужно провести дополнительное исследование, например, взять формулу Тейлора более высокого порядка; более подробно на этом останавливаться не будем.

На практике исследовать знак дифференциала второго порядка в окрестности критической точки не очень удобно; проще использовать другое достаточное

условие (теорему 5.3), основанное на значениях производных в критической точке, а не в ее окрестности.

Теорема 5.3 (второе достаточное условие экстремума).
Пусть M_0 – критическая точка функции $f(M)=f(x_1,x_2,...,x_n)$. Обозначим:

$$A_{ik}=\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i\,\partial x_k},\ \Delta_1=A_{11},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}A_{11}\,A_{12}\\ A_{21}\,A_{22}\end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix}A_{11}\,A_{12}\,A_{13}\\ A_{21}\,A_{22}\,A_{23}\\ A_{31}\,A_{32}\,A_{33}\end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n=\begin{vmatrix}A_{11}\,A_{12}\ldots A_{1n}\\ A_{21}\,A_{22}\ldots A_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_{n1}\,A_{n2}\ldots A_{nn}\end{vmatrix}.\ \text{Тогда}$$

1) если $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_n$, – положительны, то M_0 – точка минимума функции $f(M)$;
2) если знаки $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_n$ чередуются, начиная со знака минус, то M_0 –точка максимума функции $f(M)$.

Доказательство для простоты проведем для функции двух переменных.

Исследуем знак $d^2f(M_0)$, используя формулу (3.8):

$$d^2f(M_0)=f''_{xx}(M_0)\cdot(\Delta x)^2+2f''_{xy}(M_0)\cdot\Delta x\Delta y+f''_{yy}(M_0)\cdot(\Delta y)^2=A_{11}\cdot(\Delta x)^2+2A_{12}\cdot\Delta x\Delta y+A_{22}\cdot(\Delta y)^2.$$

Вынесем за скобку $(\Delta y)^2$. Тогда $d^2f(M_0)=(\Delta y)^2\left[A_{11}\cdot\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2+2A_{12}\cdot\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)+A_{22}\right]$.

Выражение в квадратных скобках является квадратным трехчленом относительно $\frac{\Delta x}{\Delta y}$. Его дискриминант $D=4\cdot A_{12}^2-4\,A_{11}\cdot A_{22}=-4\cdot\Delta_2$.

По условию теоремы $\Delta_2>0$, поэтому дискриминант квадратного трехчлена $D<0$. Тогда знак $d^2f(M_0)$ совпадает со знаком $A_{11}=\Delta_1$ (рис.12,а, 12,б):

при $A_{11}>0$ имеем $d^2f(M_0)>0$ и по теореме 5.2 функция $f(M)$ имеет минимум в точке M_0;

при $A_{11}<0$ имеем $d^2f(M_0)<0$ и функция $f(M)$ имеет максимум в точке M_0.

Замечание. Если $\Delta_2<0$ в точке M_0, то функция двух переменных в точке M_0 не имеет экстремума.

Действительно, если $\Delta_2<0$, то дискриминант квадратного трехчлена $D=-4\cdot\Delta_2>0$. Тогда $d^2f(M_0)$ изменяет знак в окрестности точки M_0 (рис.12,в, 12,г). Поэтому по теореме 5.2 функция $f(M)$ не имеет экстремума в точке M_0.

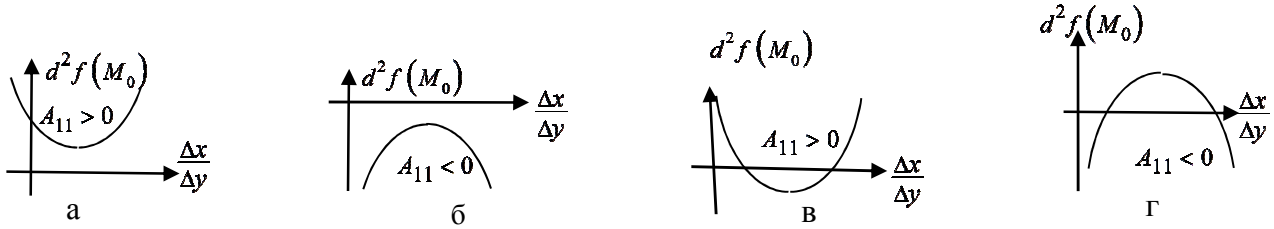

Рис.12

Пример 5.1. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z.$$

Решение. Найдем критические точки функции из системы уравнений

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2+12y=0, \\ f'_y = 2y+12x=0, \\ f'_z = 2z+2=0. \end{cases}$$

Из 3-го уравнения $z=-1$, из 2-го уравнения $y=-6x$, из 1-го уравнения $3\left(x^2+4y\right)=3\left(x^2-24x\right)=0$ или $x_1=0$, $x_2=24$. Итак, функция $f(x,y,z)$ имеет две критические точки $M_1(0,0,-1)$, $M_2(24,-144,-1)$. Для их исследования вычислим частные производные 2-го порядка:

$$f''_{xx}=6x,\ f''_{xy}=12,\ f''_{xz}=0,\ f''_{yx}=12,\ f''_{yy}=2,\ f''_{yz}=0,\ f''_{zx}=0,\ f''_{zy}=0,\ f''_{zz}=2$$

и составим из них определители $\Delta_3=\begin{vmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} 6x & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix}$, $\Delta_1=6x$.

В точке $M_2(24,-144,-1)$ имеем $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3=2\cdot\Delta_2>0$, поэтому по теореме 5.3 M_2 есть точка минимума функции $f(x,y,z)$ и $f_{\min}=f(M_2)=-6913$.

В точке $M_1(0,0,-1)$ имеем $\Delta_1=0$, $\Delta_2<0$, $\Delta_3=2\cdot\Delta_2<0$, поэтому теорема 5.3 неприменима. Воспользуемся теоремой 5.2. Для этого вычислим дифференциал второго порядка

$$d^2f=f''_{xx}(dx)^2+f''_{yy}(dy)^2+f''_{zz}(dz)^2+2f''_{xy}dx\,dy+2f''_{xz}dx\,dz+2f''_{yz}dy\,dz,$$

$$d^2f\left(M_1\right)=2(dy)^2+2(dz)^2+24\,dx\,dy.$$

При $dy=0$ имеем $d^2f\left(M_1\right)=2(dz)^2>0$;

при $dz=0$, $dx=-dy$ имеем $d^2f\left(M_1\right)=2(dy)^2-24(dy)^2=-22(dy)^2<0$.

Так как $d^2f(M_1)$ меняет знак в окрестности точки M_1, то функция $f(M)$ в точке M_1 экстремума не имеет.

Пример 5.2. На плоскости даны n точек $M_i(a_i,b_i)$, в которых сосредоточены массы m_i, $i=1,2,...,n$. Показать, что центр тяжести этой системы точек имеет координаты $x_c=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot a_i$, $y_c=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot b_i$, где $m=\sum_{i=1}^{n}m_i$.

Решение. Центр тяжести системы материальных точек есть точка $M(x,y)$, относительно которой момент инерции $I(x,y)=\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\left(x-a_i\right)^2+\left(y-b_i\right)^2\right]$ минимален. Исследуем функцию двух переменных $I(x,y)$ на минимум. Для этого найдем критическую точку этой функции из системы уравнений

$$\begin{cases} I_x' = 2\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\left(x - a_i\right) = 0, \\ I_y' = 2\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\left(y - b_i\right) = 0. \end{cases}$$

Получим критическую точку $x_c = \frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot a_i$, $y_c = \frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot b_i$, где $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$.

Для исследования этой точки на экстремум вычислим величины

$$A_{11} = I''_{xx} = 2\sum_{i=1}^{n} m_i = 2m, \quad A_{12} = I''_{xy} = 0, \quad A_{22} = I''_{yy} = 2\sum_{i=1}^{n} m_i = 2m,$$

$$\Delta_1 = A_{11} = 2\sum_{i=1}^{n} m_i = 2m, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot A_{22} - A_{12}{}^2 = 4m^2.$$

Так как $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, то критическая точка $\left(x_c, y_c\right)$ является точкой минимума.

5.2. Глобальный экстремум функции

Требуется найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции не в окрестности точки (локальный экстремум), а в некоторой ограниченной замкнутой области (глобальный экстремум). Наибольшее (наименьшее) значение функции в такой области может достигаться либо внутри области в точках локального экстремума (а значит, в критических точках), либо на границе области.

Поэтому получаем следующий алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(M)$ в области D:

1) найти критические точки функции $f(M)$, принадлежащие области D, и вычислить значения функции в этих точках;
2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области;
3) из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее значения.

Пример 5.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy + y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

Решение. 1). Найдем критические точки функции в круге: $\begin{cases} z'_x = y = 0, \\ z'_y = x + 2y = 0. \end{cases}$

Критическая точка $M_0(0,0)$ лежит в заданном круге и $z_0 = z(0,0) = 0$.

2). На границе области $x^2 + y^2 = 4$ или $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ $\left(0 \le t \le 2\pi\right)$, и поэтому функция z примет вид: $z = 4\sin t\cos t + 4\sin^2 t = 2\sin 2t + 2\left(1 - \cos 2t\right)$. Найдем критические точки получившейся функции:

$$z'_t = 4\cos 2t + 4\sin 2t = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}\, 2t = -1 \;\Rightarrow\; t_1 = 3\pi/8,\; t_2 = 7\pi/8.$$

В критических точках имеем значения функции $z_1 = 2 + 2\sqrt{2}$, $z_2 = 2 - 2\sqrt{2}$, на концах отрезка $[0, 2\pi]$ значение функции $z = 0$.

3). Из получившихся значений функции $z = 0$, $z = 2 + 2\sqrt{2}$, $z = 2 - 2\sqrt{2} \approx -0.8$ выберем наибольшее значение $z = 2 + 2\sqrt{2}$ и наименьшее значение $z = 2 - 2\sqrt{2}$.

5.3. Условный экстремум функции

Выше рассматривалась задача об экстремуме функции нескольких переменных, при этом на независимые переменные не накладывалось никаких ограничений. На практике часто приходится иметь дело с экстремумом функции нескольких переменных, когда эти переменные связаны некоторыми условиями – уравнениями связи. Например, требуется найти экстремум функции $f(x, y, z)$ на поверхности с уравнением $F(x, y, z) = 0$ или на линии $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$ заданной пересечением двух поверхностей.

Общая постановка задачи

Исследовать функцию $f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ на экстремум при наличии уравнений связи

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{cases} \quad (k < n). \tag{5.2}$$

Точку M_0 назовем точкой ***условного минимума*** (соответственно, ***максимума***) функции $f(M)$ при наличии связей (5.2), если $f(M_0) < f(M)$ (соответственно, $f(M_0) > f(M)$) для всех точек M, принадлежащих некоторой окрестности точки M_0 и удовлетворяющих уравнениям связи (5.2).

Для краткости записи ограничимся случаем экстремума функции $w = f(x, y, u, v)$ четырех переменных при наличии двух уравнений связи

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Будем предполагать, что якобиан $\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}$ отличен от нуля. Тогда система двух уравнений (5.3) теоретически определяет две функции u, v от аргументов x, y:

$$u = u(x, y), \ v = v(x, y).$$

В зависимости от того, можно ли практически выразить u, v из системы уравнений (5.3), различают два метода отыскания условного экстремума.

Сведение к безусловному экстремуму

Предположим, что из уравнений связи легко выразить переменные u, v через две другие переменные x, y: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Подставим найденные

u, v в функцию w. Получим $w = f\left(x, y, u(x,y), v(x,y)\right) = g(x,y)$ − функцию двух переменных. Так как связи между переменными x, y, u, v уже учтены, то остается найти безусловный экстремум полученной функции $g(x,y)$.

Пример 5.4. Найти экстремум функции $w = x^2 + y^2 + z^2$, если x, y, z удовлетворяют уравнениям связи $x + y - 3z + 7 = 0$, $x - y + z - 3 = 0$.

Решение. Из двух уравнений связи выразим две переменные $y = 2x - 1$, $z = x + 2$ и подставим в функцию w. Получим $w = x^2 + (2x-1)^2 + (x+2)^2$. Исследуем полученную функцию одной переменной на экстремум:

$$w_x' = 2x + 4\,(2x-1) + 2\,(x+2) = 12x = 0 \text{ при } x = 0.$$

Так как $w''_{xx} = 12 > 0$, то функция $w = x^2 + (2x-1)^2 + (x+2)^2$ имеет минимум при $x = 0$. Тогда функция $w = x^2 + y^2 + z^2$ имеет минимум при $x = 0,\ y = -1,\ z = 2$, при этом $w_{\min} = 5$.

Метод множителей Лагранжа

Этот метод применяется, когда из уравнений связи трудно или невозможно выразить одни переменные через другие.

Пусть точка M_0 есть точка условного экстремума функции $w = f(x, y, u, v)$ при наличии двух уравнений связи

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases}$$

Если якобиан $\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)}$ отличен от нуля, то система двух уравнений связи теоретически определяет две функции u, v от аргументов x, y: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Тогда

а) функция $w = f\left(x, y, u(x,y), v(x,y)\right) = g(x,y)$ имеет экстремум в точке (x_0, y_0) и в силу следствия из теоремы 5.1 в этой точке $d\,f\left(x, y, u(x,y), v(x,y)\right) = 0$;

б) из уравнений связи имеем $\begin{cases} F\left(x, y, u(x,y), v(x,y)\right) \equiv 0, \\ G\left(x, y, u(x,y), v(x,y)\right) \equiv 0, \end{cases}$ $\begin{cases} d\,F\left(x, y, u(x,y), v(x,y)\right) \equiv 0, \\ d\,G\left(x, y, u(x,y), v(x,y)\right) \equiv 0. \end{cases}$

Воспользовавшись свойством инвариантности первого дифференциала, запишем:

$$\begin{cases} d\,f = f'_x\ dx + f'_y\ dy + f'_u\ du + f'_v\ dv = 0, \\ d\,F = F'_x\ dx + F'_y\ dy + F'_u\ du + F'_v\ dv = 0, \\ d\,G = G'_x\ dx + G'_y\ dy + G'_u\ du + G'_v\ dv = 0. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на множитель λ, третье уравнение – на множитель μ и сложим с первым уравнением:

$$\left(f'_x + \lambda F'_x + \mu G'_x\right)dx + \left(f'_y + \lambda F'_y + \mu G'_y\right)dy + \left(f'_u + \lambda F'_u + \mu G'_u\right)du + \left(f'_v + \lambda F'_v + \mu G'_v\right)dv = 0.$$

Введем ***функцию Лагранжа*** $\Phi = f + \lambda F + \mu G$ (λ и μ называют множителями Лагранжа) и запишем предыдущее равенство с помощью этой функции:

$$\Phi'_x\ dx + \Phi'_y\ dy + \Phi'_u\ du + \Phi'_v\ dv = 0\ . \qquad (5.4)$$

Выберем λ и μ так, чтобы $\Phi'_u = \Phi'_v = 0$. Это возможно, так как система уравнений

$$\begin{cases} \Phi'_u = f'_u + \lambda F'_u + \mu G'_u = 0, \\ \Phi'_v = f'_v + \lambda F'_v + \mu G'_v = 0, \end{cases}$$

имеет единственное решение в силу того, что определитель системы $\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)} \neq 0$.

С учетом равенства $\Phi'_u = \Phi'_v = 0$ соотношение (5.4) примет вид $\Phi'_x\, dx + \Phi'_y\, dy = 0$. Это равенство верно при любых dx и dy; в частности,

при $dy = 0$, $dx \neq 0$ из равенства $\Phi'_x\, dx + \Phi'_y\, dy = 0$ получим $\Phi'_x = 0$,

при $dx = 0$, $dy \neq 0$ из равенства $\Phi'_x\, dx + \Phi'_y\, dy = 0$ получим $\Phi'_y = 0$.

Итак, в точке экстремума $\Phi'_x = \Phi'_y = \Phi'_u = \Phi'_v = 0$.

Для отыскания условного экстремума функции $f(x,y,u,v)$ при наличии уравнений связи $\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0, \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$ нужно:

1) составить вспомогательную функцию Лагранжа Φ следующим образом:

$$\Phi = f(x,y,u,v) + \lambda \cdot F(x,y,u,v) + \mu \cdot G(x,y,u,v);$$

2) найти ее критические точки из уравнений $\Phi_x' = \Phi_y' = \Phi_u' = \Phi_v' = 0$ и уравнений связи $F(x,y,u,v) = 0$, $G(x,y,u,v) = 0$;

3) исследовать критические точки на экстремум, исходя из геометрических или физических соображений или знака $d^2\Phi$.

Аналогично этот метод применяется и для отыскания экстремума функции n переменных при наличии k уравнений связи $(k < n)$.

Пример 5.5. На поверхности $\dfrac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ найти точки, наиболее и наименее удаленные от плоскости $3x + 4y + 12z = 288$.

Решение. Рассмотрим точку $M(x,y,z)$, лежащую на заданной поверхности. Расстояние от точки M до плоскости $3x + 4y + 12z = 288$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|3x + 4y + 12z - 288|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = \frac{|3x + 4y + 12z - 288|}{13}. \qquad \textbf{(5.5)}$$

Чтобы исследовать расстояние на экстремум, достаточно исследовать на экстремум более простую функцию $f(x,y,z) = 3x + 4y + 12z - 288$, причем надо учесть, что точка $M(x,y,z)$ не произвольная точка пространства, а лежит на заданной поверхности, т.е. ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности $\dfrac{x^2}{96} + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Это уравнение есть уравнение связи. Решим задачу, применив метод множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = (3x + 4y + 12z - 288) + \lambda \left(\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 - 1 \right).$$

Найдем ее критические точки из системы уравнений

$$\begin{cases} \Phi'_x = 3 + \lambda \frac{x}{48} = 0, \\ \Phi'_y = 4 + 2\lambda y = 0, \\ \Phi'_z = 12 + 2\lambda z = 0, \\ \frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3 \cdot 48}{\lambda}, \\ y = -\frac{2}{\lambda}, \\ z = -\frac{6}{\lambda}, \\ \frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Подставим полученные x, y, z в последнее уравнение системы

$$\frac{3^2 \cdot 48^2}{48 \cdot 2\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} + \frac{36}{\lambda^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lambda^2}(9 \cdot 24 + 4 + 36) = 1, \quad \lambda^2 = 256, \quad \lambda = \pm 16.$$

Для $\lambda_1 = 16$ получим критическую точку $M_1\left(-9, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$.

Для $\lambda_2 = -16$ получим критическую точку $M_2\left(9, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

По формуле **(5.5)** вычислим расстояние от точек M_1 и M_2 до заданной плоскости:

$$d_1 = \frac{\left|3 \cdot (-9) + 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 12 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 288\right|}{13} = 24\frac{8}{13}, \qquad d_2 = \frac{\left|3 \cdot 9 + 4 \cdot \frac{1}{8} + 12 \cdot \frac{3}{8} - 288\right|}{13} = 19\frac{9}{13}.$$

Таким образом, точка M_1 наиболее удалена от заданной плоскости, точка M_2 наименее удалена от плоскости.

Пример 5.6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y, z) = xyz$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = xyz + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) + \mu(x + y + z).$$

Найдем ее критические точки из системы уравнений

$$\begin{cases} \Phi'_x = yz + 2\lambda x + \mu = 0, \\ \Phi'_y = xz + 2\lambda y + \mu = 0, \\ \Phi'_z = xy + 2\lambda z + \mu = 0, \end{cases} \text{ и уравнений связи } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Вычитая в первой системе второе уравнение из первого, получим

$$(y - x)z + 2\lambda(x - y) = 0 \quad \text{или} \quad (y - x)(z - 2\lambda) = 0.$$

Рассмотрим два случая:

а) если $y = x$, то из уравнений связи получим систему $\begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1, \\ 2x + z = 0, \end{cases}$ и критические точки $M_{1,2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$; в силу симметрии функции $f(x, y, z) = xyz$ и уравнений связи аналогично можно получить критические точки

$$M_{3,4}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad M_{5,6}\left(\mp\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right);$$

б) если $z = 2\lambda$, то вычитая в первой системе третье уравнение из первого, получим

$$(z-x)y-2\lambda(z-x)=0,\ \text{или}\ (z-x)\left(y-\underbrace{2\lambda}_{=z}\right)=0,\ \text{или}\ (z-x)(y-z)=0.$$

При $z=x$ получим критические точки $M_{3,4}$; при $y=z$ получим критические точки $M_{5,6}$. Функция $f(x,y,z)=xyz$ в полученных точках принимает два значения

$$f_1=\frac{-2}{6\sqrt{6}},\ \ f_2=\frac{2}{6\sqrt{6}}.$$

Уравнения связи определяют линию пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=1$ с центром в начале координат и плоскости $x+y+z=0$, проходящей через начало координат. Так как линия пересечения есть окружность, т.е. ограниченное замкнутое множество, то на нем непрерывная функция достигает наибольшего и наименьшего значений, причем достигает она эти значения в критических точках.

Поэтому значение $f_1=\frac{-2}{6\sqrt{6}}$ – минимальное, а значение $f_2=\frac{2}{6\sqrt{6}}$ – максимальное.

Глава 2. ИНТЕГРАЛЫ ПО ФИГУРЕ

В этой главе будут рассмотрены различные интегралы от функции нескольких переменных, а именно, определенные, двойные, тройные, криволинейные, поверхностные интегралы, т.е. интегралы соответственно по отрезку, по плоской области, по телу, по дуге, по поверхности.

6. Понятие интеграла по фигуре и его свойства

Для единообразного введения интегралов нам понадобится понятие фигуры и её меры.

6.1. Фигура и её мера

Объединим общим названием “фигура” – отрезок $[a,b]$, дугу (l), плоскую область (S), поверхность (σ), тело (V). Отрезок и дугу назовем одномерной фигурой, плоскую область и поверхность – двумерной фигурой, тело – трехмерной фигурой.

С понятием фигуры связано понятие её меры. Мерой одномерной фигуры назовем её длину, мерой двумерной фигуры назовем её площадь, мерой трехмерной фигуры назовем её объём. Для фигур (l), (S), (σ), (V) их меры соответственно обозначим l, S, σ, V. В общем случае фигуру обозначим (Φ), а её меру – той же буквой Φ, но без скобок.

Для дальнейшего изложения введем понятие диаметра фигуры. Назовем диаметром $diam(\Phi)$ фигуры (Φ) наибольшее из расстояний между её точками. Например, диаметр шара радиусом R равен $2R$, диаметр куба равен длине его диагонали.

В дальнейшем будем предполагать, что

1) фигура (Φ) — ограничена, т.е. имеет конечный диаметр,

2) фигура (Φ) — замкнута, т.е. включает границу.

6.2. Задача о вычислении массы фигуры

Пусть (Φ) – произвольная фигура, в каждой точке P которой известна плотность распределения массы $\gamma(P)$. Разобьём фигуру (Φ) на n малых ячеек $(\Delta\Phi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots n)$. В каждой ячейке $(\Delta\Phi_k)$ выберем произвольную точку P_k (рис. 13). В силу малости ячейки её плотность можно считать постоянной и равной $\gamma(P_k)$. Тогда масса ячейки Δm_k приближенно равна произведению плотности на меру ячейки, т.е. $\Delta m_k \approx \gamma(P_k)\cdot\Delta\Phi_k$. Суммируя массы всех ячеек, получим массу фигуры

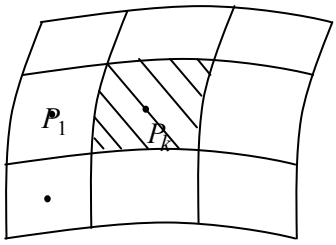

Рис. 13

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \gamma(P_k)\cdot\Delta\Phi_k \ . \qquad (6.1)$$

Это приближенное равенство будет тем точней, чем меньше диаметры всех ячеек или максимальный из диаметров ячеек $d = \max diam(\Delta\Phi_k)$. Точное значение массы фигуры определяется как предел суммы (6.1) при $d \to 0$

$$m = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} \gamma(P_k)\cdot\Delta\Phi_k \ .$$

Этот предел называют интегралом от функции $\gamma(P)$ по фигуре (Φ) и обозначают $\int\limits_{(\Phi)} \gamma(P)\, d\Phi$. К пределам такого типа приводят и другие задачи. Абстрагируясь от конкретной задачи о массе фигуры, дадим общее понятие интеграла по фигуре.

6.3. Понятие интеграла по фигуре

Пусть на фигуре (Φ) определена скалярная функция $f(P)$. Так же, как и в задаче о массе фигуры, разобьем фигуру (Φ) на n ячеек $(\Delta\Phi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots n)$. В каждой ячейке $(\Delta\Phi_k)$ выберем произвольную точку P_k. Составим сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta\Phi_k$. Эту сумму называют интегральной суммой функции $f(P)$ по фигуре (Φ). Найдем предел интегральной суммы при стремлении к нулю d (максимального из диаметров ячеек).

Если существует при $d \to 0$ предел интегральной суммы функции $f(P)$ по фигуре (Φ), не зависящий от способа разбиения фигуры и выбора точек P_k, то этот предел называют ***интегралом функции*** $f(P)$ ***по фигуре*** (Φ) и обозначают $\int\limits_{(\Phi)} f(P) d\Phi$. При этом функцию $f(P)$ называют интегрируемой на фигуре (Φ).

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int\limits_{(\Phi)} f(P)\, d\Phi = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta\Phi_k \, .} \qquad (6.2)$$

Естественно возникает вопрос: для каких функций $f(P)$ существует интеграл по фигуре (то есть существует предел интегральных сумм, не зависящий

от способа разбиения фигуры на ячейки и от выбора точек P_k). Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которую приводим без доказательства.

> ***Теорема существования.*** Пусть функция $f(P)$ непрерывна на фигуре (Φ). Тогда существует интеграл $\int\limits_{(\Phi)} f(P)d\Phi$.

Интеграл по фигуре может существовать не только для непрерывных функций, но и для кусочно-непрерывных функций. В дальнейшем будем предполагать, что интегралы, о которых идет речь, существуют.

6.4. Конкретные виды интегралов по фигуре

В п. 6.1 мы рассматривали фигуры пяти видов: отрезок, дугу кривой, поверхность, плоскую область, тело. В соответствии с этим мы получим следующие пять видов интегралов по фигуре:

1). Если фигура (Φ) является отрезком $[a,b]$, то интеграл называют ***определенным интегралом*** и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx$. По определению (6.2)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k.$$

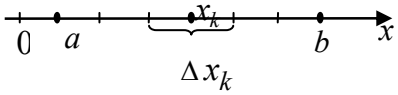

Рис.14

Здесь x_k – координаты выбранных точек P_k, Δx_k – меры ячеек разбиения, т.е. длины частичных отрезков (рис. 14), d – максимальный из Δx_k.

2). Если фигура (Φ) является дугой кривой (l), то интеграл по такой фигуре называют ***криволинейным интегралом 1-го рода*** и обозначают $\int\limits_{(l)} f(P)\,dl$. По определению (6.2)

$$\int\limits_{(l)} f(P)\,dl = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta l_k.$$

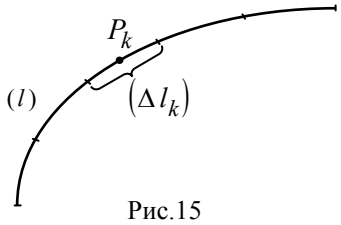

Рис.15

Здесь Δl_k – меры ячеек, в данном случае длины частичных дуг (Δl_k); d – максимальный из $diam(\Delta l_k)$ (рис. 15).

3). Если фигура (Φ) является поверхностью (σ), то интеграл по такой фигуре называют ***поверхностным интегралом 1-го рода*** и обозначают $\int\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma$. По определению (6.2)

$$\int\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta\sigma_k.$$

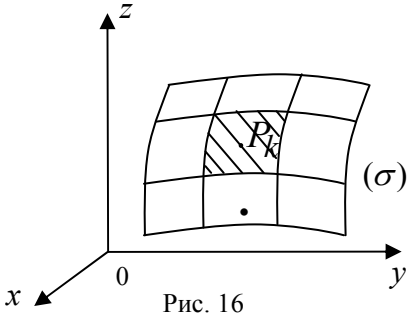

Рис. 16

Здесь $\Delta\sigma_k$ – меры ячеек, в данном случае их площади; d – максимальный из $diam(\Delta\sigma_k)$ (рис. 16).

4). Если фигура (Φ) является плоской областью (S), то интеграл по такой фигуре называют ***двойным интегралом*** и обозначают $\int\limits_{(S)} f(P)\,dS$. По определению (6.2)

$$\boxed{\int\limits_{(S)} f(P)\,dS = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta S_k .}$$

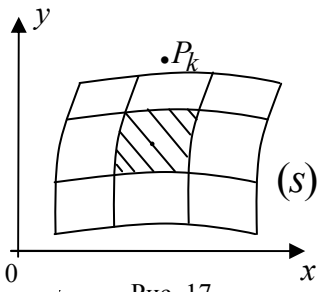

Рис. 17

Здесь ΔS_k – меры ячеек, в данном случае их площади; d – максимальный из $diam(\Delta S_k)$ (рис. 17).

5). Если фигура (Φ) является телом (V), то интеграл по такой фигуре называют ***тройным интегралом*** и обозначают $\int\limits_{(V)} f(P)\,dV$. По определению (6.2)

$$\boxed{\int\limits_{(V)} f(P)\,dV = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta V_k .}$$

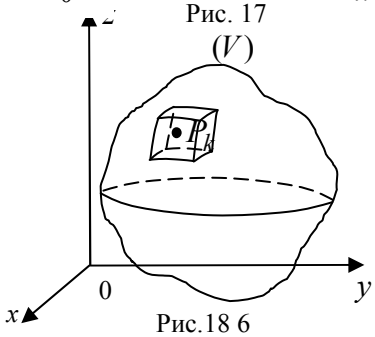

Рис.18 6

Здесь ΔV_k – меры ячеек, в данном случае их объёмы; d – максимальный из $diam(\Delta V_k)$ (рис. 18).

Рассмотрим еще одну часто употребляемую форму записи двойного интеграла. Двойной интеграл – это интеграл по плоской области (S). Пусть эта область лежит в плоскости XOY. Так как интеграл не зависит от способа разбиения фигуры на ячейки, то разобьём фигуру на ячейки прямыми, параллельными оси OY, с расстояниями Δx между ними и прямыми, параллельными оси OX, с расстояниями Δy между ними (рис. 19). Тогда площадь любой ячейки, кроме приграничной, равна $\Delta S = \Delta x\cdot\Delta y$. Поэтому dS и интеграл записывают в следующем виде:

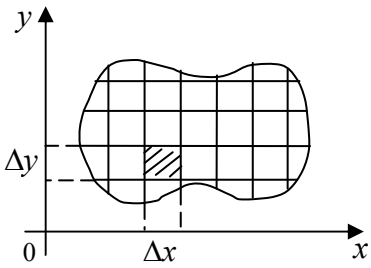

Рис.19 7

$$dS = dx\cdot dy ,$$

$$\boxed{\int\limits_{(S)} f(P)dS = \iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy .}$$

Аналогичная форма записи принята и для тройного интеграла

$$\boxed{\int\limits_{(V)} f(P)\,dV = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz .}$$

6.5. Свойства интеграла по фигуре

Пусть, как предполагалось ранее, фигура (Φ) — ограничена и замкнута, а интегралы, о которых идет речь, существуют.

1. Свойство линейности

$$\boxed{\int\limits_{(\Phi)} \left(\lambda\cdot f(P)+\mu\cdot g(P)\right)d\Phi = \lambda\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi + \mu\int\limits_{(\Phi)} g(P)\,d\Phi ,}$$

где λ и μ – константы.

Это свойство следует из определения интеграла по фигуре и свойств пределов:

$$\int\limits_{(\Phi)} \left(\lambda \cdot f(P) + \mu \cdot g(P)\right) d\Phi = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda \cdot f(P_k) + \mu \cdot g(P_k)\right) \cdot \Delta\Phi_k =$$

$$= \lambda \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k) \cdot \Delta\Phi_k + \mu \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(P_k) \cdot \Delta\Phi_k = \lambda \int\limits_{(\Phi)} f(P)\, d\Phi + \mu \int\limits_{(\Phi)} g(P)\, d\Phi .$$

2. Свойство аддитивности

Пусть фигура (Φ) разбита (рис. 20) на части (Φ_1) и (Φ_2). Тогда

$$\boxed{\int\limits_{(\Phi)} f(P)\, d\Phi = \int\limits_{(\Phi_1)} f(P)\, d\Phi + \int\limits_{(\Phi_2)} f(P)\, d\Phi}.$$

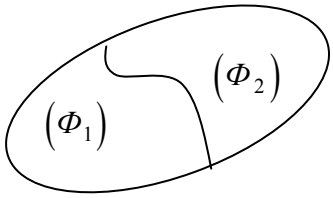

Рис.20

Так как интеграл по фигуре численно равен массе фигуры с плотностью $f(P)$, то физический смысл этого свойства следующий: масса всей фигуры (Φ) равна сумме масс её частей (Φ_1) и (Φ_2).

3. О вычислении меры фигуры

Мера Φ фигуры (Φ) вычисляется по формуле

$$\Phi = \int\limits_{(\Phi)} d\Phi .$$

Это свойство следует из определения интеграла по фигуре (Φ) от функции $f(P) \equiv 1$:

$$\int\limits_{(\Phi)} 1 \cdot d\Phi = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta\Phi_k = \lim_{d\to 0} \Phi = \Phi .$$

В частности, из этой формулы мы имеем формулы для отыскания длины l дуги (l), площади S плоской области (S), площади σ поверхности (σ), объёма V тела (V):

$$\boxed{l = \int\limits_{(l)} dl, \qquad S = \int\limits_{(S)} dS, \qquad \sigma = \int\limits_{(\sigma)} d\sigma, \qquad V = \int\limits_{(V)} dV.} \tag{6.3}$$

4. Об интегрировании неравенств

$$\boxed{\text{Если } f(P) \le g(P) \text{ на фигуре } (\Phi), \text{ то } \int\limits_{(\Phi)} f(P)\, d\Phi \le \int\limits_{(\Phi)} g(P)\, d\Phi .}$$

Действительно, так как $f(P) \le g(P)$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} f(P_k) \cdot \Delta\Phi_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} g(P_k) \cdot \Delta\Phi_k$ и поэтому

$$\int\limits_{(\Phi)} f(P)\, d\Phi = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k) \cdot \Delta\Phi_k \le \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(P_k) \cdot \Delta\Phi_k = \int\limits_{(\Phi)} g(P)\, d\Phi .$$

5. Об оценке интеграла

$$\boxed{m \cdot \Phi \le \int\limits_{(\Phi)} f(P)\, d\Phi \le M \cdot \Phi,} \tag{6.4}$$

где m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(P)$ на фигуре (Φ).

Действительно, так как $m \le f(P) \le M$ на фигуре (Φ), то по свойствам 4, 1, 3

$$m\cdot\Phi=\int\limits_{(\Phi)} m\,d\Phi\le\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi\le\int\limits_{(\Phi)} M\,d\Phi=M\cdot\Phi.$$

6. Об оценке модуля интеграла

$$\boxed{\left|\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi\right|\le\int\limits_{(\Phi)}\left|f(P)\right|d\Phi.}$$

Оценка модуля интеграла следует из свойств модуля: $-\left|f\left(P\right)\right|\le f(P)\le\left|f\left(P\right)\right|$.
Тогда из свойства 5 следует

$$-\int\limits_{(\Phi)}\left|f(P)\right|d\Phi\le\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi\le\int\limits_{(\Phi)}\left|f(P)\right|d\Phi \text{ и значит, } \left|\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi\right|\le\int\limits_{(\Phi)}\left|f(P)\right|d\Phi.$$

7. Теорема о среднем

Пусть функция $f(P)$ непрерывна на фигуре (Φ). Тогда на (Φ) существует точка $\tilde{P}$ такая, что

$$\boxed{\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi=f\left(\tilde{P}\right)\cdot\Phi} \quad \text{или} \quad \boxed{f\left(\tilde{P}\right)=\frac{1}{\Phi}\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi.} \qquad (6.5)$$

Выведем эту формулу. Так как функция $f\left(P\right)$ непрерывна на фигуре (Φ), то она достигает на этой фигуре наименьшего m и наибольшего M значений. Поэтому $m\le f(P)\le M$ на (Φ). Тогда из соотношения (6.4) следует:

$$m\cdot\Phi\le\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi\le M\cdot\Phi.$$

Разделим это неравенство на положительное число Φ:

$$m\le\frac{1}{\Phi}\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi\le M. \qquad (6.6)$$

Рассмотрим число μ, равное $\frac{1}{\Phi}\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi.$ Из равенства (6.6) следует, что $m\le\mu\le M$. Так как функция $f\left(P\right)$ непрерывна на фигуре (Φ), то она принимает на этой фигуре все промежуточные значения между m и M. В частности, функция $f\left(P\right)$ принимает промежуточное значение μ в некоторой точке $\tilde{P}$ фигуры (Φ), то есть $f\left(\tilde{P}\right)=\mu$. Отсюда $f\left(\tilde{P}\right)=\frac{1}{\Phi}\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi$ и $\int\limits_{(\Phi)} f(P)\,d\Phi=f\left(\tilde{P}\right)\cdot\Phi$.

Замечание. Значение $f\left(\tilde{P}\right)$ из теоремы о среднем называют средним значением функции $f(P)$ на фигуре (Φ) и обозначают f_{cp}. Оно используется в прикладных задачах.

6.6. Механические приложения интеграла по фигуре

Вычисление массы фигуры

Пусть известна плотность распределения масс $\gamma(P)$. Тогда масса фигуры (Φ), как было установлено в п. 6.2, вычисляется по формуле

$$\boxed{m = \int\limits_{(\Phi)} \gamma(P)\, d\Phi.} \qquad (6.7)$$

Отыскание центра тяжести фигуры

Пусть центр тяжести фигуры находится в точке C с координатами x_c, y_c, z_c. Как и при вычислении массы, разобьем фигуру (Φ) на n малых ячеек $(\Delta\Phi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots n)$. В каждой ячейке выберем точку P_k с координатами x_k, y_k, z_k (рис. 21). В точке P_k сосредоточим массу $k-й$ ячейки $\Delta m_k \approx \gamma(P_k)\cdot\Delta\Phi_k$. Тем самым мы заменим фигуру (Φ) системой материальных точек P_k $(k = 1, 2, \ldots n)$. Для такой системы (пример 5.3) абсцисса центра тяжести равна $\frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot \Delta m_k$, где m – масса всей системы. Следовательно, для абсциссы центра тяжести первоначальной фигуры имеем

$$x_c \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \Delta m_k = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \gamma(P_k)\,\Delta\Phi_k \ .$$

Это приближённое равенство будет тем точнее, чем меньше диаметры ячеек; поэтому устремим максимальный из диаметров ячеек к нулю и перейдем к пределу. Получим

$$\boxed{x_c = \frac{1}{m}\int\limits_{(\Phi)} x \cdot \gamma(P)\, d\Phi.} \qquad (6.8)$$

Аналогично вычисляются две другие координаты центра тяжести

$$\boxed{y_c = \frac{1}{m}\int\limits_{(\Phi)} y \cdot \gamma(P)\, d\Phi, \quad z_c = \frac{1}{m}\int\limits_{(\Phi)} z \cdot \gamma(P)\, d\Phi.} \qquad (6.9)$$

Вычисление моментов инерции фигуры

Выведем, например, формулу для вычисления момента инерции I_{XOY} фигуры относительно плоскости XOY. Для этого, как и в предыдущем случае, разобьем фигуру на ячейки, выберем в $k-й$ ячейке точку P_k $(k = 1, 2, \ldots n)$ и в ней сосредоточим массу ячейки (рис. 21). Момент инерции этой точки относительно плоскости XOY равен квадрату расстояния от точки до плоскости XOY, т.е. z_k^2, умноженному на массу, сосредоточенную в точке, т.е. на Δm_k. Суммируя моменты инерции выбранных точек, получим

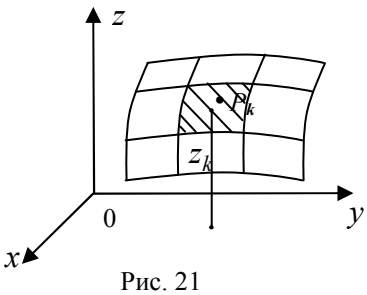

Рис. 21

$$I_{XOY} \approx \sum_{k=1}^{n} z_k^2 \cdot \Delta m_k = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 \cdot \gamma(P_k)\cdot\Delta\Phi_k \ .$$

В пределе, устремляя диаметры ячеек к нулю, получим точное равенство

$$\boxed{I_{XOY} = \int\limits_{(\Phi)} z^2 \cdot \gamma(P)\, d\Phi.} \qquad (6.10)$$

Аналогично вычисляются моменты инерции фигуры, относительно плоскостей XOY и YOZ, осей OX, OY, OZ и момент инерции I_0 относительно начала координат:

$$\boxed{I_{XOZ} = \int\limits_{(\Phi)} y^2 \cdot \gamma(P)\, d\Phi, \qquad I_{YOZ} = \int\limits_{(\Phi)} x^2 \cdot \gamma(P)\, d\Phi;} \tag{6.11}$$

$$\boxed{I_{OX} = \int\limits_{(\Phi)} \left(y^2 + z^2\right) \cdot \gamma(P)\, d\Phi, \quad I_{OY} = \int\limits_{(\Phi)} \left(x^2 + z^2\right) \cdot \gamma(P)\, d\Phi;} \tag{6.12}$$

$$\boxed{I_{OZ} = \int\limits_{(\Phi)} \left(x^2 + y^2\right) \cdot \gamma(P)\, d\Phi, \quad I_0 = \int\limits_{(\Phi)} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \gamma(P)\, d\Phi.} \tag{6.13}$$

Мы ввели понятие интеграла по фигуре, рассмотрели его свойства и применение. Теперь нужно научиться вычислять интегралы по фигуре. Рассмотрим, как вычисляются определенные, криволинейные, двойные, тройные, поверхностные интегралы.

7. Вычисление интегралов по фигуре

7. 1. Определенный интеграл

При введении определенного интеграла мы предполагали, что $a < b$.

При $a > b$ полагают $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$. При $a = b$ полагают $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда она непрерывна, а значит, и интегрируема на любом отрезке $[a,x]$, где $x \in [a,b]$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Каждому x из отрезка $[a,b]$ соответствует определенное число − значение этого интеграла, то есть интеграл является функцией от x, определенной на $[a,b]$. Обозначим эту функцию $\Phi(x)$. Итак,

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = \Phi(x). \tag{7.1}$$

Теорема 7.1. Пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда производная определенного интеграла от этой функции по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на верхнем пределе, то есть

$$\boxed{\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x)}. \tag{7.2}$$

Доказательство. Для вычисления производной функции $\Phi(x)$ придадим x приращение Δx и вычислим приращение функции $\Phi(x)$, воспользовавшись равенством (7.1) и свойством аддитивности интеграла:

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$= \left[\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right] - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

К полученному интегралу применим теорему о среднем:

$\Delta\Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\overline{x})\cdot\Delta x$, где $\overline{x}$ заключено между x и $x+\Delta x$ (рис. 22). Тогда

$$\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \frac{f(\overline{x})\Delta x}{\Delta x} = f(\overline{x}).$$

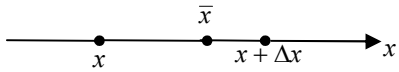

Рис. 22

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, при этом воспользуемся непрерывностью функции $f(x)$ и тем, что $\overline{x} \to x$ при $\Delta x \to 0$ (рис. 22). Тогда

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\overline{x}) = \lim_{\overline{x}\to x} f(\overline{x}) = f(x).$$

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 7.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ − одна из ее первообразных на этом отрезке. Тогда справедлива следующая формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для функции $f(x)$ на $[a,b]$, так как $\Phi'(x) = f(x)$ в силу равенства (7.2). Две первообразные $F(x)$ и $\Phi(x)$ функции $f(x)$ отличаются на константу, то есть $\Phi(x) = F(x) + C$ или

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \quad x \in [a,b]. \tag{7.3}$$

В частности, при $x = a$ равенство (7.3) примет вид:

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C. \tag{7.4}$$

Вычтем из равенства (7.3) равенство (7.4) и учтем, что $\int_a^a f(t)\,dt = 0$. Тогда

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a), \quad x \in [a,b].$$

При $x = b$ это равенство примет вид

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a). \tag{7.5}$$

Разность $F(b)-F(a)$ принято условно записывать в следующем виде:

$$F(b)-F(a)=F(t)\Big|_a^b, \quad \text{или} \quad F(b)-F(a)=\left[F(t)\right]\Big|_a^b.$$

Тогда формула (7.5) примет вид $\int\limits_a^b f(t)\,dt=F(t)\,\big|_a^b=F(b)-F(a)$, или, заменяя t на x, получим формулу Ньютона-Лейбница в виде:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)}. \qquad (7.6)$$

Если вместо произвольной первообразной $F(x)$ записать неопределенный интеграл, то формула Ньютона-Лейбница примет вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\left[\int f(x)\,dx\right]\Big|_a^b. \qquad (7.7)$$

Формула (7.7) дает простой и удобный метод вычисления определенного интеграла от непрерывной функции, используя неопределенный интеграл.

Пример 7.1. Вычислить среднее значение функции $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ на отрезке $[1,e]$.

Решение. Среднее значение функции f_{cp} вычисляется по формуле (6.5):

$$f_{cp}=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{e-1}\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница (7.6) и тем, что $\frac{dx}{x}=d(\ln x)$. Тогда

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}=\int\limits_1^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}}=\arcsin(\ln x)\Big|_1^e=\arcsin(\ln e)-\arcsin(\ln 1)=\arcsin 1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2},$$

$$f_{cp}=\frac{\pi}{2\,(e-1)}.$$

Пример 7.2. Вычислить $\int\limits_0^3 f(x)\,dx$ для функции $f(x)=\begin{cases} e^x, & 0\le x\le 1,\\ 3-x, & 1<x\le 3.\end{cases}$

Решение. Воспользуемся сначала свойством аддитивности интеграла, а затем формулой (7.6). Тогда

$$\int\limits_0^3 f(x)\,dx=\int\limits_0^1 f(x)\,dx+\int\limits_1^3 f(x)\,dx=\int\limits_0^1 e^x dx+\int\limits_1^3 (3-x)\,dx=e^x\Big|_0^1-\frac{(3-x)^2}{2}\Big|_1^3=(e-1)-(0-2)=e+1.$$

Интегрирование по частям

Пусть $u(x), v(x)$ − дифференцируемые функции. Для неопределенного интеграла была получена формула интегрирования по частям

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Воспользуемся этой формулой и формулой (7.7) Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b u\,dv = \left[\int u\,dv\right]\Big|_a^b = \left[uv - \int v\,du\right]\Big|_a^b = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\,.$$

Мы получили формулу интегрирования по частям для определенного интеграла

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}\,. \qquad (7.8)$$

Рекомендации по применению этой формулы такие же, как для неопределенного интеграла.

Пример 7.3. Вычислить интеграл $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

Решение. Положим $u = \ln x,\ dv = x\,dx$. Тогда $du = (\ln x)'\,dx = \frac{1}{x}dx,\ v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$.

Используя формулу (7.7), получим:

$$\int_1^2 x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \left[2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1\right] - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}\,.$$

Интегрирование заменой переменной

Теорема 7.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет условиям:

1) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha,\beta]$ является отрезок $[a,b]$,
2) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$,
3) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$.

Тогда имеет место следующая ***формула замены переменной***

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt}\,. \qquad (7.9)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Тогда

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,, \qquad \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C\,.$$

Последнее равенство следует из правила замены переменной в неопределенном интеграле. Используя формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,, \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Из сравнения этих двух соотношений следует равенство (7.9).

Итак, при замене переменной в определенном интеграле следует

1) заменить переменную x на удачно подобранную функцию $\varphi(t)$;
2) заменить dx на $d\varphi(t)=\varphi'(t)\,d\,t$;
3) заменить отрезок $[a,b]$ изменения переменной x на отрезок $[\alpha,\beta]$ изменения переменной t, найдя α и β из условий $\varphi(\alpha)=a,\ \ \varphi(\beta)=b$;
4) вычислить получившийся определенный интеграл.

Отметим, что при вычислении определенного интеграла по формуле (7.9) не надо возвращаться к старой переменной, как это приходилось делать при замене переменной в неопределенном интеграле. Рекомендации по выбору новой переменной такие же, как и для неопределенного интеграла.

Пример 7.4. Вычислить интеграл $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,d\,x$.

Решение. Введем новую переменную t, положив $\sqrt{x}=t$. Тогда $x=t^2,\ dx=2\,t\,d\,t$. Найдем пределы изменения новой переменной $t=\sqrt{x}$: при $x=4$ имеем $t=2$; при $x=9$ имеем $t=3$. Поэтому, в соответствии с формулой (7.9)

$$\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx=\int\limits_2^3 \frac{t\cdot 2\,t\,d\,t}{t-1}=2\int\limits_2^3 \frac{(t^2-1)+1}{t-1}d\,t=2\int\limits_2^3\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)d\,t=2\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln\left(t-1\right)\right)\Bigg|_2^3=7+2\ln 2.$$

Пример 7.5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. Чтобы исчез корень под знаком интеграла, положим $x=2\sin t$. Тогда $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\cos t$. Найдем $dx=2\cos t\,dt$ и пределы изменения новой переменной: при $x=0$ имеем $\sin t=0$, $t=0$; при $x=1$ имеем $\sin t=\frac{1}{2}$, $t=\pi/6$.

Тогда $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1+\cos 2t\right)dt=2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

С помощью замены переменной выведем ряд полезных следствий.

Следствие 1. Если функция $f\left(x\right)$ – нечетная на отрезке $[-a,a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

Действительно, имеем: $I=\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx=I_1+I_2$.

В интеграле I_1 сделаем замену переменной $x=-t$. Тогда $dx=-dt$ и, в силу нечетности функции, $f\left(x\right)=f\left(-t\right)=-f\left(t\right)$. При $x=-a$ имеем $t=a$; при $x=0$ имеем $t=0$.

Поэтому $I_1=\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{0} f(t)\,dt=-\int\limits_{0}^{a} f(t)\,dt=-I_2$, $\qquad I=I_1+I_2=0$.

Следствие 2. Если функция $f\left(x\right)$ – четная на $[-a,a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Эта формула выводится так же, как предыдущая.

Пример 7.6. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{x^7-3x^5+2x^3-x+4}{\cos^2 x}dx$.

Решение. Функция $\frac{x^7-3x^5+2x^3-x}{\cos^2 x}$ является нечетной, так как числитель есть функция нечетная, а знаменатель – функция четная. Поэтому интеграл от этой функции по промежутку $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ равен нулю. Функция $\frac{4}{\cos^2 x}$ является четной, поэтому $I=\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{4\,dx}{\cos^2 x}=2\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{4\,dx}{\cos^2 x}=8\,\mathrm{tg}\,x\Big|_0^{\pi/4}=8$.

Следствие 3. Пусть функция $f(x)$ имеет период T. Тогда $\int\limits_{a}^{a+T}f(x)\,dx=\int\limits_{0}^{T}f(x)\,dx$ для любого числа a.

Для вывода этой формулы воспользуемся свойством аддитивности интеграла

$$\int\limits_{a}^{a+T}f(x)\,dx=\int\limits_{a}^{0}f(x)\,dx+\int\limits_{0}^{T}f(x)\,dx+\int\limits_{T}^{a+T}f(x)\,dx=I_1+I_2+I_3.$$

В интеграле I_3 сделаем замену $x=y+T$. Тогда $dx=dy$, а в силу периодичности функции $f(x)=f(y+T)=f(y)$. При $x=T$ имеем $y=0$; при $x=a+T$ имеем $y=a$.

Поэтому $I_3=\int\limits_{T}^{a+T}f(x)\,dx=\int\limits_{0}^{a}f(y)\,dy=\int\limits_{0}^{a}f(x)\,dx=-\int\limits_{a}^{0}f(x)\,dx=-I_1 \quad\Rightarrow\quad I_1+I_3=0$,

$$\int\limits_{a}^{a+T}f(x)\,dx=I_1+I_2+I_3=I_2=\int\limits_{0}^{T}f(x)\,dx.$$

Пример 7.7. Вычислить $\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^5 x\,dx$.

Решение. Функция $\sin^5 x$ имеет период 2π, равный длине промежутка интегрирования. Используя следствие 3, сдвинем промежуток интегрирования вдоль оси OX на $-\pi$ и, так как функция $\sin^5 x$ − нечетная, воспользуемся следствием 1. Поэтому $\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^5 x\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sin^5 x}_{\text{нечетная}}\,dx=0$.

Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры

Пусть фигура в плоскости XOY ограничена линиями $y=y(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$, причем $y(x)$ – непрерывная неотрицательная функция на $[a,b]$ (рис. 23). Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частичных отрезков с длинами $\Delta x_1, \Delta x_2,\ldots,\Delta x_n$. Через точки деления проведем вертикальные прямые, которые разделят фигуру на n

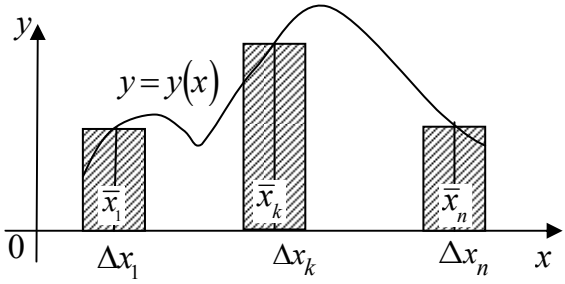

Рис. 23

вертикальных полосок. Каждую k-ю вертикальную полоску заменим прямоугольником с основанием, равным Δx_k, и высотой, равной $y(\overline{x}_k)$, где $\overline{x}_k$ – произвольно выбранная точка на k-м частичном отрезке. Площадь такого прямоугольника

$$\Delta S_k = y(\overline{x}_k)\cdot \Delta x_k \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

Суммируя площади всех прямоугольников, получим $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum\limits_{k=1}^{n} y(\overline{x}_k)\cdot \Delta x_k.$

Площадь S заданной фигуры определяется как предел полученной суммы $S = \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} y(\overline{x}_k)\cdot \Delta x_k$ при стремлении к нулю $d = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$. Мы получили предел интегральной суммы непрерывной функции $y(x)$ по отрезку $[a,b]$, то есть интеграл $\int\limits_a^b y(x)\,dx$. Таким образом, площадь фигуры, ограниченной линиями $y = y(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, при условии, что $y(x) \ge 0$, вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \int\limits_a^b y(x)\,dx \quad \text{или} \quad S = \int\limits_a^b y\,dx\,.} \qquad (7.10)$$

Пример 7.8. Вычислить интеграл $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

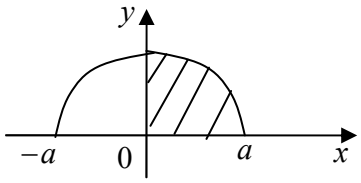

Рис. 24

Решение. Интеграл такого типа был вычислен заменой переменной $x = a\cdot \sin t$ в примере 7.5. Рассмотрим другой способ. Исходя из формулы (7.10), интеграл $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ численно равен площади фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = a$. Построим эти линии, учитывая, что уравнение $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ определяет ту часть окружности $x^2 + y^2 = a^2$, где $y \ge 0$ (рис. 24). Полученная фигура есть четверть круга с площадью $S = \dfrac{\pi\cdot a^2}{4}$. Таким образом, $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \dfrac{\pi\cdot a^2}{4}$.

Перейдем к более общему случаю. Пусть фигура в плоскости XOY ограничена линиями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причем $y_2(x) \ge y_1(x)$ на $[a,b]$ (рис. 25).

Как и в предыдущем случае, можно получить следующую формулу для площади S такой фигуры:

$$\boxed{S=\int_a^b \left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx.} \qquad (7.11)$$

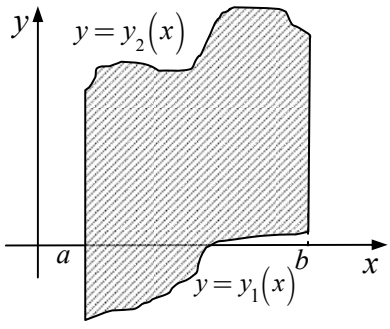

Рис. 25

Иногда вычисления значительно упрощаются, если поменять ролями оси OX и OY. Пусть фигура в плоскости XOY ограничена линиями $x=x_1(y)$, $x=x_2(y)$, $y=c$, $y=d$, причем $x_2(y)\ge x_1(y)$ на отрезке $[c,d]$ (рис. 26). Тогда

$$\boxed{S=\int_c^d \left[x_2(y)-x_1(y)\right]dy.} \qquad (7.12)$$

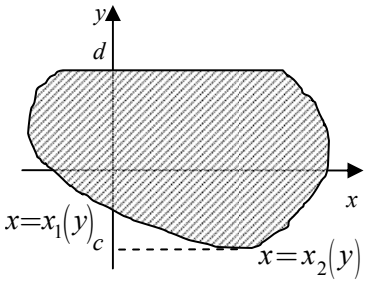

Рис. 26

Пример 7.9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=-1$.

Решение. Построим заданные линии и заштрихуем фигуру, ограниченную этими линиями (рис. 27). Снизу фигура ограничена линией $y=e^x=y_1(x)$, сверху – линией $y=e^{-x}=y_2(x)$, $x\in[-1,\,0]$. Для вычисления площади фигуры воспользуемся формулой (7.11):

$$S=\int_{-1}^{0}\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx=\int_{-1}^{0}\left(e^{-x}-e^{x}\right)dx=\left(-e^{-x}-e^{x}\right)\Big|_{-1}^{0}=e+e^{-1}-2.$$

Пример 7.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2=2x+1,\quad y=x-1.$$

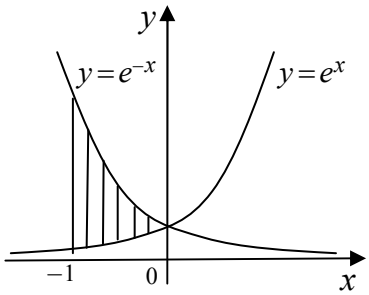

Рис. 27

Решение. Уравнение $y^2=2x+1$ или $y^2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$ определяет параболу с вершиной $A\left(\frac{-1}{2},0\right)$, осью симметрии − осью OX (рис. 28). Уравнение $y=x-1$ определяет прямую, проходящую через точки $(0;-1)$, $(1;0)$. Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений: $y^2=2x+1$, $y=x-1$. Получим точку $B(0;-1)$ и точку $C(4;3)$.

Вычислим площадь фигуры по формуле (7.12). Для этого нужно записать уравнения кривых, ограничивающих фигуру, в виде, разрешенном относительно x. Слева фигура ограничена дугой параболы *CAB,* на которой $x=\frac{y^2-1}{2}$, справа – отрезком прямой *BC*, на котором $x=y+1$; y меняется от $y_B=-1$ до $y_C=3$. Поэтому по формуле (7.12) имеем

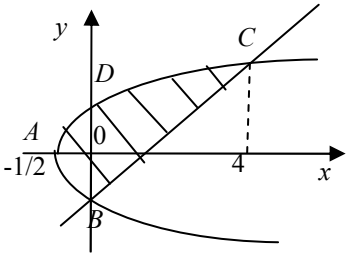

Рис. 28

$$S=\int_{-1}^{3}\left[(y+1)-\frac{y^2-1}{2}\right]dy=\frac{(y+1)^2}{2}\Big|_{-1}^{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}-y\right)\Big|_{-1}^{3}=\frac{16}{3}\approx 5{,}33.$$

Объем тела вращения

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной непрерывной кривой $y = y(x)$, осью OX и прямыми $x = a,\ x = b$ (рис. 29). Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$ Проведем через точки деления плоскости, перпендикулярные оси OX. Сечение тела вращения плоскостью $x = x_k$ есть круг радиусом $y(x_k)$ с площадью $\pi \cdot y^2(x_k)$ $(k = 1, 2, ..n)$. Проведенные плоскости разобьют тело на слои. Каждый k-й слой

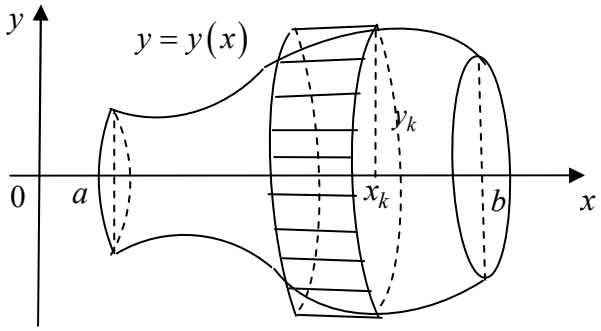

Рис.29

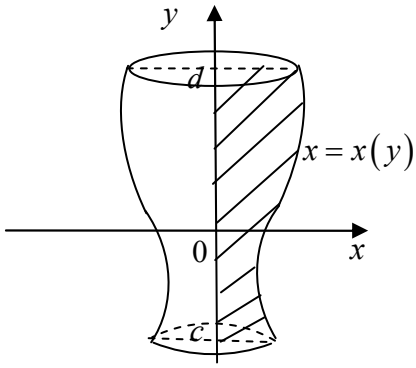

Рис.30

приближенно заменим прямым цилиндром (рис. 29) с радиусом $y(x_k)$, высотой $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и объемом $\Delta V_k = S \cdot h = \pi \cdot y^2(x_k) \cdot \Delta x_k$ $(k = 1, 2, ...n)$.

Сумма объемов всех цилиндров равна $\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot y^2(x_k) \cdot \Delta x_k$.

Объем тела вращения V_{ox} определяется как предел этой суммы

$$V_{OX} = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot y^2(x_k) \cdot \Delta x_k$$

при стремлении к нулю величины $d = \max_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\}$. Мы получили предел интегральной суммы непрерывной функции $\pi \cdot y^2(x)$ по отрезку $[a, b]$, который существует и равен интегралу $\int_a^b \pi \cdot y^2(x)\, dx.$

Итак, объем V_{OX} тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривой $y = y(x)$, осью OX и прямыми $x = a,\ x = b$, вычисляется по формуле

$$\boxed{V_{OX} = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx, \quad \text{или} \quad V_{OX} = \pi \int_a^b y^2 dx}. \qquad (7.13)$$

Аналогично вычисляется объем V_{OY} тела, полученного при вращении вокруг оси OY фигуры, ограниченной линией $x = x(y)$, осью OY, прямыми $y = c,\ y = d$ (рис. 30):

$$\boxed{V_{OY} = \pi \int_c^d x^2(y)\, dy, \quad \text{или} \quad V_{OY} = \pi \int_c^d x^2 dy}. \qquad (7.14)$$

Пример 7.11. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1,\ x = -1,\ x = 1,\ y = 0$,

а) вокруг оси OX, б) вокруг оси OY.

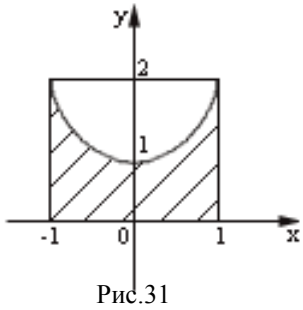

Рис.31

Решение. Построим параболу $y = x^2 + 1$, прямые $x = -1,\ x = 1,\ y = 0$ и заштрихуем фигуру, ограниченную этими линиями (рис. 31).

а). Объем тела, полученного при вращении этой фигуры вокруг оси OX, вычислим по формуле (7.13):

$$V_{OX} = \pi \int_{-1}^{1} y^2\, dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^2+1)^2\, dx.$$

Подынтегральная функция − четная, поэтому используем следствие 2 к теореме 7.3

$$V_{OX} = 2\pi \int_{0}^{1} (x^2+1)^2 dx = 2\pi \int_{0}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1)\, dx = \frac{56}{15}\pi.$$

б). Для вычисления объема тела вращения фигуры вокруг оси OY нельзя непосредственно воспользоваться формулой (7.14), так как фигура сверху ограничена не прямой, а параболой. Поэтому сначала рассмотрим фигуру, ограниченную прямой $x = 1$, осью OY, прямыми $y = 0,\ y = 2$. При ее вращении вокруг оси OY получим цилиндр, объем которого V_1 можно вычислить по формуле $V_1 = \pi R^2 H = 2\pi$ или по формуле (7.14) $V_1 = \pi \int_0^2 x^2\, dy = \pi \int_0^2 dy = 2\pi.$

Теперь рассмотрим фигуру, ограниченную линиями $y = x^2 + 1$, осью OY и прямой $y = 2$. При ее вращении вокруг оси OY получим тело, объем которого V_2 вычислим по формуле (7.14): $V_2 = \pi \int_1^2 x^2 dy = \pi \int_1^2 (y-1)\, dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - y\right)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}.$

Тогда искомый объем V_{OY} будет равен $V_{OY} = V_1 - V_2 = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$

7.2. Криволинейный интеграл первого рода

Случай 1. Пусть на плоскости дуга AB задана уравнением $y = y(x),\ x \in [a,b].$ Будем предполагать, что функция $y(x)$ непрерывна вместе со своей производной на $[a,b]$.

Рассмотрим на кривой точки $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_n = B$ с абсциссами $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b.$ Проведем хорды $AM_1, M_1M_2, ..., M_{n-1}B,$ длины которых обозначим $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$ (рис. 32).

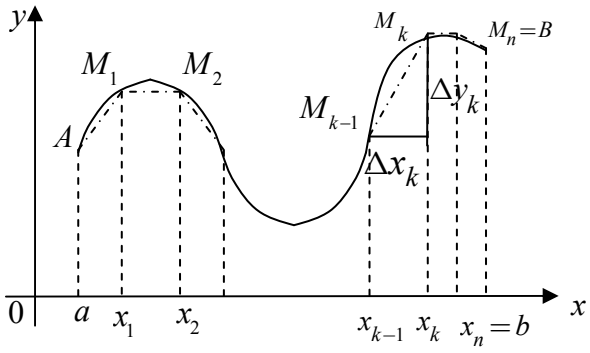

Рис. 32

Вычислим длину k-й хорды $\Delta l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Для вычисления приращения Δy_k воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа

$$\Delta y_k = y(x_k) - y(x_{k-1}) = y'(\overline{x}_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = y'(\overline{x}_k)\Delta x_k,$$

где $\overline{x}_k$ – некоторая точка из промежутка (x_{k-1}, x_k). Тогда длина k – й хорды

$$\Delta l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [y'(\overline{x}_k)]^2 \cdot (\Delta x_k)^2} = \sqrt{1 + y'^2(\overline{x}_k)} \cdot \Delta x_k .$$

Учтем это и возьмем в определении криволинейного интеграла в качестве промежуточных точек на дугах $M_{k-1}M_k$ точки $\left(\overline{x}_k, y(\overline{x}_k)\right)$:

$$\int\limits_{\cup AB} f(x,y)\,dl = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta l_k = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x}_k, y(\overline{x}_k)\right) \cdot \sqrt{1 + y'^2(\overline{x}_k)} \cdot \Delta x_k .$$

Мы получили предел интегральной суммы функции $f\left(x, y(x)\right) \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}$ по отрезку $[a,b]$, который равен интегралу $\int\limits_a^b f\left(x, y(x)\right) \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx$. Следовательно,

$$\boxed{\int\limits_{\cup AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f\left(x, y(x)\right) \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx.} \qquad (7.15)$$

Итак, для вычисления криволинейного интеграла $\int\limits_{\cup AB} f(x,y)\,dl$ по дуге AB с уравнением $y = y(x)$, $x \in [a,b]$ нужно:

1) заменить y в подынтегральной функции на его значение $y(x)$ на дуге;
2) заменить dl на $\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx$;
3) вычислить получившийся определенный интеграл по отрезку $[a,b]$.

Иногда удобнее использовать уравнение кривой в виде $x = x(y)$, $y \in [c,d]$. Тогда

$$\boxed{\int\limits_{\cup AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_c^d f\left(x(y), y\right) \cdot \sqrt{1 + \left(x'(y)\right)^2}\, dx.} \qquad (7.16)$$

Пример 7.12. Вычислить длину дуги кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $y \in [1, e]$.

Решение. Уравнение кривой разрешено относительно x, поэтому воспользуемся формулой (7.16), учитывая, что $x'_y = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y} = \frac{y^2 - 1}{2y}$,

$$\sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{(y^2-1)^2}{4y^2}} = \sqrt{\frac{4y^2 + y^4 - 2y^2 + 1}{4y^2}} = \sqrt{\frac{\left(y^2+1\right)^2}{4y^2}} = \frac{y^2+1}{2y}.$$

Тогда $l = \int\limits_{(l)} dl = \int\limits_1^e \sqrt{1 + \left(x'_y\right)^2}\, dy = \int\limits_1^e \frac{y^2+1}{2y}\, dy = \frac{1}{2}\int\limits_1^e \left(y + \frac{1}{y}\right) dy = \frac{e^2+1}{4}.$

Случай 2. Пусть на плоскости дуга AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta],$$

причем функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ вместе со своими производными и $x'(t) \neq 0$.

Для определенности, пусть $x'(t)>0$. Уравнения $x=x(t),\ y=y(t)$ определяют функцию $y(x)$, которая имеет непрерывную производную y'_x. Учитывая, что $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$, $dx=x'_t\,dt$, получим $d\,l=\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx=\sqrt{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\cdot x'_t\,dt=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$.

Итак, справедливы следующие формулы $\boxed{d\,l=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,d\,t}$ и

$$\boxed{\int\limits_{\cup AB} f(x,y)\,d\,l=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{x_t'^{\,2}+y_t'^{\,2}}\;d\,t.} \qquad (7.17)$$

Аналогично, для ***пространственной*** кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ \alpha\le t\le\beta$, имеем

$$\boxed{d\,l=\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}\,d\,t,}$$

$$\boxed{\int\limits_{\cup AB} f(x,y,z)\,d\,l=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{x_t'^{\,2}+y_t'^{\,2}+z_t'^{\,2}}\;d\,t.}$$

Пример 7.13. Найти массу верхней полуокружности радиуса R, если плотность γ в каждой её точке равна ординате этой точки.

Решение. Масса кривой вычисляется с помощью криволинейного интеграла:

$$m=\int\limits_{(L)}\gamma\cdot d\,l=\int\limits_{(L)} y\cdot d\,l.$$

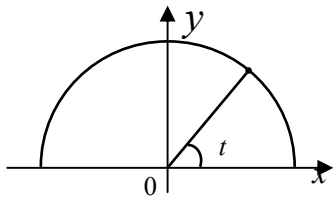

Рис. 33

Для вычисления интеграла запишем параметрические уравнения окружности: $x=R\cdot\cos t,\quad y=R\cdot\sin t$.
Параметр t есть угол между радиус-вектором точки окружности и осью OX (рис. 33). Для верхней полуокружности параметр t меняется от 0 до π. Теперь вычислим $d\,l$:

$$d\,l=\sqrt{x_t'^{\,2}+y_t'^{\,2}}\,dt=\sqrt{(-R\cdot\sin t)^2+(R\cdot\cos t)^2}\,dt=R\,dt.$$

Подставим в искомый интеграл $\int\limits_{(L)} y\cdot d\,l$ выражения для $y,\ d\,l$, расставим пределы изменения t и вычислим получившийся определенный интеграл:

$$m=\int\limits_0^{\pi} R\sin t\cdot R\,dt=R^2\int\limits_0^{\pi}\sin t\,dt=-R^2\cos t\,\Big|_0^{\pi}=2\,R^2.$$

7.3. Двойной интеграл в прямоугольной системе

Вычисление двойного интеграла $\int\limits_{(S)} f(P)dS=\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$ сводится к вычислению двух определенных интегралов. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть область (S) в плоскости XOY ограничена линиями $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x=a$, $x=b$ (рис. 34). Тогда

$$\boxed{\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.} \qquad (7.18)$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (7.18), называют повторным или двукратным. В повторном интеграле сначала следует вычислить внутренний интеграл при фиксированном x. В результате получим функцию, зависящую от переменной x: $F(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$. Затем вычислим внешний интеграл от функции $F(x)$.

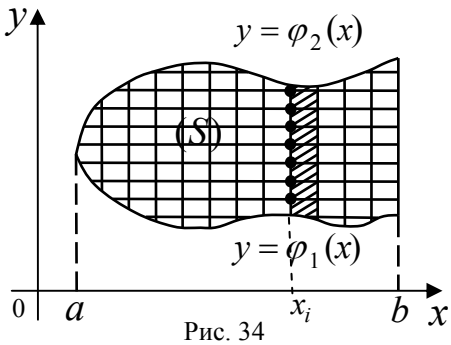

Рис. 34

Дадим нестрогое (физическое) обоснование формулы (7.18) для случая неотрицательной подынтегральной функции $f(x,y)$. Как было установлено ранее, двойной интеграл $\iint\limits_{(S)} f(x,y)dxdy$ равен массе пластины (S) с плотностью $f(x,y)$. Покажем, что повторный интеграл, стоящий в правой части равенства (7.18), также равен массе пластины (S). Для этого разобьём фигуру (S) на ячейки прямыми, параллельными осям координат (рис. 34). Выделим $i-$ю вертикальную полоску. В каждой её ячейке выберем точку $(x_i,\,y_k)$ так, чтобы все выбранные точки лежали на одной вертикали (рис. 34). Вычислим плотность $f(x_i,\,y_k)$ в выбранной точке и массу прямоугольной ячейки

$$m_{\text{яч.}}=\Delta m_{ik}\approx f(x_i,\,y_k)\Delta x_i\,\Delta y_k\ .$$

Подсчитаем массу $i-$й вертикальной полоски m_i, просуммировав массы ячеек $\Delta m_{i1},\ \Delta m_{i2},\ ...,\ \Delta m_{in}$ и вынеся за знак суммы общий множитель Δx_i:

$$m_i\approx\left(\sum_k f\,(x_i,y_k)\Delta y_k\right)\Delta x_i\,.$$

Так как выбранные точки лежат на одной вертикали, то они имеют одинаковую абсциссу x_i. Значит x_i – фиксировано в сумме $\sum\limits_k f\,(x_i,y_k)\Delta y_k$, и эта сумма является интегральной суммой для функции $f(x_i,y)$ по переменной y, изменяющейся на отрезке $\left[\,\varphi_1(x_i),\,\varphi_2(x_i)\right]$ (рис. 34). При малых значениях Δy_k интегральная сумма функции близка к интегралу от этой функции, т.е.

$$\sum_k f(x_i,y_k)\Delta y_k\approx\int\limits_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} f(x_i,y)\,dy.$$

Интеграл, стоящий в правой части этого приближенного равенства, является значением выше введенной функции $F(x)$ в точке x_i. Поэтому для массы вертикальной полоски имеем

$$m_i \approx F(x_i)\,\Delta x_i\,.$$

Суммируя массы вертикальных полосок, получим значение массы пластины

$$m \approx \sum_i F(x_i)\,\Delta x_i\,.$$

Сумма $\sum_i F(x_i)\Delta x_i$ является интегральной суммой функции $F(x)$ по переменной x, изменяющейся на отрезке $[a,b]$. При $\max\{\Delta x_i\} \to 0$ эта интегральная сумма стремится к интегралу $\int_a^b F(x)dx$. Подставляя выражение $F(x)$ через интеграл, получим

$$m = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,.$$

Таким образом, масса пластины, с одной стороны, равна двойному интегралу из формулы (7.18), с другой стороны, равна двукратному интегралу из той же формулы. Следовательно, эти интегралы равны между собой.

Чтобы успешно пользоваться на практике формулой (7.18), рекомендуем:

1) построить область интегрирования;
2) записать двойной интеграл через повторный; в повторном интеграле <u>сначала</u> расставить <u>внутренние</u> пределы интегрирования, т.е. пределы изменения y. Для этого на чертеже (рис. 34) нужно двигаться параллельно оси OY. При этом мы войдем в фигуру через линию, на которой $y = \varphi_1(x)$, а выйдем через линию, на которой $y = \varphi_2(x)$, т.е. переменная интегрирования y меняется от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$;
3) проецируя область (S) на ось OX, расставить <u>внешние</u> пределы интегрирования (это всегда – <u>числа</u>, а не функции);
4) вычислить внутренний интеграл при постоянном x, затем – внешний интеграл.

Случай 2. Пусть область (S) в плоскости XOY (рис. 35) ограничена линиями $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, $y = c$, $y = d$. Тогда

$$\boxed{\iint_{(S)} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx.} \qquad (7.19)$$

Чтобы пользоваться формулой (7.19), рекомендуем:

1) построить область интегрирования;
2) записать двойной интеграл через повторный; в повторном интеграле <u>сначала</u> расставить <u>внутренние</u> пределы интегрирования, т.е. пределы изменения x. Для этого на чертеже (рис. 35) нужно двигаться параллельно оси OX. При этом войдем в фигуру через линию $x = g_1(y)$, а выйдем через линию $x = g_2(y)$, т.е. переменная интегрирования y меняется от $g_1(y)$ до $g_2(y)$;
3) проецируя область (S) на ось OY, расставить <u>внешние</u> пределы интегрирования;
4) вычислить внутренний интеграл при постоянном y, затем – внешний интеграл.

Пример 7.14. Вычислить момент инерции относительно оси OY плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2$, $y = 3 - x^2$, если плотность $\gamma = 1$.

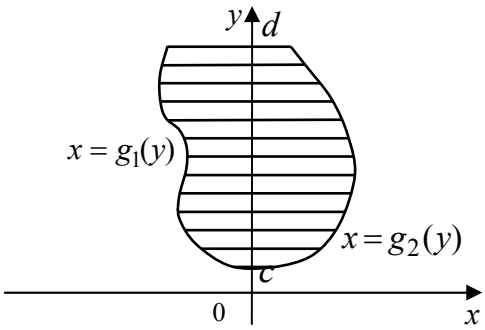

Рис. 35

Решение. Момент инерции плоской фигуры вычисляется с помощью двойного интеграла по формуле (6.12) при $z = 0$:

$$I_{OY} = \int\limits_{(S)} x^2 \gamma dS = \iint\limits_{(S)} x^2 dxdy .$$

Чтобы вычислить двойной интеграл, построим область (S) (рис. 36). Найдем точки пересечения A и B линий $y = 2x^2$, $y = 3 - x^2$. Получим $x = \pm 1$, $y = 2$. Таким образом, фигура (S) ограничена снизу линией $y = 2x^2$, сверху – линией $y = 3 - x^2$, $x \in [-1,1]$. Поэтому по формуле (7.18)

$$I_{OY} = \iint\limits_{(S)} x^2\, dxdy = \int\limits_{-1}^{1} x^2 dx \int\limits_{2x^2}^{3-x^2} dy = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \left(y \Big|_{2x^2}^{3-x^2} \right) dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \left(3 - 3x^2 \right) dx.$$

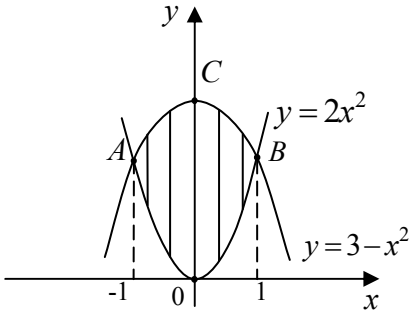

Рис. 36

Так как подынтегральная функция четная, то интеграл от неё по промежутку $[-1,1]$ равен удвоенному интегралу по промежутку $[0,1]$. Поэтому

$$I_{OY} = 2 \cdot 3 \int\limits_0^1 (x^2 - x^4)\, dx = 6 \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{4}{5} .$$

Пример 7.15. Найти массу плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x + y = 2$, $y = 0$, если плотность $\gamma = y$.

Решение. Построим фигуру (рис. 37). Линия $y = \sqrt{x}$ есть верхняя половина параболы $y^2 = x$, линия $x + y = 2$ – прямая. Фигура ограничена сверху двумя линиями $y = \sqrt{x}$ и $x + y = 2$. Поэтому использовать формулу (7.18) нерационально: придется разбить область на две части (S_1) и (S_2), а интеграл – на сумму двух интегралов.

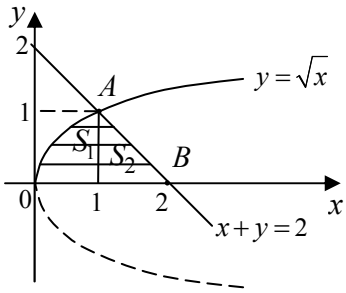

Рис. 37

Удобнее воспользоваться формулой (7.19); учитывая, что слева область ограничена дугой OA, на которой $x = y^2$, а справа — отрезком AB, на котором $x = 2 - y$, имеем:

$$m = \int\limits_{(s)} \gamma dS = \iint\limits_{(S)} y\, dxdy = \int\limits_0^1 y\, dy \int\limits_{y^2}^{2-y} dx = \int\limits_0^1 y \left(2 - y - y^2 \right) dy = \int\limits_0^1 \left(2y - y^2 - y^3 \right) dy = \frac{5}{12}.$$

Для сравнения запишем двойной интеграл по формуле (7.18):

$$m = \iint\limits_{(S)} \gamma dS = \iint\limits_{(S_1)} y\, dxdy + \iint\limits_{(S_2)} y\, dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} y\, dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} y\, dy .$$

Результат будет тот же, но объём вычислений – больше, так как придется вычислить два интеграла вместо одного.

7.4. Двойной интеграл в криволинейной системе

Для вычисления двойного интеграла иногда удобно использовать не прямоугольные координаты (x, y), а некоторые другие координаты (u, v), которые часто называют криволинейными. Пусть известна связь между прямоугольными и криволинейными координатами

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v) \text{ или в векторном виде } \vec{r} = \vec{r}(u,v).$$

Будем предполагать, что якобиан $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ отличен от нуля.

Введем понятие координатных линий l_u, l_v.

Координатная линия l_u – это множество точек плоскости, у которых координата u меняется, а координата v фиксирована, $v = v_0$; при этом $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ есть векторно-параметрическое уравнение линии l_u; вектор $\vec{r}_u{}'(u_0, v_0)$ есть касательный вектор к линии l_u (рис. 38).

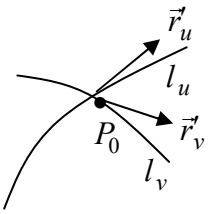

Рис. 38

Координатная линия l_v – это множество точек плоскости, у которых координата v меняется, а координата u фиксирована, $u = u_0$; при этом $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ есть векторно-параметрическое уравнение линии l_v; вектор $\vec{r}_v{}'(u_0, v_0)$ является касательным вектором к линии l_v (рис. 38).

По определению, двойной интеграл функции $f(P)$ по плоской области (S) есть предел интегральной суммы функции $f(P)$ по области (S), который не зависит от способа разбиения области (S) на ячейки:

$$\int\limits_{(S)} f(P)\,dS = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k) \cdot \Delta S_k .$$

При использовании криволинейных координат (u, v) удобно разбить область (S) на ячейки координатными линиями l_u, l_v. Выделим одну из таких ячеек (рис. 39). Рассмотрим радиус-векторы точек P, P_1, P_2 и векторы $\overrightarrow{PP_1}$, $\overrightarrow{PP_2}$

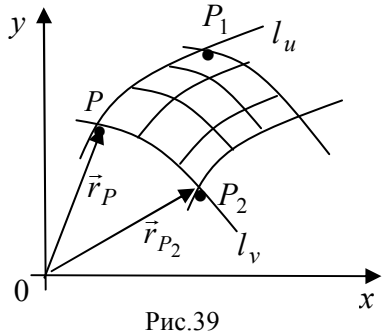

Рис.39

$$\vec{r}_P = \vec{r}(u,v),\ \vec{r}_{P_1} = \vec{r}(u + \Delta u, v),\ \vec{r}_{P_2} = \vec{r}(u, v + \Delta v),$$

$$\overrightarrow{PP_1} = \vec{r}_{P_1} - \vec{r}_P = \vec{r}(u + \Delta u, v) - \vec{r}(u,v) = \Delta_u \vec{r} \approx \vec{r}_u{}' \cdot \Delta u,$$

$$\overrightarrow{PP_2} = \vec{r}_{P_2} - \vec{r}_P = \vec{r}(u, v + \Delta v) - \vec{r}(u,v) = \Delta_v \vec{r} \approx \vec{r}_v{}' \cdot \Delta v,$$

и площадь ячейки $\Delta S \approx \left| \overrightarrow{PP_1} \times \overrightarrow{PP_2} \right| \approx \left| \vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' \right| \Delta u\, \Delta v.$

Так как $\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & 0 \\ x'_v & y'_v & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \vec{k}\, \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$, то $\Delta S \approx \left| \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \Delta u\, \Delta v.$

Введем так называемый ***элемент площади в криволинейных координатах***

$$\boxed{d\,S = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv} \qquad (7.20)$$

Можно показать (строгое доказательство опускаем), что

$$\boxed{\iint\limits_{(S)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S^*)} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv.} \qquad (7.21)$$

Итак, получили следующее правило:

Для вычисления двойного интеграла $\int\limits_{(S)} f(P)\,dS = \int\limits_{(S)} f(x,y)\,dS$ следует

1) заменить x, y, dS на их выражения в криволинейной системе координат:

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\quad d\,S = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv\ ;$$

2) заменить область (S) изменения переменных (x,y) на область (S^*) изменения переменных (u,v).

Замечание. Иногда удобнее вычислить не якобиан $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = I$, а якобиан $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = I_1$.

Можно показать, что $I = \frac{1}{I_1}$ (по аналогии с производной обратной функции $x'_y = \frac{1}{y'_x}$).

Пример 7.16. Найти массу пластины, ограниченной линиями $y^2 = x,\ y^2 = 3x,$ $x^2 = y,\ x^2 = 2y,$ если плотность $\gamma = x\,y$.

Решение. Массу пластины вычислим по формуле $m = \iint\limits_{(S)} \gamma\,dS$.

В этой формуле фигура (S) есть криволинейный четырехугольник $ABCD$ (рис. 40), ограниченный параболами $y^2 = x,\ y^2 = 3x$ с осью симметрии OX и параболами $x^2 = y,\ x^2 = 2y$ с осью симметрии OY. Вычисление массы фигуры (S) в прямоугольных координатах громоздко: нужно найти точки пересечения парабол, разбить фигуру (S) на три части и вычислить три интеграла. Удобнее ввести криволинейные координаты $u = \frac{y^2}{x}$, $v = \frac{x^2}{y}$ (учитывая, что на границе области они постоянны: $u = 1,\ u = 3,\ v = 1,\ v = 2$) и вычислить якобиан

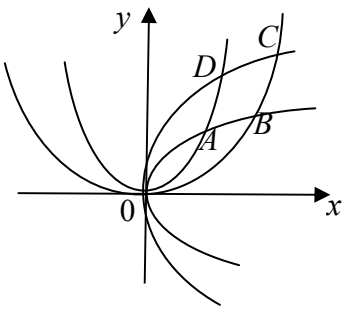

Рис. 40

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & \frac{-x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3.\ \text{ Тогда } \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{3},\ \ dS = \frac{1}{3}du\,dv,\ \ \gamma = x\,y = u\,v;$$

$$m = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S^*)} uv\,du\,dv = \frac{1}{3}\int\limits_1^3 u\,du\int\limits_1^2 v\,dv = 2.$$

Двойной интеграл в полярных координатах

Двойной интеграл в некоторых случаях, например, когда область интегрирования есть круг, сектор или ограничена линией, уравнение которой содержит x^2+y^2, удобнее и проще вычислять в полярной системе координат.

Вспомним некоторые сведения о полярной системе координат. Полярная система состоит из полярной оси с началом в полюсе 0. Положение точки P на плоскости характеризуется двумя полярными координатами ρ и φ, где ρ – длина радиус-вектора точки P, φ – угол наклона радиус-вектора к полярной оси (рис. 41). Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рис. 41. Тогда между прямоугольными координатами (x,y) точки P и её полярными координатами (ρ,φ) существует следующая связь:

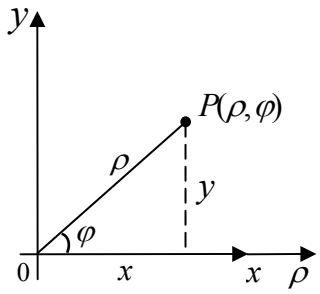

Рис. 41

$$\boxed{x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad x^2+y^2=\rho^2.}$$

Вычислим якобиан

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}=\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi=\rho.$$

Тогда из формул (7.20), (7.21) получим

$$\boxed{dS=\rho\,d\rho\,d\varphi,\quad \int\limits_{(S)} f(P)\,dS=\iint\limits_{(S)} f(\rho,\varphi)\,\rho\;d\rho\,d\varphi}. \qquad (7.22)$$

Пусть область (S) заключена (рис. 42) между лучом OA с уравнением $\varphi=\alpha$ и лучом OB с уравнением $\varphi=\beta$ и ограничена дугой A_1B_1 с уравнением $\rho=\rho_1(\varphi)$ и дугой AB с уравнением $\rho=\rho_2(\varphi)$. Тогда имеет место формула

$$\boxed{\int\limits_{(S)} f(P)\,dS=\iint\limits_{(S)} f(\rho,\varphi)\,\rho\;d\rho\,d\varphi=\int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho\,.} \qquad (7.23)$$

Чтобы применять на практике формулу (7.23), рекомендуем:

1) построить область интегрирования;

2) в двойном интеграле $\int\limits_{(S)} f(P)\,dS=\int\limits_{(S)} f(x,y)\,dS$ заменить x, y, dS, на их выражения в полярной системе координат, т.е. $dS=\rho\,d\rho\,d\varphi$, $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $x^2+y^2=\rho^2$;

3) записать получившийся двойной интеграл через повторный по формуле (7.23); в повторном интеграле <u>сначала</u> расставить <u>внутренние</u> пределы интегрирования, т.е. пределы изменения ρ. Для этого надо двигаться <u>по лучу</u>, выходящему из полюса (рис. 42); на нем ρ меняется от $\rho_1(\varphi)$ до $\rho_2(\varphi)$;

4) расставить <u>внешние</u> пределы интегрирования, определив лучи $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$, между которыми заключена фигура (внешние пределы всегда <u>числа</u>, а не функции);

5) вычислить внутренний интеграл при постоянном φ, затем – внешний интеграл.

Замечания

1). Полярной системой координат удобно пользоваться, если область интегрирования ограничена окружностью или линией $\rho = \rho(\varphi)$, или линией, уравнение которой содержит $x^2 + y^2$.

2). Если уравнение линии, ограничивающей область, или подынтегральная функция содержат $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, то удобно перейти к обобщенным полярным координатам

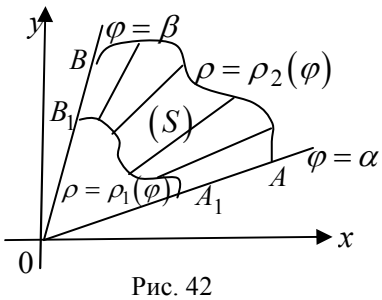

Рис. 42

$$\boxed{x = a \cdot \rho\cos\varphi, \quad y = b \cdot \rho\sin\varphi \text{ ; тогда } dS = ab \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi.}$$

Пример 7.17. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{ab}$.

Решение. Сначала построим линию, исследуя её уравнение. Выражение $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2$ неотрицательно, значит, и $2xy$ неотрицательно, т.е. линия находится в первой и третьей четвертях. Уравнение линии не изменится при замене x на $(-x)$ и y на $(-y)$. Значит, эта линия симметрична относительно начала координат и её достаточно построить в первой четверти, а затем воспользоваться симметрией.

Наличие в уравнении линии выражения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ наводит на мысль воспользоваться обобщенными полярными координатами $x = a \cdot \rho\cos\varphi, \quad y = b \cdot \rho\sin\varphi$.

Тогда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2$ и уравнение линии примет вид

$$\rho^4 = 2\rho^2 \sin\varphi\cos\varphi, \text{ или } \rho^2 = \sin 2\varphi, \text{ или } \rho = \sqrt{\sin 2\varphi}.$$

Как отмечалось, достаточно сначала построить линию в первой четверти, т.е. для φ, принадлежащих отрезку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Для этого составим следующую таблицу:

φ	0	$\pi/8$	$2\pi/8 = \pi/4$	$3\pi/8$	$4\pi/8 = \pi/2$
ρ	0	$\approx 0{,}8$	1	$\approx 0{,}8$	0

Построим точки с вычисленными координатами (φ, ρ), соединим их плавной линией, которую затем, воспользовавшись свойством симметрии, отобразим зеркально относительно начала координат (рис. 43). Вычислим площадь S_0 той части фигуры, которая расположена в первой четверти:

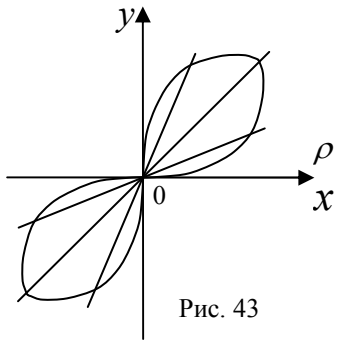

Рис. 43

$$S_0 = \int\limits_{(S_0)} dS = \iint\limits_{(S_0)} ab\,\rho\, d\rho\, d\varphi = ab \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\, d\rho.$$

Чтобы расставить внутренние пределы интегрирования, т.е. пределы изменения ρ, будем двигаться в области (S_0) по лучам, выходящим из полюса. На каждом таком луче ρ меняется от значения $\rho = 0$ в точке 0 до значения $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$ на линии, ограничивающей область (S_0). Кроме того, эта область заключена между

лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому $S_0 = ab \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho\, d\rho$.

Вычислим повторный интеграл, начиная с вычисления внутреннего интеграла

$$S_0 = ab \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{ab}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\varphi\, d\varphi = -\frac{ab}{4} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{2}, \qquad S = 2S_0 = ab.$$

Пример 7.18. Доказать, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Решение. Вычислим вспомогательный интеграл $\iint\limits_{(D)} e^{-x^2-y^2} dx\, dy$ для двух областей:

а) если (D) – круг $x^2 + y^2 \le R^2$, то, переходя к полярным координатам, получим

$$\iint\limits_{(D)} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \iint\limits_{(D)} e^{-\rho^2} \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R e^{-\rho^2} \cdot \rho\, d\rho = -\frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left(e^{-\rho^2} \Big|_0^R \right) d\varphi = \pi \left(1 - e^{-R^2} \right);$$

при $R \to \infty$ область (D), расширяясь, заполнит всю плоскость (обозначим ее D_∞) и

$$\iint\limits_{(D_\infty)} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \lim_{R \to \infty} \pi \left(1 - e^{-R^2} \right) = \pi;$$

б) если (D) – квадрат $-a \le x \le a$, $-a \le y \le a$, то

$$\iint\limits_{(D)} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2-y^2} dy = \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2} dx \int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2} dy = \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2} dx \right)^2;$$

при $a \to \infty$ область (D), расширяясь, опять заполнит всю плоскость (D_∞) и

$$\iint\limits_{(D_\infty)} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Итак, $\iint\limits_{(D_\infty)} e^{-x^2-y^2} dx\, dy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi \;\Rightarrow\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$

7.5. Тройной интеграл в прямоугольной системе

Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению определенного и двойного интегралов. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть тело (V) ограничено поверхностями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ (рис. 44,а). Цилиндрическая поверхность может и отсутствовать (рис. 44,б). Тогда

$$\boxed{\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_{(V_{xy})} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.} \qquad (7.24)$$

Здесь (V_{xy}) – есть проекция тела (V) на плоскость XOY (рис. 44).

Обоснование формулы (7.24) проводится так же, как и для двойного интеграла.

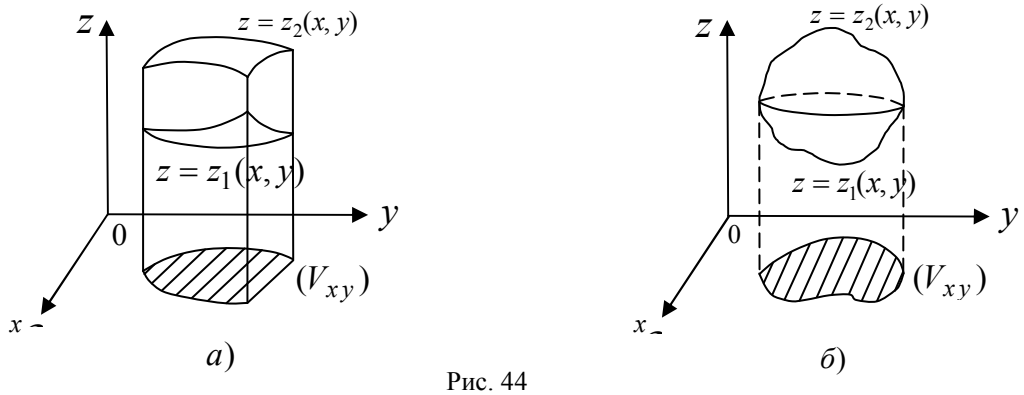

Рис. 44

Чтобы применять формулу (7.24) на практике, рекомендуем:

1) построить тело (V);
2) записать тройной интеграл через повторный интеграл; в повторном интеграле <u>сначала</u> расставить <u>внутренние</u> пределы интегрирования, т.е. пределы изменения z. При этом переменная интегрирования z меняется от $z_1(x,y)$ на нижней поверхности до $z_2(x,y)$ на верхней поверхности;
3) вычислить внутренний интеграл при фиксированных x, y;
4) вычислить внешний интеграл по проекции тела (V) на плоскость XOY.

Случай 2. Пусть тело (V) ограничено поверхностями $y = y_1(x,z)$, $y = y_2(x,z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OY. Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(V_{xz})} dxdz \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy. \qquad (7.25)$$

Случай 3. Пусть тело (V) ограничено поверхностями $x = x_1(y,z)$, $x = x_2(y,z)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OX. Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{(V_{yz})} dydz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx. \qquad (7.26)$$

Указания к применению формулы (7.24) с очевидными изменениями переносятся и на формулы (7.25), (7.26).

Для вычисления тройных интегралов надо уметь строить поверхности с заданными уравнениями. Дадим следующие рекомендации.

1. Если уравнение поверхности не содержит одной переменной, например, уравнение $F(x,y) = 0$ не содержит z, то поверхность является цилиндрической с образующими, параллельными оси OZ. Сначала строим направляющую с заданным уравнением $F(x,y) = 0$, затем через её точки проводим образующие, параллельные оси OZ (пример 7.19).

2. Если уравнение поверхности содержит переменные x, y, z, то удобно строить поверхность методом сечения плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ или параллельными им плоскостями (пример 7.20).

Пример 7.19. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $y=-\sqrt{x}$, $y=0$, $x+z=3$, $x+3z=3$.

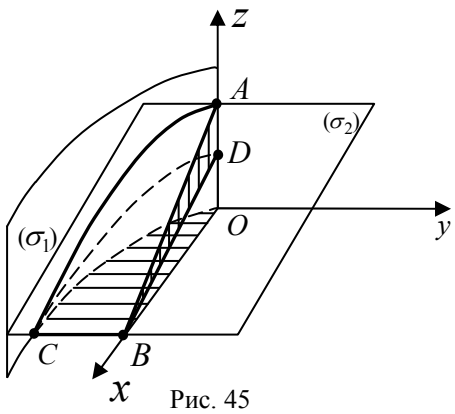

Рис. 45

Решение. Построим поверхности, ограничивающие тело. В уравнении $y=-\sqrt{x}$ отсутствует z, следовательно, это уравнение определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OZ. Направляющая в плоскости XOY имеет уравнение $y=-\sqrt{x}$ (или $y^2=x$, $y\le 0$), которое определяет левую часть параболы. Строя направляющую и образующие, проходящие через её точки (рис. 45), получим цилиндрическую поверхность (σ_1). Уравнение $y=0$ определяет плоскость XOZ.

Следующее уравнение $x+z=3$ есть уравнение первой степени, значит, оно определяет плоскость. В уравнении отсутствует y, значит, плоскость параллельна оси OY. Кроме того, при $x=0$ имеем $z=3$, при $z=0$ имеем $x=3$. Через полученные две точки A и B проводим плоскость (σ_2), параллельную оси OY. Эта плоскость пересечет плоскость XOZ по отрезку AB, а цилиндрическую поверхность – по дуге AC (рис. 45).

Аналогично, уравнение $x+3z=3$ определяет плоскость, параллельную оси OY, пересекающую плоскость XOZ по отрезку BD, а цилиндрическую поверхность – по дуге DC.

Объём тела, ограниченного рассмотренными поверхностями, найдем по одной из формул (6.6):

$$V=\int\limits_{(V)} dV=\iiint\limits_{(V)} dxdydz\,.$$

Запишем тройной интеграл через повторный по формуле (7.24). Чтобы расставить внутренние пределы интегрирования, т.е. пределы изменения z, будем двигаться параллельно оси OZ. При этом z меняется от $z=\dfrac{3-x}{3}$ на плоскости BDC до $z=3-x$ на плоскости ABC. Поэтому

$$V=\int\limits_{(V_{xy})} dxdy\int\limits_{(3-x)/3}^{3-x} dz=\iint\limits_{(V_{xy})}\left[(3-x)-(3-x)/3\right]dxdy=\frac{2}{3}\iint\limits_{(V_{xy})}(3-x)\,dxdy\,.$$

Здесь (V_{xy}) есть проекция тела (V) на плоскость XOY, т.е. криволинейный треугольник OBC. Вычислим теперь двойной интеграл. Для этого запишем его через повторный интеграл с внутренним интегрированием по y. Для выяснения пределов изменения y будем двигаться в области OBC параллельно оси OY. При этом y меняется от $y=-\sqrt{x}$ на дуге OC до $y=0$ на отрезке OB. Поэтому

$$V=\frac{2}{3}\int\limits_0^3 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{0}(3-x)\,dy\,.$$

Вычисляя сначала внутренний интеграл при фиксированном x, а затем внешний интеграл, получим

$$V=\frac{2}{3}\int_0^3(3-x)\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\left(3\cdot x^{3/2}\cdot\frac{2}{3}-x^{5/2}\cdot\frac{2}{5}\right)\Bigg|_0^3=\frac{8\sqrt{3}}{5}.$$

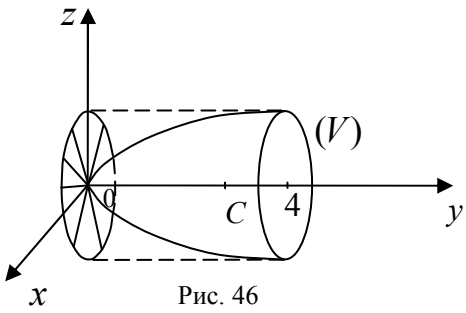

Рис. 46

Пример 7.20. Найти центр тяжести тела, ограниченного поверхностями $x^2+z^2=y$, $y=4$.

Решение. Построим поверхности, ограничивающие тело. Первую поверхность с уравнением $x^2+z^2=y$ построим методом сечений. В сечении плоскостью $x=0$ получим параболу $z^2=y$ с осью симметрии – осью OY (рис. 46). В сечении плоскостью $y=4$ получим окружность $x^2+z^2=4$. По этим сечениям видно, что уравнение $x^2+z^2=y$ определяет параболоид. Вторая поверхность – плоскость $y=4$ – отсекает от параболоида его часть, изображенную на рис. 46.

Центр тяжести полученного однородного тела, в силу его симметрии, находится на оси OY (в точке C). Следовательно, $x_c=z_c=0$. Координату y_c центра тяжести <u>тела</u> найдем с помощью <u>тройных</u> интегралов по формулам (6.9) и (6.7):

$$y_c=\frac{1}{m}\int_{(V)}\gamma\cdot y\,dV,\ \text{где}\ \ m=\int_{(V)}\gamma\,dV.$$

Так как тело однородное, то его плотность γ является постоянной величиной и её можно вынести за знак интеграла. Поэтому

$$y_c=\frac{\gamma\int\limits_{(V)}y\,dV}{\gamma\int\limits_{(V)}dV}=\frac{\int\limits_{(V)}y\,dV}{\int\limits_{(V)}dV}=\frac{I_1}{I_2}.$$

Вычислим сначала интеграл I_1, стоящий в числителе; для этого запишем его в виде повторного интеграла с внутренним интегрированием по y. Для выяснения пределов изменения y будем двигаться параллельно оси OY. При этом y меняется от $y=x^2+z^2$ на поверхности параболоида до $y=4$ на плоскости. Поэтому

$$I_1=\int\limits_{(V)}y\,dV=\iiint\limits_{(V)}y\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(V_{xz})}dx\,dz\int\limits_{x^2+z^2}^{4}y\,dy.$$

Сначала вычислим внутренний интеграл

$$I_1=\iint\limits_{(V_{xz})}dx\,dz\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2+z^2}^{4}=\frac{1}{2}\iint\limits_{(V_{xz})}\left[16-\left(x^2+z^2\right)^2\right]dx\,dz.$$

Так как проекция (V_{xz}) тела (V) на плоскости XOZ есть круг, то получившийся двойной интеграл удобно вычислять в полярной системе координат, заменяя x^2+z^2 на ρ^2, а $dxdz=dS$ на $\rho\,d\rho\,d\varphi$. Тогда получим

$$I_1=\frac{1}{2}\iint\limits_{(V_{xz})}\left[16-\rho^4\right]\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Двойной интеграл запишем через повторный с внутренним интегрированием по ρ.

Так как сечение параболоида $x^2+z^2=y$ плоскостью $y=4$ есть окружность $x^2+z^2=4$ радиуса 2, то ρ меняется от 0 до 2; φ меняется от 0 до 2π и, следовательно,

$$I_1=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(16-\rho^4\right)\rho\,d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(8\rho^2-\frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^2=\frac{32}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{64\pi}{3}.$$

Аналогично вычисляется интеграл I_2:

$$I_2=\int\limits_{(V)}dV=\iiint\limits_{(V)}dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(V_{xz})}dx\,dz\int\limits_{x^2+z^2}^{4}dy=\iint\limits_{(V_{xz})}\left[4-\left(x^2+z^2\right)\right]dx\,dz=$$

$$=\iint\limits_{(V_{xz})}\left[4-\rho^2\right]\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(4-\rho^2\right)\rho\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=8\pi.$$

Итак, $y_c=\frac{I_1}{I_2}=\frac{8}{3}$ и центр тяжести данного тела находится в точке $C\left(0,\,\frac{8}{3},\,0\right)$.

7.6. Тройной интеграл в криволинейной системе

Для вычисления тройного интеграла иногда удобно использовать не прямоугольные координаты (x,y,z), а некоторые криволинейные координаты (u,v,w). Пусть известна связь между этими координатами

$$x=x(u,v,w),\;\; y=y(u,v,w),\;\; z=z(u,v,w)\quad\text{и}\quad\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix}x'_u & x'_v & x'_w\\ y'_u & y'_v & y'_w\\ z'_u & z'_v & z'_w\end{vmatrix}\neq 0.$$

Аналогично случаю двойного интеграла можно показать, что

$$\boxed{dV=dx\,dy\,dz=\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw,}\qquad(7.27)$$

$$\boxed{\iiint\limits_{(V)}f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(V^*)}f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,z)}\right|du\,dv\,dw.}\qquad(7.28)$$

Здесь (V) и (V^*) — области изменения соответственно переменных (x,y,z) и (u,v,w).

Для вычисления тройного интеграла $\int\limits_{(V)}f(P)\,dV=\int\limits_{(V)}f(x,y,z)\,dV$ следует

1) заменить x, y, z, dV на их выражения в криволинейной системе координат,

$$x=x(u,v,w),\;\; y=y(u,v,w),\;\; z=z(u,v,w),\qquad dV=\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw;$$

2) заменить область (V) изменения переменных (x,y,z) на область (V^*) изменения переменных (u,v,w).

Замечание. Иногда удобнее вычислить не якобиан $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=I$, а якобиан $\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=I_1$.

Тогда искомый якобиан $I=\dfrac{1}{I_1}$.

Пример 7.21. Вычислить объем параллелепипеда, ограниченного плоскостями

$$a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1,\quad a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2,\quad a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3.$$

Решение. Введем новые переменные

$$u=a_1x+b_1y+c_1z,\quad v=a_2x+b_2y+c_2z,\quad w=a_3x+b_3y+c_3z$$

и вычислим якобиан $\Delta=\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Тогда искомый объем равен

$$V=\int\limits_{(V^*)} dV=\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(V^*)}\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,z)}\right| du\,dv\,dw=\frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{-h_1}^{h_1} du\int\limits_{-h_2}^{h_2} dv\int\limits_{-h_3}^{h_3} dw=\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}.$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Положение точки $M(x,y,z)$ в пространстве можно охарактеризовать с помощью цилиндрических координат (ρ,φ,z), где ρ,φ – полярные координаты проекции точки M на плоскость XOY, z – аппликата точки M. Поэтому аналогично полярной системе координат

$$\boxed{x=\rho\cdot\cos\varphi,\ \ y=\rho\cdot\sin\varphi,\ \ z=z.} \tag{7.29}$$

Вычислим якобиан $\dfrac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)}=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\rho$.

Тогда ***элемент объема в цилиндрических координатах***

$$\boxed{dV=\rho\ d\rho\ d\varphi\ dz}. \tag{7.30}$$

Для вычисления тройного интеграла $\int\limits_{(V)} f(P)\,dV=\int\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV$ следует

1) заменить x, y, z, dV на их выражения в цилиндрической системе координат,

$$x=\rho\cdot\cos\varphi,\ y=\rho\cdot\sin\varphi,\ z=z,\quad dV=\rho\ d\rho\ d\varphi\ dz\ ;$$

2) заменить область (V) изменения переменных (x,y,z) на область (V^*) изменения переменных (ρ,φ,z).

Замечания

1). К цилиндрическим координатам целесообразно переходить, когда уравнение поверхностей, ограничивающих тело, содержит x^2+y^2.

2). Внутреннее интегрирование обычно удобно вести по z.

Пример 7.22. Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2,\ \ z = \sqrt{x^2 + y^2}$, если плотность $\gamma = z$.

Решение. Поверхность $z = 6 - x^2 - y^2$ строим методом сечений:

$\begin{cases} x = 0, \\ z = 6 - y^2, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$ Получаем параболоид (рис. 47).

Поверхность $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ также строим методом сечений

$\begin{cases} x = 0, \\ z = |y|, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$ Получаем конус (рис. 47).

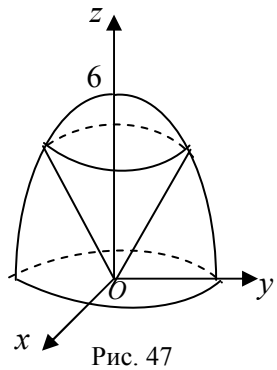

Рис. 47

В цилиндрической системе координат уравнения этих поверхностей имеют более простой вид: $z = 6 - \rho^2,\ \ z = \sqrt{\rho^2} = \rho$. Решив систему из этих двух уравнений, найдем пересечение этих поверхностей — окружность $\rho = 2$.

Вычислим массу тела, используя для вычисления интеграла цилиндрическую систему координат, учитывая, что $dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$, внутреннее интегрирование — по z, причем на прямой, параллельной оси OZ, z меняется от $z = \rho$ на конусе до $z = 6 - \rho^2$ на поверхности параболоида (рис. 47):

$$m = \int\limits_{(V)} \gamma\, dV = \iiint\limits_{(V)} z\ \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \iint\limits_{(V_{xy})} \rho\, d\rho\, d\varphi \int\limits_{\rho}^{6-\rho^2} z\, dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left[\left(6-\rho^2\right)^2 - \rho^2\right]\rho\, d\rho = \frac{92}{3}\pi.$$

Тройной интеграл в сферических координатах

Положение точки $M(x, y, z)$ в пространстве можно охарактеризовать с помощью сферических координат (r, θ, φ), где r – длина радиус-вектора точки M (рис. 48), θ – угол отклонения радиус-вектора точки M от оси OZ $(0 \le \theta \le \pi)$, φ – угол отклонения проекции на плоскость XOY радиус-вектора точки M от оси OX $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

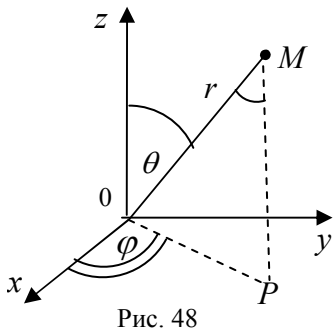

Рис. 48

Установим связь между прямоугольными и сферическими координатами. Из прямоугольного треугольника OMP имеем $OP = r \cdot \sin\theta,\ \ z = MP = r \cdot \cos\theta$. Так как $x = OP \cdot \cos\varphi,\ \ y = OP \cdot \sin\varphi$, то

$$\boxed{x = r\sin\theta \cdot \cos\varphi,\quad y = r\sin\theta \cdot \sin\varphi,\quad z = r \cdot \cos\theta;\qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.} \tag{7.31}$$

Вычислим якобиан

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}.$$

Раскроем определитель по элементам третьей строки

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} + r\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2 \sin\theta \cos^2\theta + r^2 \sin^3\theta = r^2 \sin\theta \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r^2 \sin\theta > 0.$$

Тогда ***элемент объема в сферических координатах***

$$\boxed{dV = r^2 \sin\theta \cdot dr\, d\theta\, d\varphi.} \qquad (7.32)$$

Для вычисления тройного интеграла $\int\limits_{(V)} f(P)\,dV = \int\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV$ следует

1) заменить x, y, z, dV на их выражения в сферической системе координат, $x = r\sin\theta \cdot \cos\varphi$, $y = r\sin\theta \cdot \sin\varphi$, $z = r \cdot \cos\theta$, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $dV = r^2 \sin\theta \cdot dr\, d\theta\, d\varphi$;

2) заменить область (V) изменения переменных (x,y,z) на область $\left(V^*\right)$ изменения переменных (r,θ,φ).

Замечания

1). К сферическим координатам целесообразно переходить, когда тело ограничено сферой $r = const$, конусом $\theta = const$ или поверхностью, уравнение которой содержит $x^2 + y^2 + z^2$.

2). Тройной интеграл следует записать в виде трехкратного с интегралами (слева направо) по φ, θ, r.

3). Сначала расставить пределы интегрирования по r (двигаясь по лучу из начала координат), потом — по θ (двигаясь от оси OZ), потом — по φ.

4). Если уравнение границы области или подынтегральная функция содержат $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, то следует перейти к обобщенным сферическим координатам

$$\boxed{x = a \cdot r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = b \cdot r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = c \cdot r\cos\theta;} \text{ тогда } \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2},$$

$$\boxed{dV = abc \cdot r^2 \sin\theta\; dr\, d\theta\, d\varphi.} \qquad (7.33)$$

Пример 7.23. Вычислить момент инерции относительно плоскости XOY однородного (с плотностью γ) тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = 3z^2$ $(z \ge 0)$.

Решение. Момент инерции тела вычислим по формуле (6.10)

$$I_{xy} = \int\limits_{(V)} z^2 \gamma\, dV = \gamma \int\limits_{(V)} z^2\, dV.$$

Так как тело ограничено сферой и конусом (рис. 49), то перейдем к сферическим координатам. При этом, учитывая формулы (7.30), уравнение сферы примет вид $r^2 = R^2$ или $r = R$; уравнение конуса примет вид

$r^2 \sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi = 3r^2\cos^2\theta$, или $\mathrm{tg}^2\theta = 3$, или $\theta = \frac{\pi}{3}$.

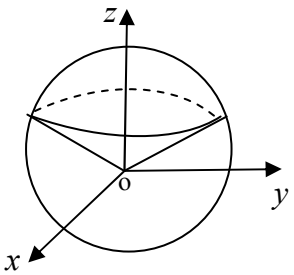

Рис. 49

Используя формулы (7.30) и (7.31), получим

$$I_{xy}=\gamma\int\limits_{(V)} z^2\,dV=\gamma\iiint\limits_{(V)} r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=-\gamma\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/3}\cos^2\theta\;d\cos\theta\int\limits_0^R r^4dr=\frac{7}{60}\pi\gamma R^5.$$

Пример 7.24. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\right)^3\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)=z^2\quad(z\ge 0).$$

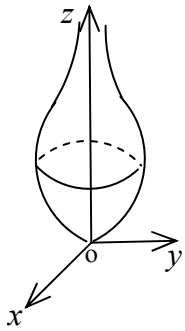

Рис. 50

Решение. Перейдем к обобщенным сферическим координатам $x=2r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=3r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$. В этих координатах

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2=r^2,\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=r^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=r^2\sin^2\theta$$

и уравнение поверхности примет вид

$$r^6\cdot r^2\sin^2\theta=r^2\cos^2\theta\ \text{ или }\ r=\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\theta}\,.$$

По условию $z\ge 0$, поэтому $\operatorname{ctg}\theta\ge 0$ и $\theta\in(0,\pi/2]$. Составим таблицу:

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$
r	∞	1	0

Построим точки с вычисленными координатами (r,θ,φ) сначала при $\varphi=\pi/2$, т.е. в плоскости YOZ (рис. 50). Так как уравнение поверхности $r=\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\theta}$ от φ не зависит, то при любом φ получим такую же линию; все эти линии образуют поверхность вращения (рис. 50). Объем тела, ограниченного этой поверхностью, вычислим с учетом соотношения (7.33) при $a=2,\ b=3,\ c=1$:

$$V=\int\limits_{(V)} dV=\iiint\limits_{(V)} 2\cdot 3\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Чтобы расставить пределы изменения r, будем двигаться в области (V) по лучам, выходящим из начала координат. На каждом таком луче r меняется от значения $r=0$ в начале координат до значения $r=\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\theta}$ на поверхности, ограничивающей область (V). Кроме того, эта область заключена между лучами $\theta=0$ и $\theta=\pi/2$, $\varphi\in[0,2\pi]$. Поэтому

$$V=6\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta\;d\theta\int\limits_0^{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\theta}}r^2\,dr=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\underbrace{\sin\theta\cdot\operatorname{ctg}\theta}_{=\cos\theta}\,d\theta=4\pi\,.$$

7.7. Поверхностный интеграл первого рода

Вычисление поверхностного интеграла 1 рода $\int\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma$ сводится к вычислению двойного интеграла. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Пусть гладкая поверхность (σ) задана параметрическими уравнениями

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)\quad\text{или}\quad \vec r=\vec r(u,v),\ (u,v)\in(S).$$

По определению, поверхностный интеграл функции $f(P)$ по поверхности (σ) есть предел интегральной суммы функции $f(P)$, который не зависит от способа разбиения поверхности (σ) на ячейки:

$$\int\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\cdot\Delta\sigma_k .$$

Удобно разбить поверхность (σ) на ячейки координатными линиями l_u, l_v. Выделим одну из таких ячеек (рис. 51). Рассмотрим радиус-векторы точек $P,\ P_1,\ P_2$: $\vec r_P = \vec r(u,v)$, $\vec r_{P_1} = \vec r(u+\Delta u, v)$, $\vec r_{P_2} = \vec r(u, v+\Delta v)$.

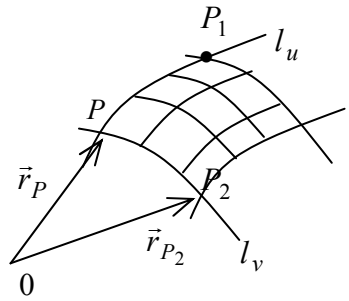

Рис.51

Тогда $\overrightarrow{PP_1} = \vec r_{P_1} - \vec r_P = \vec r(u+\Delta u, v) - \vec r(u,v) = \Delta_u \vec r \approx \vec r_u{}'\cdot\Delta u$,

$\overrightarrow{PP_2} = \vec r_{P_2} - \vec r_P = \vec r(u, v+\Delta v) - \vec r(u,v) = \Delta_v \vec r \approx \vec r_v{}'\cdot\Delta v$,

и площадь ячейки $\Delta\sigma \approx \left|\overrightarrow{PP_1}\times\overrightarrow{PP_2}\right| \approx \left|\vec r_u{}'\times\vec r_v{}'\right|\Delta u\,\Delta v$.

По аналогии с этим ***элемент площади поверхности***

$$\boxed{d\sigma = \left|\vec r_u{}'\times\vec r_v{}'\right| du\,dv} . \qquad (7.34)$$

Можно показать (строгое доказательство опускаем), что

$$\boxed{\int\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{(S)} f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\cdot\left|\vec r_u{}'\times\vec r_v{}'\right| du\,dv.} \qquad (7.35)$$

Итак, получили следующее правило:

Для вычисления поверхностного интеграла $\int\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma$ следует

1) в подынтегральной функции подставить вместо x, y, z их значения на поверхности (σ), т.е. $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$,

2) заменить элемент площади $d\sigma$ на выражение $d\sigma = \left|\vec r_u{}'\times\vec r_v{}'\right| du\,dv$;

3) вычислить получившийся двойной интеграл по области (S) изменения переменных (u,v).

Случай 2. Пусть гладкая поверхность (σ) задана уравнением, разрешенным относительно z: $z = z(x,y)$. Присоединив два очевидных тождества, получим параметрические уравнения поверхности (σ)

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = z(x,y), \end{cases} \quad (x, y \text{ – параметры});\ \text{тогда}\ \vec r_x{}'\times\vec r_y{}' = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = -z'_x\vec i - z'_y\vec j + \vec k ,$$

и по формуле (7.34) получим $d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$. Таким образом,

$$\boxed{\begin{gathered} d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\ dx\,dy; \\ \int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} f\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\ dx\,dy. \end{gathered}} \qquad (7.36)$$

Итак, для вычисления поверхностного интеграла $\int\limits_{(\sigma)} f(P)\,d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma$ следует:

1) в подынтегральной функции заменить z его значением $z(x,y)$ на поверхности (σ),
2) заменить элемент площади $d\sigma$ на выражение $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$,
3) вычислить получившийся двойной интеграл по проекции (σ_{xy}) поверхности (σ) на плоскость XOY.

Случай 3. Пусть гладкая поверхность (σ) задана уравнением, разрешенным относительно x: $x = x(y,z)$. Тогда

$$d\sigma = \sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\;dy\,dz;$$
$$\int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{yz})} f\left(x(y,z),y,z\right)\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dy\,dz. \qquad (7.37)$$

Здесь (σ_{yz}) есть проекция поверхности (σ) на плоскость YOZ.

Случай 4. Пусть гладкая поверхность (σ) задана уравнением, разрешенным относительно y: $y = y(x,z)$. Тогда

$$d\sigma = \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz;$$
$$\int\limits_{(\sigma)} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma_{xz})} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz. \qquad (7.38)$$

Здесь (σ_{xz}) есть проекция поверхности (σ) на плоскость XOZ.

Пример 7.25. Найти массу однородной поверхности $x^2+y^2=z^2$, $(0 \le z \le 3)$, если $\gamma = z$.

Решение. Построим поверхность $x^2+y^2=z^2$ методом сечений. В сечении $x=0$ получаем $y^2=z^2$ или $y=\pm z$. Это – пара прямых в плоскости YOZ (рис. 52). В сечении $z=3$ получаем окружность $x^2+y^2=3^2$. Таким образом, уравнение $x^2+y^2=z^2$ определяет коническую поверхность. Массу поверхности найдем с помощью поверхностного интеграла: $m = \int\limits_{(\sigma)} \gamma\,d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} z\,d\sigma$.

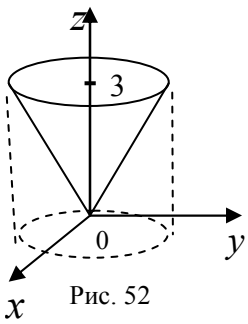

Рис. 52

Для вычисления этого интеграла уравнение поверхности удобно разрешить относительно z: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Найдем z'_x, z'_y и затем $d\sigma$ по первой из формул (7.36):

$$z'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy = \sqrt{2}\,dxdy.$$

Теперь вычислим $\int\limits_{(\sigma)} z\,d\sigma$, подставляя значение z на поверхности $\left(z=\sqrt{x^2+y^2}\right)$ и значение $d\sigma = \sqrt{2}\,dx\,dy$:

$$m=\int\limits_{(\sigma)} z\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\;dx\,dy\,.$$

Здесь (σ_{xy}) есть проекция конической поверхности (σ) на плоскость XOY, т.е. круг радиусом 3 (рис. 52). Двойной интеграл по кругу удобнее вычислять в полярной системе координат. Для этого заменим x^2+y^2 на ρ^2, а $dx\,dy$ на $\rho\,d\rho\,d\varphi$. Получим

$$m=\sqrt{2}\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\rho^2 d\rho d\varphi=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\rho^2 d\rho=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 d\varphi=18\pi\sqrt{2}\,.$$

Пример 7.26. Найти момент инерции относительно начала координат полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $(z\ge 0)$, если плотность $\gamma=z$.

Решение. Момент инерции относительно начала координат <u>поверхности</u> найдем с помощью <u>поверхностного</u> интеграла по второй из формул (6.13) :

$$I_0=\int\limits_{(\sigma)}(x^2+y^2+z^2)\,\gamma\,d\sigma\,.$$

На поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $\gamma=z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Поэтому

$$I_0=\int\limits_{(\sigma)}R^2\cdot\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma\,.$$

Для вычисления этого интеграла разрешим уравнение поверхности относительно z, найдем z'_x, z'_y и затем $d\sigma$ по первой из формул (7.36):

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,,\qquad z'_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,,\qquad z'_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,;$$

$$d\sigma=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\;dxdy=\frac{R\,dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,.$$

Подставляя выражение для $d\sigma$ в интеграл, получим

$$I_0=\int\limits_{(\sigma)}R^2\cdot\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma=R^2\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\frac{R\,dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}==R^3\iint\limits_{(\sigma_{xy})}dxdy\,.$$

Проекция (σ_{xy}) полусферы на плоскость XOY есть круг радиусом R; $\iint\limits_{(\sigma_{xy})}dxdy$ равен площади πR^2 этого круга. Поэтому $I_0=R^3\iint\limits_{(\sigma_{xy})}dxdy=R^3\cdot\pi R^2=\pi R^5$.

Глава 3. ТЕОРИЯ СКАЛЯРНОГО И ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

8. Скалярное поле

Скалярное поле – это область пространства, в которой задана скалярная функция $f(x,y,z)$, называемая функцией поля. Например, это может быть поле температур, поле давлений и т.д.

Множество точек поля, в которых функция поля $f(x,y,z)$ принимает постоянное значение c, образует поверхность с уравнением $f(x,y,z)=c$, называемую ***поверхностью уровня*** поля. Если плоское скалярное поле, например, находится

в плоскости XOY, то его функция поля $f(x,y)$ зависит от двух переменных x и y, а множество точек, в которых $f(x,y)=c$, образуют ***линию уровня***. Линии уровня используются при составлении географических карт (для изображения точек, расположенных на одинаковой высоте над уровнем моря), при составлении метеорологических карт (для изображения линий одинаковых температур – изотерм и линий одинакового давления – изобар).

8.1. Производная поля по направлению

Для характеристики скорости изменения поля $f(x,y,z)$ в направлении вектора $\vec{l}$ введем понятие производной поля по направлению. Пусть задана точка M и вектор $\vec{l}$, выходящий из точки M (рис. 53). Рассмотрим точку M_1, лежащую на векторе $\vec{l}$, и величину $f(M_1)-f(M)=\Delta f(M)$ – приращение функции поля $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$.

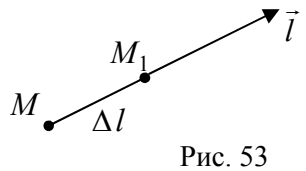

Рис. 53

Определение. Производной поля $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$ называют величину

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial l}(M)=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta f(M)}{\Delta l}=\lim_{M_1\to M}\frac{f(M_1)-f(M)}{|M_1M|}.}$$

Свойства производной по направлению

1). Скорость изменения функции $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$ равна $\frac{\partial f}{\partial l}(M)$.

2). Поле $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$ возрастает тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial l}(M)\ge 0$.

3). Поле $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$ убывает тогда и только тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial l}(M)\le 0$.

4). Если $\vec{l}\parallel ox$, то $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}$; если $\vec{l}\parallel oy$, то $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial y}$.

Действительно, 1) $\Delta f(M)$ есть изменение функции $f(M)$ на участке MM_1,

$\frac{\Delta f(M)}{\Delta l}$ есть средняя скорость изменения функции $f(M)$ на участке MM_1,

$\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta f(M)}{\Delta l}$ есть скорость изменения функции $f(M)$ в точке M в направлении $\vec{l}$;

2) в направлении $\vec{l}$ поле $f(M)$ возрастает $\Leftrightarrow$

$$f(M_1)>f(M)\Leftrightarrow\ \frac{f(M_1)-f(M)}{|MM_1|}>0\ \Leftrightarrow\ \frac{\partial f}{\partial l}(M)\ge 0;$$

3) следующее свойство проверяется так же, как предыдущее свойство;

4) если, например, $\vec{l}\parallel ox$, то $\Delta_l f=\Delta_x f$ и потому $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}$.

Формула для вычисления производной по направлению

Пусть функция $f(M)=f(x,y,z)$ – дифференцируема в точке $M(x,y,z)$. Тогда

$$\Delta f(M)=f'_x(M)\Delta x+f'_y(M)\Delta y+f'_z(M)\Delta z+o(\rho), \qquad (8.1)$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}=\Delta l$ и $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{o(\Delta l)}{\Delta l}=0$.

Поделим равенство (8.1) на Δl:

$$\frac{\Delta f(M)}{\Delta l}=f'_x(M)\frac{\Delta x}{\Delta l}+f'_y(M)\frac{\Delta y}{\Delta l}+f'_z(M)\frac{\Delta z}{\Delta l}+\frac{o(\Delta l)}{\Delta l}. \qquad (8.2)$$

Рассмотрим вектор $\operatorname{grad} f(M)=\left\{f'_x(M),\ f'_y(M),\ f'_z(M)\right\}$, называемый ***градиентом поля*** $f(M)$**,** и вектор $\vec{l_0}=\left\{\frac{\Delta x}{\Delta l},\frac{\Delta y}{\Delta l},\frac{\Delta z}{\Delta l}\right\}$, равный единичному вектору направления $\vec{l}$.

Тогда равенство (8.2) можно записать в виде

$$\frac{\Delta f(M)}{\Delta l}=\operatorname{grad} f(M)\cdot\vec{l}_0+\frac{o(\Delta l)}{\Delta l},$$

где первое слагаемое есть скалярное произведение векторов $\operatorname{grad} f(M)$ и $\vec{l_0}$.

В пределе при Δl, стремящемся к нулю, получим:

$$\boxed{\frac{\partial f(M)}{\partial l}=\operatorname{grad} f(M)\cdot\vec{l_0}}, \qquad (8.3)$$

где $\operatorname{grad} f(M)=\left\{f'_x(M),\ f'_y(M),\ f'_z(M)\right\}$ — градиент скалярного поля $f(M)$, $\vec{l_0}=\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$ — единичный вектор направления $\vec{l}$.

8.2. Градиент скалярного поля и его свойства

Вектор $\operatorname{grad} f(M)=\left\{f'_x(M),\ f'_y(M),\ f'_z(M)\right\}$ является важной характеристикой скалярного поля. Введем условный оператор $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ (оператор Гамильтона или вектор “набла”). С его помощью удобно записать градиент скалярного поля

$$\boxed{\operatorname{grad} f=\left\{\frac{\partial}{\partial x}f,\frac{\partial}{\partial y}f,\frac{\partial}{\partial z}f\right\}=\vec{\nabla}f.}$$

Отметим ряд свойств градиента.

1). Скалярное поле $f(M)$ в точке M_0 быстрее всего возрастает в направлении вектора $\operatorname{grad} f(M_0)$ со скоростью, равной $|\operatorname{grad} f(M_0)|$.

2). Скалярное поле $f(M)$ в точке M_0 быстрее всего убывает в направлении, противоположном вектору $\operatorname{grad} f(M_0)$, со скоростью, равной $|\operatorname{grad} f(M_0)|$.

3). Вектор $\operatorname{grad} f(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня поля $f(M)$, проходящей через точку M_0.

4). Дифференциальные свойства:

4.1) $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad} u+\operatorname{grad} v$, 4.2) $\operatorname{grad}(u\cdot v)=u\cdot\operatorname{grad} v+v\cdot\operatorname{grad} u$,

4.3) $\operatorname{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\operatorname{grad} u-u\cdot\operatorname{grad} v}{v^2}$, 4.4) $\operatorname{grad} f(u)=f'_u\cdot\operatorname{grad} u$,

4.5) $\operatorname{grad} r=\frac{\vec{r}}{r}$, 4.6) $\operatorname{grad}(\vec{a}\cdot\vec{r})=\vec{a}$.

Проверим эти свойства.

1. Из формулы (8.3) и определения скалярного произведения следует, что

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \operatorname{grad} f(M_0)\cdot\vec{l_0} = \left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|\cdot\left|\vec{l_0}\right|\cdot\cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\operatorname{grad} f(M_0)$ и $\vec{l}$. Так как длина единичного вектора $\vec{l_0}$ равна единице, то

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|\cdot\cos\varphi.$$

Поэтому $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ принимает наибольшее значение, равное $\left|\operatorname{grad} f(M_0)\right|$, когда $\cos\varphi=1$, то есть угол φ между векторами $\operatorname{grad} f(M_0)$ и $\vec{l}$ равен нулю и $\operatorname{grad} f(M_0) \uparrow\uparrow \vec{l}$.

2. Производная $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ будет принимать наименьшее значение, когда $\cos\varphi=-1$, т.е. угол $\varphi=\pi$ и $\operatorname{grad} f(M_0) \uparrow\downarrow \vec{l}$.

3. Поверхность уровня поля $f(x,y,z)$ имеет уравнение $f(x,y,z)=c$. Нормальный вектор этой поверхности $\vec{N}=\left\{f'_x, f'_y, f'_z\right\}_{M_0}$ совпадает с $\operatorname{grad} f(M_0)$. Значит, вектор $\operatorname{grad} f(M_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня поля $f(M)$, проведенной в точке M_0.

4.1. $\operatorname{grad}(u+v)=\left\{(u+v)'_x, (u+v)'_y, (u+v)'_z\right\}=\left\{u'_x, u'_y, u'_z\right\}+\left\{v'_x, v'_y, v'_z\right\}=\operatorname{grad} u+\operatorname{grad} v$;

аналогично проверяются свойства 4.2), 4.3), 4.4); для проверки свойства 4.5) учтем, что $\vec{r}=\{x,y,z\}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $r'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$; аналогично,

$r'_y=\frac{y}{r}$, $r'_z=\frac{z}{r}$ и поэтому $\operatorname{grad} r=\left\{r'_x, r'_y, r'_z\right\}=\left\{\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right\}=\frac{1}{r}\{x,y,z\}=\frac{\vec{r}}{r}$;

4.6. $\operatorname{grad}(\vec{a}\cdot\vec{r})=\operatorname{grad}(a_1x+a_2y+a_3z)=\{a_1, a_2, a_3\}=\vec{a}$.

Из первого и третьего свойств следует ***инвариантное определение градиента***, т.е. определение, не зависящее от системы координат:

> Градиент скалярного поля $f(M)$ в точке M_0 есть вектор, который
>
> а) по величине равен наибольшей скорости возрастания поля $f(M)$ в точке M_0,
>
> б) направлен по нормали к поверхности уровня поля $f(M)$, проходящей через точку M_0, в сторону наибольшего возрастания поля.

Пример 8.1. Найти наибольшую скорость возрастания поля $f(r)=r^3$ в точке $A(1,2,2)$.

Решение. Найдем градиент поля:

$$\operatorname{grad} f(r)=\operatorname{grad} r^3=3r^2\operatorname{grad} r=3r^2\frac{\vec{r}}{r}=3r\vec{r}.$$

Наибольшая скорость возрастания поля в точке A равна

$$\left|\operatorname{grad} f(r)\right|_A=\left|3r\vec{r}\right|_A=3r^2\Big|_A=3\left(x^2+y^2+z^2\right)\Big|_A=27.$$

Пример 8.2. Доказать оптическое свойство эллипса: лучи, выходящие из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса проходят через другой фокус эллипса.

Решение. Пусть F_1, F_2 – фокусы эллипса; $\vec{r_1}=\overrightarrow{F_1P}$, $\vec{r_2}=\overrightarrow{F_2P}$ (рис. 54). Рассмотрим

скалярное поле $f(P)=r_1+r_2$. По определению эллипса точка P принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда $f(P)=r_1+r_2=const$, т.е. эллипс есть линия уровня скалярного поля $f(P)$; поэтому $\operatorname{grad}(r_1+r_2)=\frac{\vec{r_1}}{r_1}+\frac{\vec{r_2}}{r_2}$ направлен по нормали к эллипсу в точке P. Кроме того, этот вектор направлен по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\frac{\vec{r_1}}{r_1}$, $\frac{\vec{r_2}}{r_2}$. Длины этих векторов равны единице, поэтому параллелограмм является ромбом и его диагональ является биссектрисой угла ромба, т.е. $\angle\alpha_1=\angle\alpha_2$. Тогда $\angle\beta_1=\angle\beta_2$, как углы дополнительные до прямого. Так как $\angle\gamma_1=\angle\beta_1$, $\angle\gamma_2=\angle\beta_2$, то $\angle\gamma_1=\angle\gamma_2$, т.е. луч, выходящий из фокуса F_1 эллипса, после отражения от эллипса пройдет через другой фокус F_2.

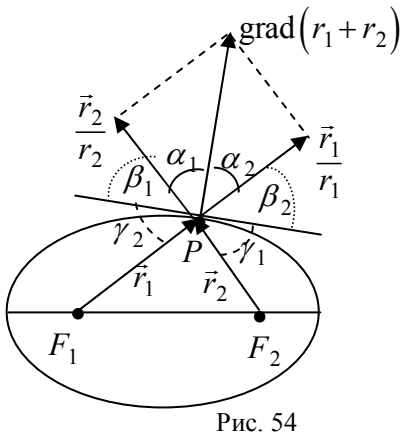

Рис. 54

9. Векторное поле и векторные линии

Векторное поле – это область пространства, в каждой точке M которой задан вектор $\vec{a}(M)$.

Пример 9.1. Пусть на материальную точку в области D действует сила $\vec{F}(M)$. Тогда в области D определено векторное поле $\vec{F}(M)$.

Пример 9.2. Пусть в области D происходит течение жидкости и в каждой точке M задан вектор $\vec{v}(M)$ скорости частицы жидкости. Тогда в области D определено векторное поле скоростей жидкости.

Пример 9.3. Поместим заряд $+q$ в начало координат. Тогда сила, с которой этот заряд действует на единичный положительный заряд, помещенный в точку M, определяется по закону Кулона:

$$\vec{E}=\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ — вектор, идущий из начала координат в точку M (радиус-вектор точки M), r — его длина. Имеем векторное поле напряженностей $\vec{E}(M)$, создаваемое зарядом q.

Мы будем рассматривать только стационарные поля, для которых вектор поля $\vec{a}(M)$ зависит от точки M и не зависит от времени. Проекции вектора $\vec{a}(M)$ на оси координат обозначим $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$. Тогда:

$$\vec{a}(M)=P(M)\vec{i}+Q(M)\vec{j}+R(M)\vec{k}.$$

Далее всюду предполагаем, что функции P, Q, R непрерывны вместе со своими частными производными; в противном случае точку поля назовем особой.

Одной из характеристик векторного поля являются ***векторные линии***.

Векторной линией векторного поля называют линию, в каждой точке которой касательный вектор коллинеарен вектору поля (рис. 55).

Векторные линии в конкретных полях имеют ясный физический смысл. В поле скоростей текущей жидкости векторные линии – это линии тока этой жидкости, т. е. линии, по которым движутся частицы жидкости.

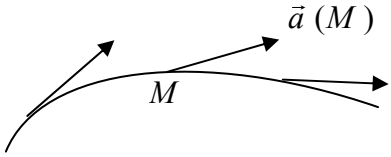

Рис. 55

В электрическом поле векторные линии – это силовые линии и их расположение очень важно в физике.

Выведем уравнения векторных линий для поля $\vec{a}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ (для краткости аргументы функций P, Q, R не выписаны).

Пусть уравнения векторной линии $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t)$, ($t$ – параметр). Касательным вектором этой линии является вектор $\vec{r}\,'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$ и вектор $\vec{r}\,'(t)\,dt = \{x'(t)\,dt, y'(t)\,dt, z'(t)\,dt\} = \{dx, dy, dz\}$.

По определению векторной линии ее касательный вектор $\vec{r}\,'(t)\,dt$ и вектор поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ коллинеарны. Поэтому координаты этих векторов пропорциональны, т. е.

$$\boxed{\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}}. \qquad (9.1)$$

Мы получили систему дифференциальных уравнений для отыскания векторных линий поля $\vec{a}$. Как решается такая система, покажем на примерах 9.4 и 9.5.

Пример 9.4. Магнитное поле $\vec{H}(M)$ создано электрическим током силы J, текущим по бесконечно длинному прямому проводу l. Найти силовые линии этого поля.

Решение. Если провод l принять за ось Oz некоторой декартовой системы координат, то, как известно из физики,

$$\vec{H}(M) = 2J\frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}.$$

Запишем уравнения векторных линий для поля $\vec{H}(M)$:

$$\frac{dx}{-2J\dfrac{y}{x^2+y^2}} = \frac{dy}{2J\dfrac{x}{x^2+y^2}} = \frac{dz}{0} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x},\ \ dz = 0.$$

Из первого уравнения имеем $xdx = -ydy,\ \ \int xdx = -\int ydy,\ \ x^2 = -y^2 + C$. Из второго уравнения $z = h$. Таким образом, силовые линии поля $\vec{H}(M)$ есть окружности $x^2 + y^2 = C$, расположенные в плоскостях $z = h$, параллельных плоскости XOY.

Пример 9.5. Найти векторные линии поля $\vec{a} = z\vec{i} + (z-x)^2\vec{j} + x\vec{k}$.

Решение. Учитывая, что $P = z,\ \ Q = (z-x)^2,\ \ R = x$, запишем систему (9.1):

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{(z-x)^2} = \frac{dz}{x}.$$

В одном из уравнений этой системы $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dz}{x}$ разделим переменные: $xdx = zdz$.

Теперь проинтегрируем $\int xdx = \int zdz$ и получим

$$\frac{x^2}{2} = \frac{z^2}{2} + \frac{C_1}{2} \quad \text{или} \quad x^2 - z^2 = C_1.$$

Чтобы решить другое уравнение системы, воспользуемся известным свойством пропорций: если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{\lambda\cdot a+\mu\cdot c}{\lambda\cdot b+\mu\cdot d}$. В нашем примере удобно взять $\lambda=1$, $\mu=-1$ и записать систему уравнений следующим образом:

$$\frac{dy}{(z-x)^2}=\frac{dx}{z}=\frac{dz}{x}=\frac{dx-dz}{z-x} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{(z-x)^2}=\frac{-d(z-x)}{(z-x)}.$$

Разделим переменные: $dy=-(z-x)\,d(z-x)$. Проинтегрируем $\int dy=-\int(z-x)d(z-x)$ и получим $y=-\frac{(z-x)^2}{2}+C_2$. Таким образом, векторные линии данного поля есть линии пересечения поверхностей $x^2-z^2=C_1$ и $y=-\frac{(z-x)^2}{2}+C_2$.

10. Поток векторного поля

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать так называемую ориентированную поверхность, т. е. поверхность, в каждой точке которой выбрано направление нормали с помощью единичного вектора $\vec{n}(M)$, причем $\vec{n}(M)$ является непрерывной вектор-функцией точки M (рис. 56).

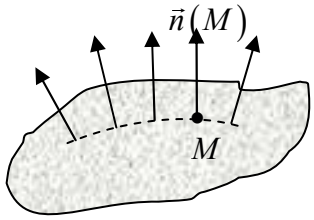

Рис. 56

Изменение направления нормалей на противоположное будем называть изменением ориентации поверхности.

Рассмотрим физическую задачу о потоке жидкости, приводящую к понятию потока поля.

10.1. Задача о количестве жидкости

Пусть в некоторой части пространства течет жидкость, причем скорость частицы жидкости зависит только от точки, через которую протекает жидкость, и не зависит от времени, т. е. $\vec{v}=\vec{v}(M)$. Требуется вычислить количество (объем) жидкости Π_σ, протекающее в единицу времени через ориентированную поверхность (σ) в выбранном направлении (предполагается, что жидкость может свободно протекать через эту поверхность).

Рассмотрим сначала простейший случай. Пусть (σ) — плоская площадка с нормальным вектором $\vec{n}$, а скорость течения жидкости $\vec{v}$ во всех точках одна и та же. Тогда количество жидкости, протекающей через эту площадку в единицу времени, равно (рис. 57) объему цилиндра с основанием σ и образующей $|\vec{v}|$. Так как высота этого цилиндра равна $\left|\text{пр}_{\vec{n}}\vec{v}\right|=\left|\frac{(\vec{v},\vec{n})}{|\vec{n}|}\right|=\left|(\vec{v},\vec{n})\right|$, то его объем равен $\left|(\vec{v},\vec{n})\right|\cdot\sigma$. Эта величина и равна количеству жидкости, протекающей через (σ). Опустив знак абсолютной величины, мы получим величину $(\vec{v},\vec{n})\cdot\sigma$, которую называют потоком жидкости через (σ). Если угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{n}$ — острый, то говорят, что жидкость течет в направлении вектора $\vec{n}$; в этом случае $(\vec{v},\vec{n})>0$ и поток совпадает с количеством жидкости. Если угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{n}$

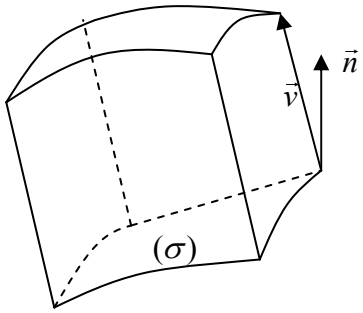

Рис. 57

тупой, то говорят, что жидкость течет в направлении, противоположном вектору $\vec{n}$; в этом случае $(\vec{v},\vec{n})<0$ и поток отличается от количества жидкости знаком. Если векторы $\vec{v}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, то жидкость течет вдоль площадки (σ) и поток равен нулю.

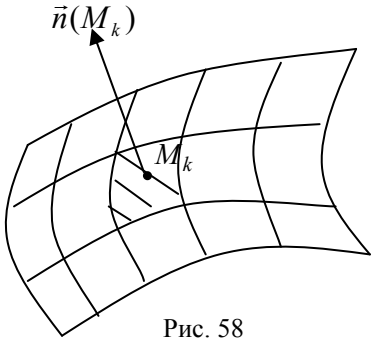

Рис. 58

Перейдем теперь к общему случаю. Для вычисления потока жидкости через произвольную поверхность (σ) разобьем эту поверхность на n частей $(\Delta\sigma_1),...,(\Delta\sigma_n)$ с площадями $\Delta\sigma_1,...,\Delta\sigma_n$ (рис. 58). На каждой площадке $(\Delta\sigma_k)$ выберем произвольную точку M_k. Будем приближенно считать, что все частицы, протекающие через малую площадку $(\Delta\sigma_k)$, имеют одинаковые скорости $\vec{v}\approx\vec{v}(M_k)$; кроме того, площадку будем считать плоской и перпендикулярной нормальному вектору $\vec{n}(M_k)$.

Тогда поток жидкости через площадку $(\Delta\sigma_k)$ приближенно равен

$$\Pi_{\Delta\sigma_k}\approx\left(\vec{v}(M_k),\vec{n}(M_k)\right)\cdot\Delta\sigma_k .$$

Для потока через всю поверхность получим

$$\Pi_\sigma=\sum_{k=1}^{n}\Pi_{\Delta\sigma_k}\approx\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{v}(M_k),\vec{n}(M_k)\right)\cdot\Delta\sigma_k .$$

Это приближенное равенство будет тем точнее, чем меньше $d=\max\{\Delta\sigma_1,...,\Delta\sigma_n\}$. Точное значение потока определяется как предел этой суммы при $d\to 0$:

$$\Pi_\sigma=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{v}(M_k),\vec{n}(M_k)\right)\cdot\Delta\sigma_k .$$

Полученный предел равен поверхностному интегралу I рода от скалярной функции $(\vec{v}(M),\vec{n}(M))$. Таким образом, поток жидкости через поверхность (σ) вычисляется по формуле

$$\boxed{\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)}(\vec{v},\vec{n})\,d\sigma}. \qquad (10.1)$$

Отметим, что

1) если суммарный поток $\Pi_\sigma>0$, то количество жидкости, протекающей в направлении нормали $\vec{n}$, больше количества жидкости, протекающей в направлении $-\vec{n}$;
2) если суммарный поток $\Pi_\sigma<0$, то количество жидкости, протекающей в направлении нормали $\vec{n}$, меньше количества жидкости, протекающей в направлении $-\vec{n}$;
3) если $\Pi_\sigma=0$, то количества жидкости, протекающей в том и другом направлении, одинаковы.

Интеграл в формуле (10.1) является поверхностным интегралом первого рода от скалярной функции $(\vec{v},\vec{n})$. Его также называют поверхностным интегралом второго рода от вектор-функции $\vec{v}$. Аналогичным образом определяют поток и для произвольного векторного поля $\vec{a}$.

10.2. Понятие потока и формы его записи

Потоком векторного поля $\vec{a}$ через ориентированную поверхность (σ) с единичным нормальным вектором $\vec{n}$ называют величину

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma . \qquad (10.2)$$

Отметим, что при изменении ориентации поверхности вектор $\vec{n}$ заменяется на вектор $(-\vec{n})$ и, следовательно, поток меняет знак.

Рассмотрим различные формы записи потока.

1). Обозначим через α, β, γ углы между вектором $\vec{n}$ и соответственно осями ox, oy, oz. Тогда направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ являются координатами вектора $\vec{n}$, т.е. $\vec{n} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$. Если вектор поля $\vec{a}$ имеет координаты P, Q, R, то

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) d\sigma . \qquad (10.3)$$

2). Рассмотрим элемент площади $(d\sigma)$ и его проекцию $\left(d\sigma_{xy}\right)$ на плоскость xoy (рис. 59). Угол между $(d\sigma)$ и плоскостью xoy равен углу между их нормальными векторами $\vec{n}$ и $\vec{k}$, т.е. углу γ. Поэтому

$$\cos\gamma\, d\sigma = \text{пр}_{xoy}\, d\sigma = d\sigma_{xy} .$$

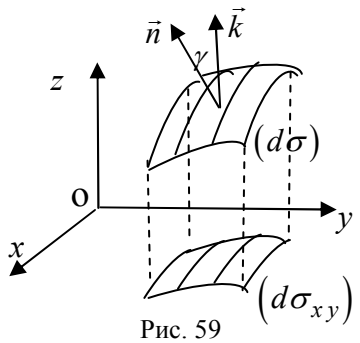

Рис. 59

Аналогично

$$\cos\beta\, d\sigma = \text{пр}_{xoz}\, d\sigma = d\sigma_{xz}, \quad \cos\alpha\, d\sigma = \text{пр}_{yoz}\, d\sigma = d\sigma_{yz} .$$

Тогда

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} P\, d\sigma_{yz} + Q\, d\sigma_{xz} + R\, d\sigma_{xy} . \qquad (10.4)$$

3). Введем вектор $\overrightarrow{d\sigma} = \left\{d\sigma_{yz},\ d\sigma_{xz},\ d\sigma_{xy}\right\}$, называемый векторным элементом площади. Так как $\vec{a} = \{P, Q, R\}$, то из (10.4) следует

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} P\, d\sigma_{yz} + Q\, d\sigma_{xz} + R\, d\sigma_{xy} = \int\limits_{(\sigma)} \vec{a}\ d\vec{\sigma} .$$

Наиболее употребительны из получившихся следующие формы записи потока

$$\boxed{\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} \vec{a}\ d\vec{\sigma} = \int\limits_{(\sigma)} P\, d\sigma_{yz} + Q\, d\sigma_{xz} + R\, d\sigma_{xy}} . \qquad (10.5)$$

Первые две формы записи потока в соотношении (10.5) называют векторными, последнюю форму записи — координатной.

10.3. Вычисление потока

Рассмотрим несколько способов вычисления потока.

1). Вычисление потока по формуле $\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a},\vec{n})\, d\sigma$.

При использовании этой формулы надо вычислить $\vec{a}\cdot\vec{n}$ и $d\sigma$; например, $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy$ для поверхности с уравнением $z = z(x, y)$.

Пример 10.1. Заряд q помещен в начало координат и создает поле напряженностей $\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}$ (пример 9.3). Вычислить поток этого поля через поверхность сферы радиусом R с центром в начале координат и нормальным вектором, направленным от начала координат.

Решение. Так как единичный вектор нормали $\vec{n}$ к сфере коллинеарен радиус-вектору $\vec{r}$, то $\vec{n}=\frac{\vec{r}}{r}$. Тогда $\left(\vec{E},\vec{n}\right)=\frac{q}{r^3}\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}=\frac{q}{r^4}r^2=\frac{q}{r^2}$. На поверхности сферы $r=R$, $\left(\vec{E},\vec{n}\right)=\frac{q}{R^2}$; площадь поверхности сферы $\sigma=4\pi R^2$. Поэтому

$$\Pi=\int\limits_{(\sigma)}\left(\vec{E},\vec{n}\right)d\sigma=\frac{q}{R^2}\int\limits_{(\sigma)}d\sigma=\frac{q}{R^2}\,\sigma=\frac{q}{R^2}\,4\pi R^2=4\pi q\,.$$

Заметим, что величина потока не зависит от радиуса сферы.

Пример 10.2. Вычислить поток поля $\vec{a}=\{2x,\,z,\,y\}$ через верхнюю сторону части плоскости $3x+2y+z=6$, расположенной в первом октанте (рис. 60).

Решение. Вычислим поток по формуле $\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma$.

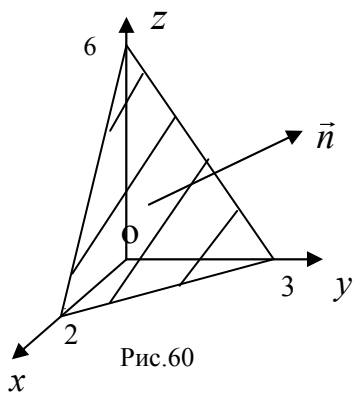

Рис.60

Нормальный вектор плоскости $3x+2y+z=6$ есть вектор $\vec{N}=\{3,\,2,\,1\}$; единичный нормальный вектор $\vec{n}=\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}=\frac{\{3,\,2,\,1\}}{\sqrt{14}}$. Его третья координата положительна, следовательно, он составляет с осью Oz острый угол и определяет верхнюю сторону поверхности. Вычислим скалярное произведение $\left(\vec{a},\vec{n}\right)$ на плоскости $z=6-3x-2y$:

$$\left(\vec{a},\vec{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{14}}(6x+2z+y),\quad \left(\vec{a},\vec{n}\right)\Big|_{(\sigma)}=\frac{1}{\sqrt{14}}\left(6x+2(6-3x-2y)+y\right)=\frac{3}{\sqrt{14}}(4-y)$$

.

Теперь вычислим элемент $d\sigma=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=\sqrt{14}\,dx\,dy$. Тогда получим

$$\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\frac{3}{\sqrt{14}}(4-y)\,\sqrt{14}\,dx\,dy=3\iint\limits_{(\sigma_{xy})}(4-y)\,dx\,dy\,.$$

Проекция $\left(\sigma_{xy}\right)$ поверхности (σ) на плоскость XOY есть треугольник в плоскости XOY, ограниченный линиями $3x+2y=6$, $x=0$, $y=0$. Поэтому

$$\Pi_\sigma=3\int\limits_0^3(4-y)\,dy\int\limits_0^{\frac{6-2y}{3}}dx=3\int\limits_0^3(4-y)\frac{6-2y}{3}\,dy=2\int\limits_0^3(4-y)\cdot\left(3-y\right)dy=27.$$

2). Вычисление потока методом проектирования на три плоскости

Воспользуемся формулой $\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)}P\,d\sigma_{yz}+Q\,d\sigma_{xz}+R\,d\sigma_{xy}$ и рассмотрим интегралы

$$I_1=\int\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz},\quad I_2=\int\limits_{(\sigma)} Q\,d\sigma_{xz},\quad I_3=\int\limits_{(\sigma)} R\,d\sigma_{xy}.$$

Для вычисления интеграла $I_1=\int\limits_{(\sigma)} P(x,y,z)\,d\sigma_{yz}$ следует

а) в подынтегральной функции заменить x его значением $x=x(y,z)$ на поверхности,

б) учесть, что $d\sigma_{yz}=\text{пр}_{yoz}\,d\sigma$ и поэтому $d\sigma_{yz}=\begin{cases}+dy\,dz, & \widehat{(\vec{n},ox)}<\pi/2,\\ -dy\,dz, & \widehat{(\vec{n},ox)}>\pi/2,\\ 0, & \widehat{(\vec{n},ox)}=\pi/2,\end{cases}$

в) вычислить получающийся двойной интеграл по проекции (σ_{yz}).

Для вычисления интеграла $I_2=\int\limits_{(\sigma)} Q(x,y,z)\,d\sigma_{xz}$ следует

а) в подынтегральной функции заменить y его значением $y=y(x,z)$ на поверхности,

б) учесть, что $d\sigma_{xz}=\text{пр}_{xoz}\,d\sigma$ и поэтому $d\sigma_{xz}=\begin{cases}+dx\,dz, & \widehat{(\vec{n},oy)}<\pi/2,\\ -dx\,dz, & \widehat{(\vec{n},oy)}>\pi/2,\\ 0, & \widehat{(\vec{n},oy)}=\pi/2\end{cases}$

в) вычислить получающийся двойной интеграл по проекции (σ_{xz}).

Аналогично вычисляется интеграл I_3.

Пример 10.3. Вычислить поток поля $\vec{a}=\{y^5,\ y,\ z^4-x^4\}$ через поверхность цилиндра $x^2+y^2=9\quad(0\le z\le 5)$ с выбранной внешней нормалью (рис. 61).

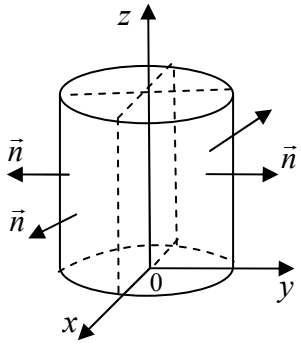

Рис. 61

Решение. Для вычисления потока воспользуемся формулой

$$\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz}+Q\,d\sigma_{xz}+R\,d\sigma_{xy}=\int\limits_{(\sigma)} y^5\,d\sigma_{yz}+y\,d\sigma_{xz}+\left(z^4-x^4\right)d\sigma_{xy}.$$

1). Вычислим интеграл $I_1=\int\limits_{(\sigma)} y^5\,d\sigma_{yz}$.

На части (σ_1) цилиндра, где $x=+\sqrt{9-y^2}$, имеем: $\widehat{(\vec{n},ox)}<\pi/2$, $d\sigma_{yz}=+dy\,dz$;

на части (σ_2) цилиндра, где $x=-\sqrt{9-y^2}$, имеем: $\widehat{(\vec{n},ox)}>\pi/2$, $d\sigma_{yz}=-dy\,dz$;

$$I_1=\int\limits_{(\sigma_1)} y^5\,d\sigma_{yz}+\int\limits_{(\sigma_2)} y^5\,d\sigma_{yz}=+\iint\limits_{(\sigma_{yz})} y^5dy\,dz-\iint\limits_{(\sigma_{yz})} y^5dy\,dz=0.$$

2). Вычислим интеграл $I_2=\int\limits_{(\sigma)} y\,d\sigma_{xz}$.

На части (σ_3) цилиндра, где $y=+\sqrt{9-x^2}$, имеем: $\widehat{(\vec{n},oy)}<\pi/2$, $d\sigma_{xz}=+dx\,dz$;

на части (σ_4) цилиндра, где $y=-\sqrt{9-x^2}$, имеем: $\widehat{(\vec{n},oy)}>\pi/2$, $d\sigma_{xz}=-dx\,dz$;

$$I_2=\int\limits_{(\sigma_3)} y\,d\sigma_{xz}+\int\limits_{(\sigma_4)} y\,d\sigma_{xz}=+\iint\limits_{(\sigma_{xz})}\sqrt{9-x^2}\,dx\,dz+\iint\limits_{(\sigma_{xz})}\left(-\sqrt{9-x^2}\right)(-dx\,dz)=2\iint\limits_{(\sigma_{xz})}\sqrt{9-x^2}\,dx\,dz.$$

Проекция (σ_{xz}) есть прямоугольник, поэтому

$$I_2=2\iint\limits_{(\sigma_{xz})}\sqrt{9-x^2}\,dx\,dz=2\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx\int\limits_{0}^{5}dz=10\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Воспользовавшись результатом примера 7.8, получим

$$I_2=10\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=10\cdot\frac{S}{2}=5\pi R^2=45\pi.$$

3). Вычислим интеграл $I_3=\int\limits_{(\sigma)}\left(z^4-x^4\right)d\sigma_{xy}$. Так как на поверхности цилиндра $\left(\widehat{\vec{n},oz}\right)=\pi/2$, то $d\sigma_{xy}=0$ и поэтому $I_3=0$. В результате $\Pi_\sigma=I_1+I_2+I_3=45\pi$.

3). Вычисление потока методом проектирования на одну плоскость

Для вычисления потока воспользуемся формулой $\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma$ и параметрическим уравнением поверхности (σ): $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in(S)$. Вычислим нормальный вектор поверхности по формуле (4.2): $\vec{N}=\vec{r}_u{}'\times\vec{r}_v{}'$; тогда единичный нормальный вектор $\vec{n}$, определяющий ориентацию поверхности, есть вектор

$$\vec{n}=+\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|},\ \text{если}\ \vec{n}\uparrow\uparrow\vec{N},\qquad \vec{n}=-\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|},\ \text{если}\ \vec{n}\uparrow\downarrow\vec{N}.$$

Элемент площади $d\sigma$ вычислим по формуле (13.1): $d\sigma=\left|\vec{r}_u{}'\times\vec{r}_v{}'\right|du\,dv=\left|\vec{N}\right|du\,dv$.

Подставляя значения для $\vec{n}$ и $d\sigma$ в интеграл $\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma$, получим

$$\Pi_\sigma=\int\limits_{(\sigma)}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=\pm\iint\limits_{(S)}\vec{a}\cdot\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}\cdot\left|\vec{N}\right|du\,dv=\pm\iint\limits_{(S)}\vec{a}\cdot\vec{N}\,du\,dv=\pm\iint\limits_{(S)}\vec{a}\cdot\left(\vec{r}_u{}'\times\vec{r}_v{}'\right)du\,dv.$$

Окончательно имеем:

$$\boxed{\begin{aligned}&\Pi_\sigma=+\iint\limits_{(S)}\vec{a}\cdot\left(\vec{r}_u{}'\times\vec{r}_v{}'\right)du\,dv,\ \text{если}\ \vec{r}_u{}'\times\vec{r}_v{}'\uparrow\uparrow\vec{n};\\&\Pi_\sigma=-\iint\limits_{(S)}\vec{a}\cdot\left(\vec{r}_u{}'\times\vec{r}_v{}'\right)du\,dv,\ \text{если}\ \vec{r}_u{}'\times\vec{r}_v{}'\uparrow\downarrow\vec{n}.\end{aligned}}\qquad(10.6)$$

Пример 10.4. Вычислить поток поля $\vec{a}=\{x,\ y,\ z\}$ через поверхность $y=x^2+z^2$ $(y\le 4)$, ориентированную внешней нормалью (рис. 62).

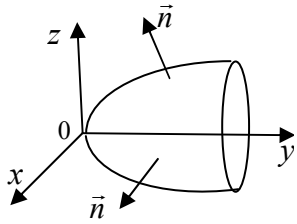

Рис. 62

Решение. Запишем уравнение поверхности в параметрическом виде $x=\rho\cdot\cos\varphi$, $z=\rho\cdot\sin\varphi$, $y=\rho^2$ (ρ, φ – параметры). Найдем вектор

$$\vec{r}_\rho{}'\times\vec{r}_\varphi{}'=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x'_\rho&y'_\rho&z'_\rho\\x'_\varphi&y'_\varphi&z'_\varphi\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\\cos\varphi&2\rho&\sin\varphi\\-\rho\sin\varphi&0&\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=2\rho^2\cos\varphi\cdot\vec{i}-\rho\cdot\vec{j}+2\rho^2\sin\varphi\cdot\vec{k}.$$

Вторая координата этого вектора отрицательна, как и у вектора $\vec{n}$,

поэтому

$$\vec{r}_\rho{}' \times \vec{r}_\varphi{}' \uparrow\uparrow \vec{n} \text{ и } \Pi_\sigma = + \iint\limits_{(S)} \vec{a} \cdot \left(\vec{r}_\rho{}' \times \vec{r}_\varphi{}'\right) d\rho\, d\varphi .$$

Здесь $\vec{a} \cdot \left(\vec{r}_\rho{}' \times \vec{r}_\varphi{}'\right) = \left\{\rho \cdot \cos\varphi,\ \rho^2,\ \rho \cdot \sin\varphi\right\} \cdot \left\{2\rho^2 \cos\varphi,\ -\rho,\ 2\rho^2 \sin\varphi\right\} = \rho^3$. Тогда

$$\Pi_\sigma = + \iint\limits_{(S)} \vec{a} \cdot \left(\vec{r}_\rho{}' \times \vec{r}_\varphi{}'\right) d\rho\, d\varphi = \iint\limits_{(S)} \rho^3\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho = 8\pi .$$

Пример 10.5. Вычислить поток поля $\vec{a} = \{2x,\ z,\ y\}$ через верхнюю сторону части плоскости $3x + 2y + z = 6$, расположенной в первом октанте (рис. 60).

Решение. Вычислим поток методом проектирования на одну плоскость (сравните с методом, разобранным в примере 10.2). Для этого запишем уравнение поверхности в параметрическом виде $x = x,\ y = y,\ z = 6 - 3x - 2y$ ($x,\ y$ – параметры).

Найдем векторное произведение $\vec{r}_x{}' \times \vec{r}_y{}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}$.

Вторая координата этого вектора положительна, как и у вектора $\vec{n}$, поэтому

$$\vec{r}_x{}' \times \vec{r}_y{}' \uparrow\uparrow \vec{n} \quad \text{и} \quad \Pi_\sigma = + \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \vec{a} \cdot \left(\vec{r}_x{}' \times \vec{r}_y{}'\right) dx\, dy .$$

Вычислим значение подынтегральной функции на поверхности (σ):

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{r}_x{}' \times \vec{r}_y{}'\right) = \{2x,\ z,\ y\} \cdot \{3,\ 2,\ 1\} = \left(6x + 2z + y\right)\Big|_{(\sigma)} = 6x + 2\left(6 - 3x - 2y\right) + y = 3\left(4 - y\right).$$

Тогда $\Pi_\sigma = + \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \vec{a} \cdot \left(\vec{r}_x{}' \times \vec{r}_y{}'\right) dx\, dy = 3 \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \left(4 - y\right) dx\, dy$. Этот интеграл был вычислен в примере 10.2: $\Pi_\sigma = 3 \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \left(4 - y\right) dx\, dy = 27$.

10.4. Формула Остроградского. Дивергенция поля

Поток векторного поля через ***замкнутую поверхность*** (σ) удобно вычислять по ***формуле Остроградского*** с помощью дивергенции $\operatorname{div}\vec{a}$ поля $\vec{a} = \{P,\ Q,\ R\}$:

$$\boxed{\Pi_\sigma = \oint\limits_{(\sigma)} \left(\vec{a}, \vec{n}\right) d\sigma = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV, \text{ где } \operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}} . \qquad (10.7)$$

В этой формуле (V) — тело, ограниченное замкнутой поверхностью (σ); поверхность (σ) ориентирована внешней нормалью; функции P, Q, R непрерывны вместе со своими частными производными.

Вывод формулы проведем для случая, когда поверхность (σ) состоит (рис. 63) из поверхности (σ_1) с уравнением $z = z_1(x, y)$ и поверхности (σ_2) с уравнением $z = z_2(x, y)$.

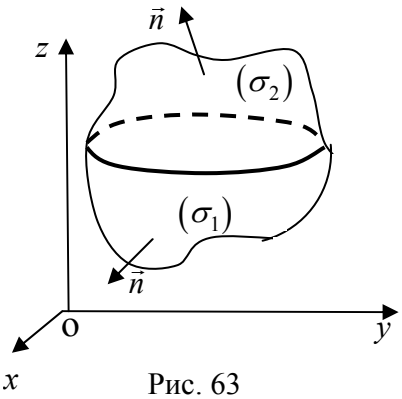

Рис. 63

Запишем формулу Остроградского в координатной форме

$$\Pi_\sigma = \oint\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz} + Q\,d\sigma_{xz} + R\,d\sigma_{xy} = \int\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \ . \qquad (10.8)$$

Покажем сначала, что $\oint\limits_{(\sigma)} R\,d\sigma_{xy} = \int\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$. Действительно,

$$\int\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint\limits_{(V_{xy})} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \left(R\left(x,y,z_2(x,y)\right) - R\left(x,y,z_1(x,y)\right) \right) dx\,dy \, . \qquad (10.9)$$

С другой стороны, $\oint\limits_{(\sigma)} R(x,y,z)\,d\sigma_{xy} = \int\limits_{(\sigma_1)} R(x,y,z)\,d\sigma_{xy} + \int\limits_{(\sigma_2)} R(x,y,z)\,d\sigma_{xy}$.

На поверхности (σ_2): $z = z_2(x,y)$; $d\sigma_{xy} = +dx\,dy$, так как $\left(\widehat{\vec{n},oz}\right) < \pi/2$;

на поверхности (σ_1): $z = z_1(x,y)$; $d\sigma_{xy} = -dx\,dy$, так как $\left(\widehat{\vec{n},oz}\right) > \pi/2$;

поэтому

$$\oint\limits_{(\sigma)} R(x,y,z)\,d\sigma_{xy} = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} R\left(x,y,z_2(x,y)\right) dx\,dy - \iint\limits_{(\sigma_{xy})} R\left(x,y,z_1(x,y)\right) dx\,dy \, .$$

Получившееся выражение равно правой части формулы (10.9), значит

$$\oint\limits_{(\sigma)} R\,d\sigma_{xy} = \int\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dV \ . \qquad (10.10)$$

Аналогично можно показать, что

$$\oint\limits_{(\sigma)} Q\,d\sigma_{xz} = \int\limits_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV \ , \qquad \oint\limits_{(\sigma)} P\,d\sigma_{yz} = \int\limits_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x}\,dV \ . \qquad (10.11)$$

Складывая равенства (10.10) и (10.11), получим формулу Остроградского (10.8).

Пример 10.6. Вычислить поток поля $\vec{a} = \{2x,\, z,\, y\}$ через поверхность пирамиды, ограниченную плоскостью $3x + 2y + z = 6$ и координатными плоскостями (рис. 60).

Решение. Так как поверхность замкнутая, то воспользуемся формулой Остроградского

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\ dV = \int\limits_{(V)} (2+0+0)\ dV = 2 \cdot V_{\text{пир}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h \right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \right) \cdot 6 = 12 \ .$$

Пример 10.7. Вычислить поток жидкости, текущей со скоростью $\vec{v} = \{x+y,\, z-x,\, z\}$, через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \le z \le 4)$ в направлении внешней нормали (рис. 64).

Решение. Поток через боковую поверхность конуса удобно вычислить как разность потока через полную поверхность и потока через основание. Поток через полную поверхность вычислим по формуле Остроградского

$$\Pi_{\text{полн}} = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{v}\,dV = \int\limits_{(V)} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}(z-x) + \frac{\partial}{\partial z}(z) \right) dV =$$

$$= 2\int\limits_{(V)} dV = 2V_{\text{кон}} = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{2\pi}{3} \cdot 4^2 \cdot 4 = \frac{128\pi}{3} \, .$$

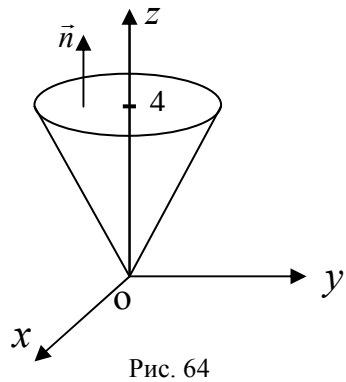

Рис. 64

Поток жидкости через основание конуса вычислим по формуле $\Pi_{\text{осн}} = \int\limits_{(\sigma)} \vec{v}\cdot\vec{n}\, d\sigma$.

Учтем, что единичный вектор нормали к основанию конуса равен $\vec{n} = \{0, 0, 1\}$. Поэтому $\vec{v}\cdot\vec{n} = (x+y)\cdot 0 + (z-x)\cdot 0 + z\cdot 1 = z$. На основании конуса $z = 4$, значит, $\vec{v}\cdot\vec{n} = 4$ и

$$\Pi_{\text{осн}} = \int\limits_{(\sigma)} \vec{v}\cdot\vec{n}\, d\sigma = 4\int\limits_{(\sigma)} d\sigma = 4\sigma.$$

Здесь σ — площадь основания, т. е. площадь круга радиусом 4. Следовательно,

$$\Pi_{\text{осн}} = 4\pi R^2 = 64\pi, \qquad \Pi_{\text{бок}} = \Pi_{\text{полн}} - \Pi_{\text{осн}} = \frac{128}{3}\pi - 64\pi = -\frac{64}{3}\pi .$$

Так как $\Pi_{\text{бок}} < 0$, то через боковую поверхность конуса в направлении внешней нормали течет жидкости меньше, чем в противоположном направлении.

Остановимся более подробно на свойствах дивергенции.

Инвариантное определение дивергенции

Рассмотрим точку M (рис. 65), окружим ее замкнутой поверхностью (σ) и вычислим поток поля $\vec{a}$ через эту поверхность по формуле Остроградского

$$\Pi_\sigma = \oint\limits_{(\sigma)} (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV .$$

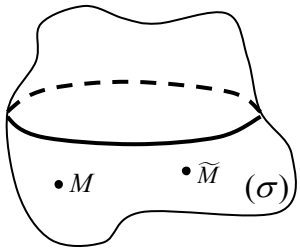

Рис. 65

Применяя к тройному интегралу теорему о среднем, получим

$$\Pi_\sigma = (\operatorname{div}\vec{a})_{\widetilde{M}}\cdot V \quad \text{или} \quad (\operatorname{div}\vec{a})_{\widetilde{M}} = \frac{\Pi_\sigma}{V}.$$

Здесь $\widetilde{M}$ есть некоторая точка из области (V). В последнем равенстве перейдем к пределу, стягивая область (V) в точку M (при этом точка $\widetilde{M}$ будет стремиться к точке M). Запишем результат предельного перехода:

$$\boxed{(\operatorname{div}\vec{a})_M = \lim_{(V)\to M} \frac{\Pi_\sigma}{V}.} \qquad (10.12)$$

Мы получили ***инвариантное*** (т.е. независящее от системы координат) определение дивергенции. Первоначальное определение дивергенции

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

было введено для прямоугольной системы координат.

Физический смысл дивергенции

Пусть векторное поле $\vec{a}$ есть поле скоростей жидкости. Величина потока Π_σ равна разности между количеством жидкости, вытекающей из области (V), и количеством жидкости, втекающей в эту область. Если $\Pi > 0$, то из области (V) жидкости вытекает больше, чем втекает. Это означает, что в области (V) имеются <u>источники</u>, питающие поток жидкости. Величина $\frac{\Pi_\sigma}{V}$ определяет количество жидкости, возникающей в единицу времени в единице объема. Ее называют средней мощностью источников в области (V). Величину

$$\lim_{(v)\to M}\frac{\Pi_\sigma}{V}=\operatorname{div}\vec{a}\,(M)$$

называют мощностью источника в точке M.

Если $\Pi<0$, то в область (V) втекает жидкости больше, чем вытекает, т. е. в области (V) имеются <u>стоки</u> со средней мощностью $\left|\frac{\Pi_\sigma}{V}\right|$. Величина

$$\left|\lim_{(V)\to M}\frac{\Pi_\sigma}{V}\right|=\left|\operatorname{div}\vec{a}\,(M)\right|$$

есть мощность стока в точке M. Итак,

1) если $\operatorname{div}\vec{a}\,(M)>0$, то в точке M имеется ***источник мощности*** $\operatorname{div}\vec{a}\,(M)$,
2) если $\operatorname{div}\vec{a}\,(M)<0$, то в точке M имеется ***сток мощности*** $\left|\operatorname{div}\vec{a}\,(M)\right|$,
3) если $\operatorname{div}\vec{a}\,(M)=0$, то в точке M отсутствуют и источник, и сток.

Дифференциальные свойства дивергенции

1) $\operatorname{div}\vec{c}=0$, или $\vec{\nabla}\cdot\vec{c}=0$ ($\vec{c}$ – постоянный вектор),
2) $\operatorname{div}\vec{r}=3$, или $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3$ ($\vec{r}$ – радиус-вектор),
3) $\operatorname{div}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}$, или $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{\nabla}\cdot\vec{a}+\vec{\nabla}\cdot\vec{b}$,
4) $\operatorname{div}\left(f\cdot\vec{a}\right)=f\cdot\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\cdot\operatorname{grad}f$, или $\vec{\nabla}\cdot\left(f\ \vec{a}\right)=f\ \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right)+\vec{a}\cdot\left(\vec{\nabla}f\right)$,
(f – скалярное поле, $\vec{a}$ – векторное поле),
5) $\operatorname{div}\left(c\ \vec{a}\right)=c\ \operatorname{div}\vec{a}$, или $\vec{\nabla}\cdot\left(c\ \vec{a}\right)=c\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right)$ (c – константа),
6) $\operatorname{div}\left(f\cdot\vec{c}\right)=\vec{c}\cdot\operatorname{grad}f$, или $\vec{\nabla}\cdot\left(f\cdot\vec{c}\right)=\vec{c}\cdot\vec{\nabla}f$ ($\vec{c}$ – постоянный вектор).

Проверим эти свойства:

1) $\operatorname{div}\vec{c}=\frac{\partial}{\partial x}\left(c_1\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(c_2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(c_3\right)=0$,

2) $\operatorname{div}\vec{r}=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=3$,

4) $$\operatorname{div}\left(f\cdot\vec{a}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(f\cdot P)+\frac{\partial}{\partial y}(f\cdot Q)+\frac{\partial}{\partial z}(f\cdot R)=\left[\frac{\partial f}{\partial x}P+\frac{\partial f}{\partial y}Q+\frac{\partial f}{\partial z}R\right]+\left[f\frac{\partial P}{\partial x}+f\frac{\partial Q}{\partial y}+f\frac{\partial R}{\partial z}\right]=$$
$$=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}\cdot\{P,Q,R\}+f\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)=\left(\operatorname{grad}f\right)\cdot\vec{a}+f\operatorname{div}\vec{a}\,,$$

свойство 3) проверяется так же, как свойство 4),
свойство 5) есть следствие свойства 4) при $f=c$,
свойство 6) есть следствие свойства 4) при $\vec{a}=\vec{c}$.

Пример 10.8. Доказать, что $\operatorname{div}\left(f(r)\,\vec{r}\right)=3f(r)+r\,f'(r)$.

Решение. По свойству 4) дивергенции $\operatorname{div}\left(f(r)\,\vec{r}\right)=f(r)\operatorname{div}\vec{r}+\vec{r}\cdot\operatorname{grad}f(r)$;

по свойствам градиента $\operatorname{grad}f(r)=f'(r)\operatorname{grad}r=f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$. Тогда

$$\operatorname{div}\left(f(r)\,\vec{r}\right)=3f(r)+\vec{r}\cdot f'(r)\frac{\vec{r}}{r}=3f(r)+r\,f'(r).$$

Пример 10.9. Доказать, что дивергенция поля напряженностей, создаваемого зарядом q, равна нулю.

Решение. Поле напряженностей, создаваемое зарядом q (см. пример 9.3), есть поле $\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$. Из предыдущего примера при $f(r) = \frac{q}{r^3}$ следует, что

$$\operatorname{div}\left(\frac{q}{r^3}\vec{r}\right) = 3\frac{q}{r^3} + r\left(\frac{q}{r^3}\right)'_r = 3\frac{q}{r^3} + r\left(\frac{-3q}{r^4}\right) = 0.$$

11. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля

11.1. Задача о работе силы

Пусть задано поле сил $\vec{F}(M)$, под действием которых материальная точка движется по кривой BC от точки B к точке C. Вычислим совершаемую при этом работу. Для этого разобьем линию BC на n частей точками $B = M_0, M_1, ..., M_{n-1}, M_n = C$ с радиус-векторами $\vec{r}_0, \vec{r}_1, ..., \vec{r}_n$ (рис. 66). Рассмотрим вектор перемещения

$$\overrightarrow{M_k M_{k+1}} = \vec{r}_{k+1} - \vec{r}_k = \Delta\vec{r}_k$$

и вектор силы $\vec{F}(M_k) = \vec{F}_k$. Их скалярное произведение приближенно равно работе A_k силы $\vec{F}(M)$ вдоль дуги $M_k M_{k+1}$, т. е.

$$A_k \approx \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{r}_k.$$

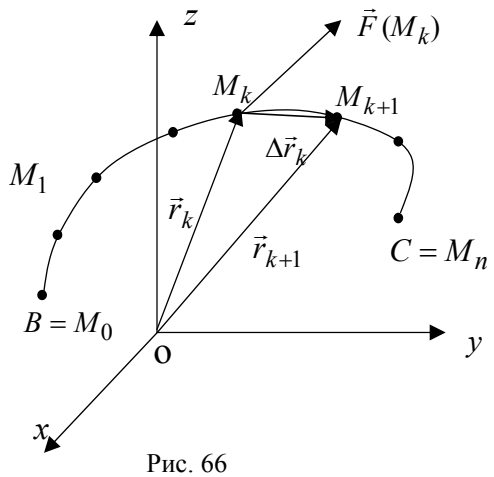

Рис. 66

Вычислим работу вдоль всей линии BC:

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{r}_k.$$

Это равенство будет тем точнее, чем меньше длины векторов $\Delta\vec{r}_k$. Максимальную из этих длин обозначим d и, переходя к пределу при $d \to 0$, определим точное значение работы

$$\boxed{A = \lim_{d\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}_k \cdot \Delta\vec{r}_k}. \qquad (11.1)$$

Этот предел обозначают $\int\limits_{\cup BC} \vec{F}\, d\vec{r}$ и называют линейным интегралом поля $\vec{F}$ по дуге BC или криволинейным интегралом второго рода.

11.2. Понятие линейного интеграла и его свойства

Отвлекаясь от физического содержания рассмотренной задачи, аналогичным образом вводят понятие линейного интеграла произвольного поля $\vec{a}(M)$ (рис. 66):

$$\boxed{\int\limits_{\cup BC} \vec{a}(M)\, d\vec{r} = \lim_{d\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \vec{a}(M_k) \cdot \Delta\vec{r}_k,} \qquad (11.2)$$

где $M_0, M_1, ..., M_n$ — точки разбиения дуги BC, $\Delta\vec{r}_k = \overrightarrow{M_k M_{k+1}}$, $d = \max\left\{\left|\Delta\vec{r}_1\right|, ..., \left|\Delta\vec{r}_{n-1}\right|\right\}$.

Отметим три свойства линейного интеграла:

1) $\int\limits_{\cup BC} \left(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\right) d\vec{r} = \lambda \int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r} + \mu \int\limits_{\cup BC} \vec{b}\, d\vec{r}$ (свойство линейности),

2) $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{\cup BK} \vec{a}\, d\vec{r} + \int\limits_{\cup KC} \vec{a}\, d\vec{r}$ (свойство аддитивности),

3) $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r} = -\int\limits_{\cup CB} \vec{a}\, d\vec{r}$,

т. е. при изменении направления обхода кривой линейный интеграл меняет знак, т. к. векторы $\Delta\vec{r}_k$ меняют свое направление на противоположное.

Выразив скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ и $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$ через их координаты, получим

$$\boxed{\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{\cup BC} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.} \qquad (11.3)$$

Выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ в скобки не заключают, хотя знак интеграла относится ко всему этому выражению. В формуле (11.3) функции $\vec{a}, P, Q, R$ есть функции точки M или ее координат x, y, z. Интеграл $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r}$ называют ***векторной формой***, а интеграл $\int\limits_{\cup BC} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ — ***координатной формой*** записи линейного интеграла.

В тех случаях, когда линейный интеграл поля $\vec{a}$ берется ***по замкнутой кривой*** L, он называется ***циркуляцией*** поля $\vec{a}$ по кривой L и обозначается так:

$$\boxed{C(\vec{a}, L) = \oint\limits_{(L)} \vec{a}\, d\vec{r}.} \qquad (11.4)$$

Приняты и другие обозначения циркуляции: $C(\vec{a})$, C.

11.3. Вычисление линейного интеграла

Не доказывая, сформулируем правило вычисления линейных интегралов $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r}$ в следующих двух случаях.

1). Для вычисления интеграла $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r}$ по линии BC, заданной уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, следует:

а) записать интеграл в координатной форме

$$\int\limits_{\cup BC} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz,$$

б) заменить x, y, z в функциях P, Q, R соответственно на $x(t), y(t), z(t)$,

в) заменить dx, dy, dz соответственно на $x'(t)\,dt$, $y'(t)\,dt$, $z'(t)\,dt$,

г) найти интервал изменения параметра t и вычислить получившийся определенный интеграл по этому интервалу.

2). Для вычисления интеграла $\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r}$ по плоской линии BC с уравнением $y = y(x),\ x \in [b, c]$ следует:

а) записать интеграл в координатной форме $\int\limits_{\cup BC} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$,

б) заменить y в функциях P, Q на $y(x)$,

в) заменить dy на $y'(x)\, dx$,

г) вычислить получившийся определенный интеграл по отрезку $[b, c]$.

3). В случае центрального поля $\vec{a} = f(r)\, \vec{r}$ следует учесть, что $\vec{r}^{\,2} = r^2$; дифференцируя это равенство, получим $2\vec{r}\, d\vec{r} = 2r\, dr$ и

$$\int\limits_{\cup BC} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{\cup BC} f(r)\, \vec{r}\, d\vec{r} = \int\limits_{r_B}^{r_C} f(r)\, r\, dr,$$

т.е. линейный интеграл поля сведен к определенному интегралу.

Пример 11.1. Вычислить работу силы $\vec{F} = \left\{x^2, -yz,\ z\right\}$ по прямолинейному перемещению из точки $B(1, 2, -1)$ в точку $C(3, 3, 2)$.

Решение. Работа A силы $\vec{F}$ вычисляется по формуле

$$A = \int\limits_{\cup BC} \vec{F}\, d\vec{r} = \int\limits_{\cup BC} x^2 dx - yz\, dy + z\, dz\ .$$

Для вычисления этого интеграла составим уравнение прямой BC:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{3-2} = \frac{z+1}{2+1} = t\,.$$

Отсюда $x = 2t+1,\ y = t+2,\ z = 3t-1;\quad dx = 2\,dt,\ dy = dt,\ dz = 3\,dt$.

Найдем значение параметра t, соответствующее точке B. Для этого подставим абсциссу $x = 1$ точки B в формулу $x = 2t+1$. Получим $t_B = 0$. Аналогично найдем $t_C = 1$. Заменяя в интеграле x, y, z, dx, dy, dz их выражениями, получим

$$A = \int\limits_{\cup BC} x^2 dx - yz\, dz + z\, dz = \int\limits_0^1 \left[(2t+1)^2 \cdot 2 - (t+2)(3t-1) + (3t-1)\cdot 3\right] dt = 26/3\,.$$

Пример 11.2. Найти циркуляцию поля $\vec{a} = y\vec{i} + 2x\vec{j}$ вдоль линии $OABO$, где OB — дуга параболы $y^2 = x$, OAB — ломаная (рис. 67).

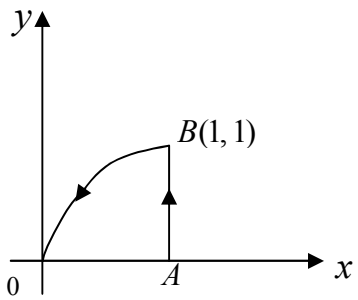

Рис. 67

Решение. Циркуляцию поля $\vec{a}$ вычислим по формуле

$$C(\vec{a}) = \oint\limits_{OABO} \vec{a}\, d\vec{r} \int\limits_{[OA]} \vec{a}\, d\vec{r} + \int\limits_{[AB]} \vec{a}\, d\vec{r} + \int\limits_{\cup BO} \vec{a}\, d\vec{r}\ .$$

На отрезке OA имеем $y = 0,\ dy = 0$. Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{[OA]} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{[OA]} y\, dx + 2x\, dy = 0\,.$$

На отрезке AB имеем $x = 1,\ dx = 0,\ 0 \le y \le 1$. Поэтому

$$I_2 = \int\limits_{[AB]} y\, dx + 2x\, dy = \int\limits_0^1 2\, dy = 2\,.$$

На дуге BO имеем $x = y^2,\ y = y$ (y – параметр), $dx = 2y\,dy,\quad y_B = 1,\ y_O = 0$. Поэтому

$$I_3 = \int\limits_{\cup BO} y\,dx + 2x\,dy = \int\limits_1^0 \left(y \cdot 2y + 2y^2\right) dy = \int\limits_1^0 4y^2 dy = \frac{-4}{3}.$$

Окончательно, $C(\vec{a}) = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

Пример 11.3. Вычислить циркуляцию поля $\vec{a} = \left\{-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right\}$ по окружности (L) радиусом R с центром в начале координат, ориентированной против часовой стрелки.

Решение. Циркуляция поля $\vec{a}$ вычисляется по формуле

$$C(\vec{a}) = \oint\limits_{(L)} \vec{a}\,d\vec{r} = \oint\limits_{(L)} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

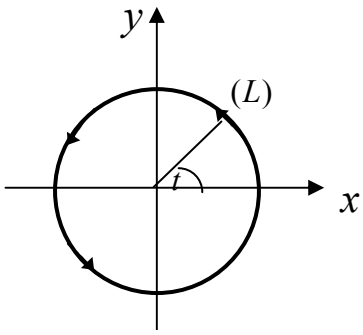

Рис. 68

Для вычисления этого интеграла запишем параметрические уравнения окружности (L): $x = R\cos t,\ \ y = R\sin t$.
Тогда $dx = -R\sin t\,dt$, $dy = R\cos t\,dt$; угол t при движении против часовой стрелки меняется от 0 до 2π (рис. 68). Поэтому $C(\vec{a}) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{-R\sin t \cdot (-R\sin t) + R\cos t \cdot R\cos t}{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi$.

11.4. Формулы Грина и Стокса. Ротор поля

Циркуляцию, как линейный интеграл поля по замкнутому контуру, можно вычислять способами, изложенными в п. 11.3. Однако часто удобно вычислять циркуляцию плоского поля по формуле Грина, а циркуляцию пространственного поля — по формуле Стокса.

Если при обходе замкнутого контура ограниченная область остается слева, то направление обхода называют положительным. Обход в противоположном направлении называют отрицательным.

Теорема 11.1. Пусть функции $P(x, y), Q(x, y)$ и их частные производные непрерывны в области (D) с положительно ориентированной границей (L). Тогда имеет место следующая ***формула Грина:***

$$\boxed{\oint\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}. \qquad (11.5)$$

Доказательство проведем для области (D), описываемой неравенствами $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ \ a \le x \le b$ (рис. 69). Сначала проверим равенство

$$\oint\limits_{(L)} P\,dx = -\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy. \qquad (11.6)$$

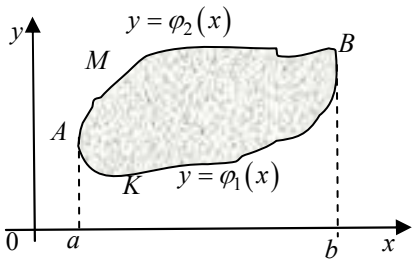

Рис. 69

Сведем криволинейный интеграл $\oint\limits_L P(x, y)\,dx$ к определенному интегралу, подставляя $y = \varphi_1(x)$ на линии AKB и $y = \varphi_2(x)$ на линии BMA:

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y)\,dx = \int\limits_{\cup AKB} P(x,y)\,dx + \int\limits_{\cup BMA} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))\,dx + \int\limits_b^a P(x,\varphi_2(x))\,dx,$$

$$\oint\limits_{(L)} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \left[P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x))\right]dx.$$

Теперь преобразуем двойной интеграл, сведя его сначала к повторному, а затем к определенному интегралу:

$$-\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = -\int\limits_a^b dx\left[P(x,y)\right]\Big|_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} = \int\limits_a^b \left[P\left(x,\varphi_1(x)\right) - P\left(x,\varphi_2(x)\right)\right]dx\ .$$

И криволинейный, и двойной интегралы из формулы (11.6) равны одному и тому же определенному интегралу и, следовательно, равны между собой. Аналогично проверяется равенство

$$\oint\limits_{(L)} Q\,dy = \iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy. \qquad (11.7)$$

Складывая равенства (11.6) и (11.7), получим формулу Грина.

Замечание. Нарушение условий теоремы Грина может привести к неверным результатам. Например, для поля $\vec{a} = \left\{-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right\}$ нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right) - x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right) - y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0,$$

но циркуляция поля по окружности (L) с центром в начале координат отличнаот нуля, $C(\vec{a}, L) = 2\pi$ (пример 11.3). В этом примере нарушены условия теоремы Грина, т.к. внутри контура (L) содержится точка $(0, 0)$, в которой функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ не определены.

Пример 11.4. Используя формулу Грина, вычислить циркуляцию поля $\vec{a} = y\vec{i} + 2x\vec{j}$ вдоль линии $OABO$ (рис. 67).

Решение. Вычислим циркуляцию $C = \oint\limits_{OABO} y\,dx + 2x\,dy$, используя формулу Грина для $P = y,\ Q = 2x$: $C = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_{(D)} dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^1 dx = \int\limits_0^1 \left(1-y^2\right)dy = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Сравните это решение с решением примера 11.2, где циркуляция этого поля была вычислена без формулы Грина.

Для обобщения формулы Грина на пространственный случай введем понятие ротора векторного поля $\vec{a}$.

Ротором векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ называется вектор

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{\nabla}\times\vec{a}}\ . \qquad (11.8)$$

При вычислении $\operatorname{rot}\vec{a}$ следует разложить определитель по элементам первой строки. Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial x}P=\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}Q=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}R=\frac{\partial R}{\partial y}$ и т. д., получим

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\,.$$

Понятие ротора позволяет удобно вычислять циркуляцию векторного поля, опираясь на следующую теорему (доказательство теоремы опустим).

Теорема 11.2. Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и их частные производные непрерывны на ориентированной поверхности (σ), натянутой на контур (L), причем ориентации контура (L) и поверхности (σ) согласованы. Тогда имеет место следующая ***формула Стокса***:

$$\boxed{\oint\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}=\int\limits_{(\sigma)}\operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{\sigma}}\,. \qquad (11.9)$$

В этой формуле ориентации контура (L) и поверхности (σ) согласованы, т. е., глядя с конца выбранных нормальных векторов поверхности (σ), обход контура (L) виден против часовой стрелки (рис. 70).

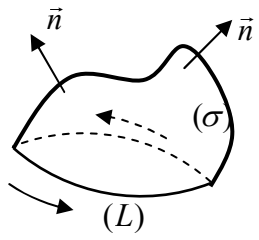

Рис. 70

Итак, по формуле Стокса циркуляция поля $\vec{a}$ по контуру (L) равна потоку ротора поля $\vec{a}$ через поверхность (σ), натянутую на контур (L).

Пример 11.5. Для поля $\vec{a}=\left(20x^4+1\right)z\,\vec{i}-5y\,\vec{j}+4x^5\vec{k}$ найти его циркуляцию по окружности $x^2+z^2=9$, лежащей в плоскости $y=4$ и ориентированной против часовой стрелки, если смотреть с конца оси OY (рис. 71).

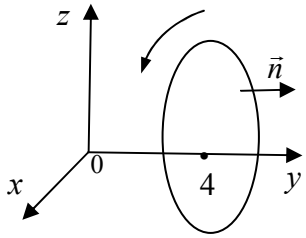

Рис. 71

Решение. Циркуляция поля $\vec{a}$ вычисляется по формуле $C=\oint\vec{a}\,d\vec{r}$. Непосредственное вычисление этого интеграла достаточно трудоемко. Посмотрим, облегчит ли вычисление циркуляции применение формулы Стокса. Для этого вычислим ротор

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \left(20x^4+1\right)z & -5y & 4x^5\end{vmatrix}=\vec{i}\,(0-0)-\vec{j}\left(20x^4-20x^4-1\right)+\vec{k}\,(0-0)=\vec{j}.$$

По формуле Стокса имеем: $C=\oint\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}=\int\limits_{(\sigma)}\operatorname{rot}\vec{a}\;\overrightarrow{d\sigma}=\int\limits_{(\sigma)}(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})\,d\sigma$.

В качестве поверхности (σ), натянутой на окружность, возьмем круг, ограниченный этой окружностью. Нормальный вектор к этой поверхности направлен вдоль оси OY, т.е. $\vec{n}=\vec{j}$; скалярное произведение $\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\left|\vec{j}\right|^2=1$;

$$C=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n}\right)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}d\sigma=S=\pi R^2=9\pi\,.$$

Остановимся более подробно на свойствах ротора.

Физический смысл ротора

Пусть твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найдем поле линейных скоростей точек тела и ротор этого поля.

Рассмотрим систему координат, направив ось Oz по оси вращения (рис. 72). Как известно из кинематики, линейная скорость $\vec{v}$ точки M равна векторному произведению $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки M, $\vec{r} = \{x, y, z\}$, $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости, направленный по оси вращения с длиной, равной величине угловой скорости ω, т. е. $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \{0, 0, \omega\}$.

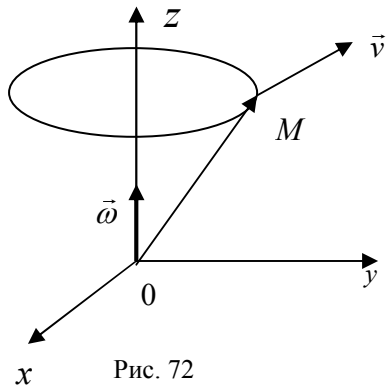

Рис. 72

Найдем поле линейных скоростей:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\,\vec{i} + \omega x\,\vec{j}\,.$$

Ротор этого поля вычислим по формуле (11.8):

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}(\omega x)\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial z}(-\omega y)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\omega x) - \frac{\partial}{\partial y}(-\omega y)\right) = 2\,\omega\vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Таким образом, ротор поля линейных скоростей в любой точке равен удвоенному вектору угловой скорости.

В произвольном поле его ***ротор***, вычисленный в точке M, также ***характеризует вращательную способность поля*** в этой точке.

Инвариантное определение ротора

Рассмотрим некоторую поверхность (σ), содержащую точку M, и единичный нормальный вектор $\vec{n}$ этой поверхности (рис. 73). Вычислим по формуле Стокса циркуляцию поля $\vec{a}$ по произвольному контуру (L), лежащему на поверхности (σ):

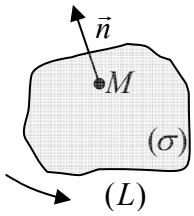

Рис. 73

$$C(\vec{a}, L) = \oint\limits_{(L)} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a}\;\overrightarrow{d\sigma} = \int\limits_{(\sigma)} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})\,d\sigma\,.$$

Воспользуемся теоремой о среднем для поверхностного интеграла 1-го рода:

$$C(\vec{a}, L) = \int\limits_{(\sigma)} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})\,d\sigma = (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})_{\widetilde{M}} \cdot \sigma = \left(\text{пр}_{\vec{n}}\operatorname{rot}\vec{a}\right)_{\widetilde{M}} \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad \left(\text{пр}_{\vec{n}}\operatorname{rot}\vec{a}\right)_{\widetilde{M}} = \frac{C(\vec{a}, L)}{\sigma}\,.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при стягивании поверхности (σ) в точку M, получим:

$$\boxed{\left(\text{пр}_{\vec{n}}\operatorname{rot}\vec{a}\right)_M = \lim_{\substack{(\sigma)\to M \\ (\sigma)\perp\vec{n}}} \frac{C(\vec{a}, L)}{\sigma}}. \qquad (11.10)$$

Эту величину называют плотностью циркуляции поля $\vec{a}$ в точке M в направлении вектора $\vec{n}$. Плотность циркуляции, как проекция $\text{пр}_{\vec{n}}\operatorname{rot}\vec{a}$, принимает

наибольшее значение, равное $|\operatorname{rot}\vec{a}|$, когда векторы $\operatorname{rot}\vec{a}$ и $\vec{n}$ сонаправлены. Поэтому получаем следующее ***инвариантное*** (не зависящее от системы координат) ***определение*** ротора.

Ротор поля $\vec{a}$ в точке M есть вектор, удовлетворяющий условиям:

а) в направлении этого вектора плотность циркуляции поля $\vec{a}$ в точке M принимает наибольшее значение,

б) по величине он равен наибольшей плотности циркуляции поля $\vec{a}$ в точке M.

Дифференциальные свойства ротора

1) $\operatorname{rot}\vec{c}=0$, или $\vec{\nabla}\times\vec{c}=0$, ($\vec{c}$ – постоянный вектор),

2) $\operatorname{rot}\vec{r}=0$, или $\vec{\nabla}\times\vec{r}=0$, ($\vec{r}$ – радиус-вектор),

3) $\operatorname{rot}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{rot}\vec{b}$, или $\vec{\nabla}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{\nabla}\times\vec{a}+\vec{\nabla}\times\vec{b}$,

4) $\operatorname{rot}\left(f\ \vec{a}\right)=f\ \operatorname{rot}\vec{a}+\left(\operatorname{grad}f\right)\times\vec{a}$, или $\vec{\nabla}\times\left(f\ \vec{a}\right)=f\ \left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{\nabla}f\right)\times\vec{a}$,

(f – скалярное поле, $\vec{a}$ – векторное поле),

5) $\operatorname{rot}\left(c\cdot\vec{a}\right)=c\cdot\operatorname{rot}\vec{a}$, или $\vec{\nabla}\times\left(c\cdot\vec{a}\right)=c\cdot\vec{\nabla}\times\vec{a}$, ($c$ – константа),

6) $\operatorname{rot}\left(f\cdot\vec{c}\right)=\left(\operatorname{grad}f\right)\times\vec{c}$, или $\vec{\nabla}\times\left(f\ \vec{c}\right)=\left(\vec{\nabla}f\right)\times\vec{c}$, ($\vec{c}$ – постоянный вектор),

7) $\operatorname{rot}\left(f\left(r\right)\cdot\vec{r}\right)=0$ или $\vec{\nabla}\times\left(f\left(r\right)\cdot\vec{r}\right)=0$.

Проверим эти свойства:

свойства 1) — 3) проверяются непосредственным вычислением,

$$4)\ \operatorname{rot}\left(f\cdot\vec{a}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f\,P & f\,Q & f\,R\end{vmatrix}=f\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=f\operatorname{rot}\vec{a}+\left(\operatorname{grad}f\right)\times\vec{a},$$

свойство 5) есть следствие свойства 4) при $f=c$,

свойство 6) есть следствие свойства 4) при $\vec{a}=\vec{c}$,

7) по свойству 4) ротора $\operatorname{rot}f\left(r\right)\vec{r}=f\left(r\right)\operatorname{rot}\vec{r}+\left(\operatorname{grad}f\left(r\right)\right)\times\vec{r}$, а по свойствам градиента $\operatorname{grad}f\left(r\right)=f'\left(r\right)\operatorname{grad}r=f'\left(r\right)\frac{\vec{r}}{r}$. Учитывая, что $\operatorname{rot}\vec{r}=0$, $\vec{r}\times\vec{r}=0$, получим

$$\operatorname{rot}f\left(r\right)\vec{r}=f\left(r\right)\operatorname{rot}\vec{r}+\left(f'\left(r\right)\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\vec{r}=0.$$

11.5. Условия независимости линейного интеграла от формы пути

В различных приложениях важно знать, зависит ли линейный интеграл поля $\int\vec{a}\,d\vec{r}$ от формы кривой интегрирования или он зависит только от начальной и конечной точек этой кривой (с физической точки зрения – зависит ли работа силы от формы пути). Рассмотрим три условия независимости линейного интеграла поля от формы пути интегрирования. Как и раньше, будем предполагать, что вектор-функция $\vec{a}\left(M\right)=\left\{P\left(M\right),\,Q\left(M\right),\,R\left(M\right)\right\}$ дифференцируема.

Теорема 11.3 (о равенстве нулю циркуляции). Для того чтобы линейный интеграл поля не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы циркуляция поля по любой замкнутой кривой равнялась нулю.

Доказательство. Вычислим циркуляцию поля $\vec{a}$ по произвольной замкнутой кривой $ABCDA$ (рис. 74)

$$C(\vec{a}) = \oint\limits_{\cup ABCDA} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{\cup ABC} \vec{a}\, d\vec{r} + \int\limits_{\cup CDA} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{\cup ABC} \vec{a}\, d\vec{r} - \int\limits_{\cup ADC} \vec{a}\, d\vec{r}.$$

Из этого равенства следует: циркуляция $C(\vec{a})$ равна нулю тогда и только тогда, когда $\int\limits_{\cup ABC} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{\cup ADC} \vec{a}\, d\vec{r}$, т. е. интеграл $\int \vec{a}\, d\vec{r}$ по двум произвольным линиям с общим началом и общим концом принимает одно и то же значение и, значит, не зависит от формы пути интегрирования.

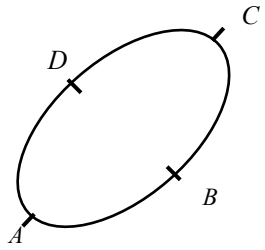

Рис.74

Теорема 11.3 дает критерий независимости линейного интеграла поля от формы пути интегрирования, однако этот критерий трудно проверить.

Для формулировки следующего более эффективного критерия введем новое понятие. Область назовем ***односвязной,*** если на любой ее замкнутый контур можно натянуть поверхность, целиком лежащую в этой области.

Например, односвязными областями будут круг, шар, куб; к неодносвязным областям относятся кольцо, тор (“бублик”) (рис. 75).

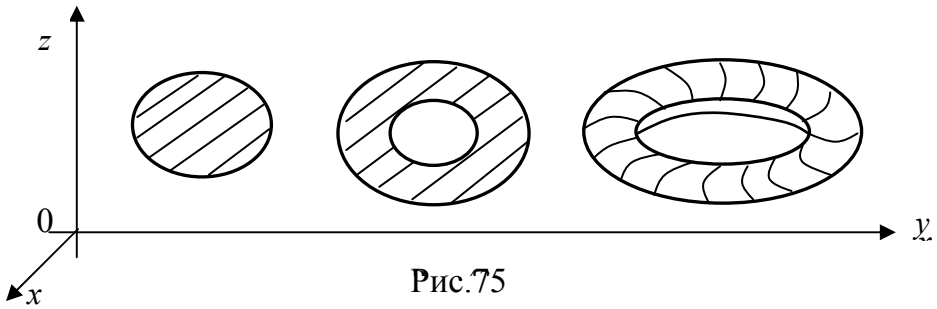

Рис.75

Теорема 11.4 (о равенстве нулю ротора). Для того чтобы линейный интеграл поля не зависел от формы пути интегрирования, необходимо, а для односвязного поля и достаточно, чтобы ротор поля в каждой точке равнялся нулю.

Необходимость. Пусть линейный интеграл поля $\vec{a}$ не зависит от формы пути интегрирования и, значит, циркуляция $C(\vec{a}, L)$ по любому замкнутому контуру равна нулю. Тогда по формуле (11.10)

$$\left(\text{пр}_{\vec{n}} \operatorname{rot} \vec{a}\right)_M = \lim_{\substack{(\sigma) \to M \\ (\sigma) \perp \vec{n}}} \frac{C(\vec{a}, L)}{\sigma} = 0 \ ,$$

т.е. проекция ротора на любой вектор $\vec{n}$ в любой точке M равна нулю. Поэтому $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ в любой точке поля.

Достаточность. Пусть $\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}$ в односвязной области (D). Возьмем любой замкнутый контур (L) в (D). В силу односвязности области (D) на контур (L) можно натянуть поверхность (σ), целиком лежащую в области (D). Вычислим циркуляцию поля $\vec{a}$ по контуру (L), используя формулу Стокса и условие $\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}$:

$$C(\vec{a},L)=\oint\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}=\int\limits_{(\sigma)}\left(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n}\right)d\sigma=0\,.$$

Так как циркуляция поля $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру (L) равна нулю, то по теореме 11.3 интеграл $\int\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}$ не зависит от формы пути. Теорема доказана.

Теорема 11.5 (о подынтегральном выражении). Для того чтобы линейный интеграл поля $\int\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}$ не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение $\vec{a}\,d\vec{r}$ было полным дифференциалом некоторой функции U.

Необходимость. Пусть $\int\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}$ не зависит от формы пути. Покажем, что функция $U(M)=\int\limits_{(M_0M)}\vec{a}\,d\vec{r}$ есть искомая функция (M_0 — фиксированная точка), т.е. $\vec{a}\,d\vec{r}=dU$.

Для этого вычислим частное приращение

$$\Delta_x U=U(x+\Delta x,y,z)-U(x,y,z)=U(M_1)-U(M)=\int\limits_{(M_0M_1)}\vec{a}\,d\vec{r}-\int\limits_{(M_0M)}\vec{a}\,d\vec{r}.$$

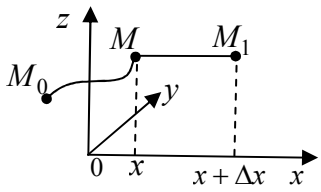

Рис. 76

Так как интеграл $\int\limits_{(L)}\vec{a}\,d\vec{r}$ не зависит от формы пути, то кривую M_0M выберем произвольно, а в качестве кривой M_0M_1 возьмем кривую M_0M и отрезок прямой MM_1 (рис. 76). Тогда по свойству аддитивности интеграла

$$\Delta_x U=\int\limits_{(M_0M_1)}\vec{a}\,d\vec{r}-\int\limits_{(M_0M)}\vec{a}\,d\vec{r}=\left[\int\limits_{(M_0M)}\vec{a}\,d\vec{r}+\int\limits_{(MM_1)}\vec{a}\,d\vec{r}\right]-\int\limits_{(M_0M)}\vec{a}\,d\vec{r}=\int\limits_{(MM_1)}\vec{a}\,d\vec{r}.$$

Запишем интеграл в координатной форме и учтем, что на отрезке MM_1 меняется только x, а y, z – постоянны, значит, $dy=0$, $dz=0$ и

$$\Delta_x U=\int\limits_{(MM_1)}\vec{a}\,d\vec{r}=\int\limits_{(MM_1)}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int\limits_{x}^{x+\Delta x}P(x,y,z)\,dx.$$

К получившемуся определенному интегралу применим теорему о среднем:

$$\Delta_x U=\int\limits_{x}^{x+\Delta x}P(x,y,z)\,dx=P(\tilde{x},y,z)\cdot\Delta x\,;$$

здесь $\tilde{x}$ – некоторая промежуточная точка между x и $x+\Delta x$. Тогда

$$U'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x U}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(\tilde{x},y,z)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(\tilde{x},y,z)=P(x,y,z)\,.$$

Итак, $U'_x = P(x,y,z)$. Аналогично можно показать, что $U'_y = Q(x,y,z)$, $U'_z = R(x,y,z)$. Тогда $\vec{a}\,d\vec{r} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U'_x\,dx + U'_y\,dy + U'_z\,dz = dU$.

Достаточность. Пусть существует функция $U(x, y, z)$ такая, что $\vec{a}\,d\vec{r} = dU$. Рассмотрим произвольную дугу AB с параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t);\ \ t \in [t_A; t_B].$$

Сведем интеграл $\int\limits_{\cup AB} \vec{a}\,d\vec{r}$ по этой дуге к определенному интегралу и применим формулу Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{\cup AB} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{\cup AB} dU(x, y, z) = \int\limits_{t_A}^{t_B} dU\big(x(t), y(t), z(t)\big) = U\big(x(t), y(t), z(t)\big)\Big|_{t_A}^{t_B} =$$

$$= U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A) = U(B) - U(A).$$

Таким образом, значение интеграла $\int\limits_{\cup AB} \vec{a}\,d\vec{r}$ зависит только от точек A, B и не зависит от формы линии AB.

Попутно мы получили важную формулу, являющуюся аналогом формулы Ньютона-Лейбница для криволинейных интегралов:

$$\boxed{\int\limits_{\cup AB} dU = U(B) - U(A).} \qquad (11.11)$$

Теоремы 11.3, 11.4, 11.5 иногда объединяют в одну:

Если область (D) является односвязной, то четыре условия равносильны:
1) линейный интеграл $\int\limits_{(L)} \vec{a}\,d\vec{r}$ не зависит от формы пути интегрирования;
2) линейный интеграл $\int\limits_{(L)} \vec{a}\,d\vec{r}$ по любому замкнутому контуру в (D) равен нулю;
3) $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ во всех точках области (D);
4) выражение $\vec{a}\,d\vec{r}$ является полным дифференциалом некоторой функции U.

12. Некоторые классы векторных полей

12.1. Потенциальное поле

Как и раньше, предполагаем, что координаты вектора поля $\vec{a}$ — функции P, Q, R непрерывны и имеют частные производные.

Векторное поле $\vec{a}$ называется ***потенциальным,*** если оно является ***полем градиента*** некоторой скалярной функции U, т.е. $\vec{a} = \operatorname{grad} U$; при этом функцию U называют ***скалярным потенциалом*** векторного поля.

Напомним, что $\operatorname{grad} U = U'_x\vec{i} + U'_y\vec{j} + U'_z\vec{k}$. Так как $\operatorname{grad}(U + C) = \operatorname{grad} U$, то $U + C$ также является потенциалом.

Свойства потенциального поля

1). Поле $\vec{a}$ является потенциальным с потенциалом U тогда и только тогда, когда $\vec{a}\cdot d\vec{r} = dU$.
2). Односвязное поле $\vec{a}$ потенциально тогда и только тогда, когда в каждой точке поля $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$.
3). В потенциальном поле линейный интеграл $\int\limits_{(L)} \vec{a}\, d\vec{r}$ не зависит от формы пути.
4). В потенциальном поле циркуляция по любому контуру, не охватывающему особых точек поля, равна нулю.
5). В потенциальном поле циркуляции по контурам, охватывающим все особые точки поля, равны между собой.
6). В потенциальном поле линейный интеграл по дуге равен разности потенциалов конца и начала дуги.

Проверим эти свойства.

1). Поле $\vec{a}$ — потенциально, т.е. $\vec{a} = \operatorname{grad} U = \{U'_x, U'_y, U'_z\}$ тогда и только тогда, когда

$$\vec{a}\cdot d\vec{r} = \{U'_x, U'_y, U'_z\}\cdot\{dx, dy, dz\} = U'_x\, dx + U'_y\, dy + U'_z\, dz = dU .$$

2). Это свойство следует из свойства 1) и теорем 11.5, 11.4.
3). Это свойство следует из свойства 1) и теоремы 11.5.
4). Это свойство является следствием свойства 2) и теоремы 11.4, так как поле внутри контура, не охватывающего особых точек, является односвязным.
5). Пусть (L), (l) — контуры, окружающие все особые точки $P_1,\ldots,P_n$ поля (рис. 77); ориентируем контуры так, чтобы при обходе ограниченная ими область (σ) оставалась слева, т.е. (L) – против часовой стрелки, (l) – по часовой стрелке; контуры с такой ориентацией обозначим соответственно (L^+), (l^-). На поверхности (σ) с границей $(\gamma) = (L^+)\cup(l^-)$ поле потенциально, и потому $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ по свойству 3) и теореме 11.4. Тогда по формуле Стокса

$$\oint\limits_{(\gamma)} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{a}\ \overrightarrow{d\sigma} = 0 .$$

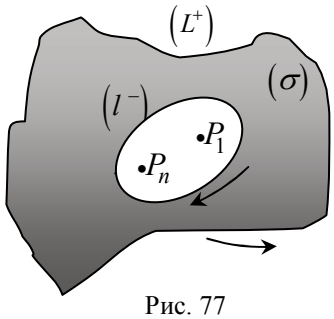

Рис. 77

С другой стороны,

$$\oint\limits_{(\gamma)} \vec{a}\, d\vec{r} = \oint\limits_{(L^+)} \vec{a}\, d\vec{r} + \oint\limits_{(l^-)} \vec{a}\, d\vec{r} = \oint\limits_{(L^+)} \vec{a}\, d\vec{r} - \oint\limits_{(l^+)} \vec{a}\, d\vec{r} ,$$

и, следовательно, $\oint\limits_{(L^+)} \vec{a}\, d\vec{r} = \oint\limits_{(l^+)} \vec{a}\, d\vec{r}$.

6). Если поле $\vec{a}$ потенциально и U — его потенциал, то $\vec{a}\, d\vec{r} = dU$ и по формуле (11.11)

$$\int\limits_{\cup AB} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{\cup AB} dU = U(B) - U(A) .$$

В силовом потенциальном поле свойства 3 и 6 означают, что работа сил поля по дуге не зависит от формы дуги и равна разности потенциалов конца и начала дуги.

Рассмотрим способы отыскания потенциала U поля $\vec{a}$.

Отыскание потенциала по выражению $\vec{a}\,d\,\vec{r}$

Воспользуемся первым свойством потенциального поля. Если удается представить выражение $\vec{a}\,d\,\vec{r}$ в виде полного дифференциала некоторой функции U, то поле $\vec{a}$ — потенциально, а U — его потенциал.

Пример 12.1. Показать, что поле $\vec{a}$ потенциально и найти его потенциал, если

$$1)\ \vec{a} = 2x\vec{i} + 3y^2\vec{j} + 4z^3\vec{k}, \qquad 2)\ \vec{a} = \{yz, xz, xy\}, \qquad 3)\ \vec{a} = \frac{\{x, y, z\}}{x^2+y^2+z^2+1}.$$

Решение

1). $\vec{a}\cdot d\,\vec{r} = 2x\,dx + 3y^2\,dy + 4\,z^3\,dz = d\left(x^2\right) + d\left(y^3\right) + d\left(z^4\right) = d\left(x^2+y^3+z^4\right)$.

Следовательно, поле $\vec{a}$ — потенциально; $U = x^2+y^3+z^4$ — его потенциал.

2). $\vec{a}\,d\,\vec{r} = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = d(xyz)$.

Следовательно, поле $\vec{a}$ потенциально; $U = xyz$ — его потенциал.

3). $\vec{a}\,d\,\vec{r} = \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x^2+y^2+z^2+1} = \dfrac{\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2+z^2+1\right)}{x^2+y^2+z^2+1} = \dfrac{1}{2}d\left(\ln\left(x^2+y^2+z^2+1\right)\right)$.

Следовательно, поле $\vec{a}$ — потенциально; $U = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2+1\right)$ — его потенциал.

Отыскание потенциала по определению

Для потенциального поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ и его потенциала U имеем $\operatorname{grad} U = \vec{a}$ или в координатной форме

$$U'_x = P, \quad U'_y = Q, \quad U'_z = R. \tag{12.1}$$

Проинтегрируем первое из этих равенств по x; при этом появится константа, не зависящая от переменной интегрирования x (но зависящая от y, z):

$$U = \int P(x, y, z)\,dx + c(y, z).$$

Для отыскания функции $c(y,z)$ следует подставить получившуюся функцию $U(x,y,z)$ во второе и третье равенства (12.1).

Пример 12.2. Проверить, что поле $\vec{a} = \left(\frac{z}{y} + x\right)\vec{i} - \frac{xz}{y^2}\vec{j} + \left(\frac{x}{y} + 1\right)\vec{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

Решение. Для данного поля проверить его потенциальность и найти потенциал по выражению $\vec{a}\,d\,\vec{r}$ сложно. Поэтому потенциальность поля проверим по условию $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, а потенциал найдем исходя из формул (12.1). Итак, вычислим ротор:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{z}{y} + x & \dfrac{-xz}{y^2} & \dfrac{x}{y} + 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(-\frac{x}{y^2} + \frac{x}{y^2}\right) - \vec{j}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y}\right) + \vec{k}\left(-\frac{z}{y^2} + \frac{z}{y^2}\right) = \vec{0}.$$

Значит поле $\vec{a}$ потенциально и его потенциал U удовлетворяет условию $\operatorname{grad} U = \vec{a}$ или в координатной форме

$$U'_x = \frac{z}{y} + x, \quad U'_y = -\frac{x\,z}{y^2}, \quad U'_z = \frac{x}{y} + 1. \tag{12.2}$$

Проинтегрируем первое из этих равенств по x

$$U = \int \left(\frac{z}{y} + x \right) dx = \frac{z}{y} x + \frac{x^2}{2} + c\,(y, z)$$

и подставим получившуюся функцию $U(x, y, z)$ во второе и третье равенства (12.2):

$$U'_y = \frac{-x\,z}{y^2} + c'_y(y, z) = \frac{-x\,z}{y^2}, \quad U'_z = \frac{x}{y} + c'_z(y, z) = \frac{x}{y} + 1.$$

Отсюда $c'_y = 0$, $c'_z = 1$. Следовательно, $c\,(y, z) = z + c_1$, где c_1 — константа. Поэтому

$$U = \frac{z}{y} x + \frac{x^2}{2} + z + c_1.$$

Отыскание потенциала центрального поля $\vec{a} = f(r)\vec{r}$

Воспользуемся соотношением $\vec{r}^{\,2} = r^2$, где $r = |\vec{r}\,|$. Тогда $d\,\vec{r}^{\,2} = dr^2$, $2\vec{r} \cdot d\,\vec{r} = 2\,r \cdot dr$ и, значит, $\vec{r}\,d\,\vec{r} = r\,dr$. Поэтому

$$\vec{a} \cdot d\,\vec{r} = f(r)\vec{r} \cdot d\,\vec{r} = f(r)\,r\,dr.$$

Введем функцию $U = \int f(r)\,r\,dr$. Так как $U'_r = f(r)\,r$, то $\vec{a}\,d\,\vec{r} = f(r)\,r\,dr = U'(r)\,dr = dU$. Следовательно, по свойству 1

центральное поле $\vec{a} = f(r)\vec{r}$ потенциально и его потенциал $U = \int f(r)\,r\,dr$.

Пример 12.3. Найти потенциал поля напряженностей $\vec{E} = \frac{1}{r^3}\,\vec{r}$.

Решение. Поле $\vec{E}$ — центральное, следовательно, оно потенциальное, и его потенциал $U = \int \frac{1}{r^3} r\,dr = \int \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{r} + C$.

12.2. Соленоидальное поле

Поле $\vec{a}$ называют ***соленоидальным,*** если оно является ***полем ротора*** некоторой векторной функции $\vec{b}$, т.е. $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$; при этом вектор $\vec{b}$ называют векторным потенциалом поля $\vec{a}$.

Свойства соленоидального поля

1). Поле $\vec{a}$ является соленоидальным тогда и только тогда, когда $\operatorname{div}\vec{a} = 0$. 2). В соленоидальном поле поток через замкнутую поверхность, не содержащую внутри особых точек поля, равен нулю. 3). В соленоидальном поле потоки через замкнутые поверхности, окружающие все особые точки поля, равны между собой. 4). В соленоидальном поле поток через любое поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянное значение (называемое интенсивностью трубки).

Проверим эти свойства.

1). Пусть поле $\vec{a}$ — соленоидально, т.е.

$$\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial b_3}{\partial y} - \frac{\partial b_2}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial b_3}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y}\right)\vec{k};$$

тогда

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial b_3}{\partial y} - \frac{\partial b_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial b_3}{\partial x} + \frac{\partial b_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 b_3}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 b_3}{\partial y\,\partial x}\right) + \left(-\frac{\partial^2 b_2}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 b_2}{\partial z\,\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 b_1}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 b_1}{\partial z\,\partial y}\right) = 0;$$

можно показать, что справедливо и обратное: если $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, то $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$.

2). В соленоидальном поле $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ и потому по формуле Остроградского поток через замкнутую поверхность, не содержащую внутри особых точек поля,

$$\Pi_\sigma = \oint\limits_{(\sigma)} (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV = 0.$$

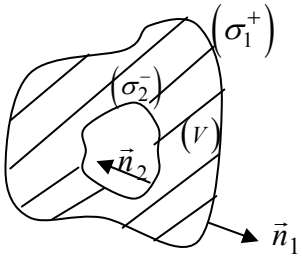

Рис. 78

3). Пусть (σ_1^+), (σ_2^-) — поверхности, окружающие все особые точки поля; их ориентация указана на рис. 78. Обозначим через (V) — тело с границей $(\sigma) = (\sigma_1^+) \cup (\sigma_2^-)$; внутри тела (V) поле определено, $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, и потому по формуле Остроградского

$$\Pi_\sigma = \int\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{a}\, dV = 0.$$

С другой стороны, $\Pi_\sigma = \Pi_{\sigma_1^+} + \Pi_{\sigma_2^-} = \Pi_{\sigma_1^+} - \Pi_{\sigma_2^+}$ и следовательно, $\Pi_{\sigma_1^+} = \Pi_{\sigma_2^+}$.

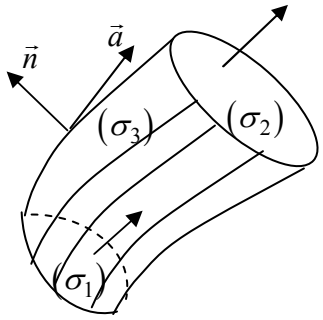

Рис. 79

4). Рассмотрим векторную трубку поля, т.е. совокупность его векторных линий, пересекающих некоторую замкнутую линию (рис. 79). Пусть $(\sigma_1^+), (\sigma_2^+)$ – поперечные сечения векторной трубки с указанной на рис. 79 ориентацией; (σ_3) – поверхность векторной трубки, состоящая из векторных линий; $(\sigma) = (\sigma_1^-) \cup (\sigma_2^+) \cup (\sigma_3)$ – граница тела (V).

Вычислим поток поля через поверхность (σ):

с одной стороны, по свойству 2) этот поток равен нулю; с другой стороны,

$$\Pi_\sigma = \Pi_{\sigma_1^-} + \Pi_{\sigma_2^+} + \Pi_{\sigma_3} = -\Pi_{\sigma_1^+} + \Pi_{\sigma_2^+} + \Pi_{\sigma_3},$$

причем, $\Pi_{\sigma_3} = \int\limits_{(\sigma_3)} (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma = 0$, т.к. (σ_3) состоит из векторных линий, значит, вектор поля $\vec{a}$ направлен по касательной к векторной линии, т.е. $\vec{a} \perp \vec{n}$ и $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$.

Следовательно, $\Pi_\sigma = -\Pi_{\sigma_1^+} + \Pi_{\sigma_2^+} = 0$ или $\Pi_{\sigma_1^+} = \Pi_{\sigma_2^+}$.

Пример 12.4. Найти поток поля напряженностей $\vec{E} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$, создаваемого зарядом q, через произвольную замкнутую поверхность (σ).

Решение. Дивергенция поля $\vec{E}$ равна нулю (пример 10.9), потому поле напряженностей $\vec{E}$ является соленоидальным всюду, где определено (т.е. в точках $r \neq 0$, отличных от начала координат).

Тогда по свойству 2) соленоидального поля поток поля через любую замкнутую поверхность, не окружающую начала координат, равен нулю.

По свойству 3) соленоидального поля поток поля через замкнутую поверхность, окружающую начало координат, равен, например, потоку этого поля через сферу с центром в начале координат (он был вычислен в примере 10.1) и равен $4\pi q$.

Отыскание векторного потенциала

Прежде всего отметим, что векторный потенциал $\vec{b}$ соленоидального поля $\vec{a}$ определяется с точностью до градиента произвольной функции.

Действительно, так как поле $\operatorname{grad} U -$ потенциально, то $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = 0$ и потому

$$\operatorname{rot}\left(\vec{b} + \operatorname{grad} U\right) = \operatorname{rot}\vec{b} + \operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \operatorname{rot}\vec{b} = \vec{a};$$

значит, вектор $\vec{b} + \operatorname{grad} U$ также является векторным потенциалом поля $\vec{a}$. Поэтому подбором вектора $\operatorname{grad} U$ можно добиться того, чтобы одна из координат векторного потенциала $\vec{b}$ равнялась нулю, т.е. можно искать векторный потенциал, например, в виде $\vec{b} = \{b_1, b_2, 0\}$. Тогда

$$\operatorname{rot}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial b_2}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(-\frac{\partial b_1}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Так как $\operatorname{rot}\vec{b} = \vec{a}$, $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, то получим систему уравнений

$$-\frac{\partial b_2}{\partial z} = P, \quad \frac{\partial b_1}{\partial z} = Q, \quad \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} = R. \tag{12.3}$$

Проинтегрируем первое и второе из равенств (12.3) по z:

$$b_2 = -\int P\,dz + \varphi(x,y), \quad b_1 = \int Q\,dz + \psi(x,y);$$

здесь $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ – произвольные функции, не зависящие от переменной интегрирования z. Подставляя найденные b_2, b_1 в третье из равенств (12.3), найдем функции $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$.

Пример 12.5. Проверить соленоидальность поля $\vec{a} = 2y\vec{i} - z\vec{j} + 2x\vec{k}$ и найти его векторный потенциал.

Решение. Так как $\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(2y) + \frac{\partial}{\partial y}(-z) + \frac{\partial}{\partial z}(2x) = 0$, то поле соленоидально, т.е. $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$. Будем искать векторный потенциал в виде $\vec{b} = \{b_1, b_2, 0\}$. Тогда

$$\operatorname{rot}\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ b_1 & b_2 & 0\end{vmatrix}=\left(-\frac{\partial b_2}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(-\frac{\partial b_1}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Так как $\operatorname{rot}\vec{b}=\vec{a}=2y\vec{i}-z\vec{j}+2x\vec{k},$ то получим систему уравнений

$$\frac{\partial b_2}{\partial z}=-2y,\ \ \frac{\partial b_1}{\partial z}=-z,\ \ \frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}=2x. \qquad (12.4)$$

Проинтегрируем первое и второе из этих равенств по z:

$$b_2=-\int 2y\,dz=-2yz+\varphi(x,y),$$
$$b_1=\int -z\,dz=-\frac{z^2}{2}+\psi(x,y).$$

Подставив эти выражения для b_2, b_1 в третье из равенств (12.4), получим

$$\frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}=\varphi'_x(x,y)-\psi'_y(x,y)=2x.$$

В частности, можно взять $\psi(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=x^2$. Тогда векторный потенциал

$$\vec{b}=\{b_1,\,b_2,\,0\}=\left\{-\frac{z^2}{2},\,-2yz+x^2,\,0\right\}.$$

12.3. Гармонические поля

Гармоническое скалярное поле

Скалярное поле f называется ***гармоническим***, если функция f удовлетворяет ***уравнению Лапласа***

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=0.$$

Правая часть уравнения Лапласа называется ***оператором Лапласа*** и обозначается Δf. Оператор Лапласа будет использован в дальнейшем при решении задач математической физики (задач колебания, теплопроводности, диффузии).

В прямоугольной системе координат

$$\operatorname{grad} f=\{f'_x,\,f'_y,\,f'_z\},\quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=(f'_x)'_x+(f'_y)'_y+(f'_z)'_z=\Delta f$$

и уравнение Лапласа примет вид

$$\Delta f=f''_{xx}+f''_{yy}+f''_{zz}=0.$$

Пример 12.6. Показать, что поле $f(r)=\frac{1}{r}$ является гармоническим в пространстве R_3, а поле $f(r)=\ln r$ является гармоническим в пространстве R_2.

Решение. 1). По свойствам градиента $\operatorname{grad}\frac{1}{r}=\left(\frac{1}{r}\right)'\operatorname{grad} r=-\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$.

По свойствам дивергенции $\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)=\operatorname{div}\left(\frac{-1}{r^3}\vec{r}\right)=-\left(\frac{1}{r^3}\operatorname{div}\vec{r}+\vec{r}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}\right)$.

Учитывая, что $\vec{r}=\{x,y,z\}$, $\operatorname{div}\vec{r}=3$ в пространстве R_3, $\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}=\frac{-3}{r^4}\frac{\vec{r}}{r}$, получим:

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)=-\left(\frac{3}{r^3}-\vec{r}\cdot\vec{r}\,\frac{3}{r^5}\right)=0.$$

2). В пространстве R_2 для поля $f(r)=\ln r$ имеем:

$$\operatorname{grad}\ln r=(\ln r)'\operatorname{grad} r=\frac{1}{r}\,\frac{\vec r}{r}=\frac{\vec r}{r^2},\qquad \vec r=\{x,y\},\ \operatorname{div}\vec r=2,$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\ln r)=\operatorname{div}\left(\frac{1}{r^2}\,\vec r\right)=\frac{1}{r^2}\operatorname{div}\vec r+\vec r\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r^2}=\frac{2}{r^2}+\vec r\cdot\frac{-2}{r^3}\,\frac{\vec r}{r}=0.$$

Гармоническое векторное поле

Векторное поле $\vec a$, являющееся одновременно и потенциальным, и соленоидальным, называется ***гармоническим*** векторным полем.

Отметим следующие свойства гармонического векторного поля.

1). Гармоническое векторное поле обладает скалярным и векторным потенциалом.
2). Скалярный потенциал U является функцией гармонической.
3). Для гармонического векторного поля $\vec a=\{P,Q,R\}$ его координаты P,Q,R являются функциями гармоническими.

Проверим эти свойства.

1). Первое свойство следует из определения, т.к. потенциальное поле обладает скалярным потенциалом, а соленоидальное поле обладает векторным потенциалом.

2). Так как гармоническое поле $\vec a$ потенциально, то оно обладает скалярным потенциалом U и представимо в виде $\vec a=grad\,U$. С другой стороны, гармоническое поле является соленоидальным, поэтому

$$\operatorname{div}\vec a=\operatorname{div}(\operatorname{grad}U)=0.$$

Таким образом, потенциал U гармонического поля $\vec a$ удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической функцией.

3). Для гармонического векторного поля $\vec a=\{P,Q,R\}$ в силу его потенциальности

$$\operatorname{rot}\vec a=0,\ \text{т.е.}\ \operatorname{rot}\vec a=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec i-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec k=0\ \text{или}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{12.5}$$

В силу соленоидальности гармонического векторного поля $\operatorname{div}\vec a=0$, т.е. $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$. Продифференцируем это равенство по x

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)=0$$

и воспользуемся вторым и третьим из равенств (12.5):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)=0\quad\text{или}\quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=0.$$

Это значит, что функция P является гармонической. Аналогично можно показать, что функции Q, R являются гармоническими.

13. Повторные операции теории поля

1). Рассмотрим скалярное поле U. В нем определен вектор $\operatorname{grad} U$. В векторном поле $\operatorname{grad} U$ определены понятия дивергенции и ротора

$$\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{grad} U)}, \quad \boxed{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U)}. \tag{13.1}$$

2). Рассмотрим векторное поле $\vec{a}$. В нем определены скаляр $\operatorname{div}\vec{a}$ и вектор $\operatorname{rot}\vec{a}$. Для скалярного поля $\operatorname{div}\vec{a}$ определено понятие градиента

$$\boxed{\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})}. \tag{13.2}$$

Для векторного поля $\operatorname{rot}\vec{a}$ определены понятия дивергенции и ротора

$$\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})}, \quad \boxed{\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})}. \tag{13.3}$$

Выражения (13.1) — (13.3) определяют повторные операции теории поля. Их называют также дифференциальными операциями второго порядка.

Рассмотрим каждую из этих операций более подробно.

Выражение $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U)$ есть оператор Лапласа ΔU; он был введен в п. 12.3.

Так как поле $\operatorname{grad} U$ является потенциальным, а в потенциальном поле ротор равен нулю, то $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = 0$.

Так как поле $\operatorname{rot}\vec{a}$ является соленоидальным, а в соленоидальном поле дивергенция равна нулю, то $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0$.

Выражения $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{a})$ и $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a})$ используются в электродинамике и связаны соотношением (которое будет установлено позже)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{a}. \tag{13.4}$$

Здесь $\operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{a} = \Delta\vec{a}$ для вектора $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ понимают как $\Delta\vec{a} = \{\Delta P, \Delta Q, \Delta R\}$.

Итак, имеем следующие соотношения

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \Delta U, \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = 0, \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0, \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{a}.\end{gathered}}$$

14. Оператор Гамильтона

Рассмотрим символический оператор Гамильтона (или вектор “набла”)

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}}.$$

С его помощью удобно записать основные операции теории поля:

1) градиент скалярного поля есть произведение вектора $\vec{\nabla}$ на скалярную функцию f

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \left\{\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f, \frac{\partial}{\partial z} f\right\} = \vec{\nabla} f};$$

2) дивергенция векторного поля есть скалярное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на вектор поля

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\} \cdot \{P, Q, R\} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}};$$

3) ротор векторного поля $\vec{a}$ есть векторное произведение вектора $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{a}$

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\vec{\nabla}\times\vec{a}};$$

4) оператор Лапласа Δ скалярного поля f

$$\boxed{\Delta f=\operatorname{div}\left(\operatorname{grad} f\right)=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f=\vec{\nabla}^2 f} \text{ или символически } \boxed{\Delta=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}=\vec{\nabla}^2};$$

5) производная по направлению

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial l}=\vec{l}_0\cdot\operatorname{grad} f=\vec{l}_0\cdot\vec{\nabla} f=\left(\vec{l}_0\cdot\vec{\nabla}\right)f} \text{ или символически } \boxed{\frac{\partial}{\partial l}=\left(\vec{l}_0\cdot\vec{\nabla}\right)}.$$

Такая запись основных операций поля наиболее часто используется в физических и технических приложениях, связанных с изучением реальных физических полей.

При применении оператора $\vec{\nabla}$ следует учитывать и его векторную и его дифференциальную природу. На этом основаны правила применения $\vec{\nabla}$. Эти правила можно было заметить при изучении дифференциальных свойств дивергенции, градиента, ротора.

Применение $\vec{\nabla}$ к выражениям, не содержащим произведения переменных

Применение $\vec{\nabla}$ к выражениям, не содержащим произведения переменных, происходит по правилам векторной алгебры. При этом величина, на которую действует оператор $\vec{\nabla}$, должна стоять за ним.

Поясним это правило на следующих примерах.

1). Пусть $\vec{c}$ – постоянный вектор; тогда $\operatorname{rot}\left(f\cdot\vec{c}\right)=\vec{\nabla}\times\left(f\cdot\vec{c}\right)=\left(\vec{\nabla}f\right)\times\vec{c}=\left(\operatorname{grad} f\right)\times\vec{c}$; здесь переменная величина f перенесена к вектору $\vec{\nabla}$ и поставлена за ним по правилам векторной алгебры (по свойствам векторного произведения скаляр f можно перенести от второго вектора к первому).

2). Применяя $\vec{\nabla}$, получим формулу (13.4):

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)=\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right)-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}-\operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{a};$$

здесь мы воспользовались известной формулой для двойного векторного произведения $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$; как уже отмечалось, $\operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{a}=\Delta\vec{a}$ для вектора $\vec{a}=\{P,Q,R\}$ понимают как $\Delta\vec{a}=\{\Delta P,\ \Delta Q,\ \Delta R\}$.

3). Следует иметь в виду, что $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\neq\vec{a}\cdot\vec{\nabla}$, так как $\vec{\nabla}\cdot\vec{a}=\operatorname{div}\vec{a}$ есть функция $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$; в то время как $\vec{a}\cdot\vec{\nabla}=P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y}+R\frac{\partial}{\partial z}$ есть дифференциальный оператор.

Аналогично, $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a}\neq\vec{a}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)$.

4). Следует иметь в виду, что $\vec{\nabla}$ не является обычным вектором; например,

а) $\vec{\nabla}$ не имеет ни длины, ни направления,

б) $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ не перпендикулярен $\vec{a}$,

в) векторы $\vec{\nabla}u$, $\vec{\nabla}v$ – не коллинеарны, так как вектор $\vec{\nabla}u$ направлен по нормали к поверхности уровня $u = const$, вектор $\vec{\nabla}v$ направлен по нормали к поверхности уровня $v = const$.

Эти примеры показывают, что с вектором $\vec{\nabla}$ следует обращаться с осторожностью и при отсутствии уверенности в полученном результате его следует проверить непосредственно, без использования $\vec{\nabla}$.

Применение $\vec{\nabla}$ к выражениям, содержащим произведение переменных

В этом случае на первый план выходят дифференциальные свойства оператора $\vec{\nabla}$ и правило дифференцирования произведения.

Результатом действия $\vec{\nabla}$ на произведение переменных является сумма произведений; в каждом из них $\vec{\nabla}$ действует на один множитель, который отмечают штрихом и располагают справа от $\vec{\nabla}$, соблюдая правила векторной алгебры.

Поясним это правило на следующих примерах.

1). Пусть f – функция, $\vec{a}$ – переменный вектор; тогда

$$\operatorname{div}(f\vec{a}) = \vec{\nabla}\cdot(f\vec{a}) = \vec{\nabla}\cdot\left(f'\vec{a}\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{a}'\right).$$

Чтобы поставить множитель, помеченный штрихом, рядом с $\vec{\nabla}$ и за ним, воспользуемся двумя свойствами скалярного произведения: скаляр можно переносить от второго вектора к первому и скаляр можно выносить за знак скалярного произведения. Поэтому

$$\operatorname{div}(f\vec{a}) = \vec{\nabla}\cdot(f\vec{a}) = \vec{\nabla}\cdot\left(f'\vec{a}\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{a}'\right) = \left(\vec{\nabla}f'\right)\cdot\vec{a} + f\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}'\right) = (\operatorname{grad} f)\cdot\vec{a} + f\operatorname{div}\vec{a}.$$

2). Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ – переменные векторные поля; тогда

$$\operatorname{div}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}'\times\vec{b}\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}'\right).$$

Чтобы поставить множитель, помеченный штрихом, рядом с $\vec{\nabla}$ и за ним, воспользуемся свойством векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}' = -\vec{b}'\times\vec{a}$ и свойством смешанного произведения $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}'\times\vec{b}\right) = \left(\vec{\nabla}\times\vec{a}'\right)\cdot\vec{b}$, $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{b}'\times\vec{a}\right) = \left(\vec{\nabla}\times\vec{b}'\right)\cdot\vec{a}$. Поэтому

$$\operatorname{div}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}'\times\vec{b}\right) + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}'\right) = \left(\vec{\nabla}\times\vec{a}'\right)\cdot\vec{b} - \left(\vec{\nabla}\times\vec{b}'\right)\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}.$$

15. Теория поля в ортогональной криволинейной системе

15.1. Криволинейная система координат и ее базис

Во многих задачах удобно определять положение точки пространства не декартовыми координатами (x, y, z), а другой тройкой чисел (u, v, w), которую называют криволинейными координатами.

Пусть известна связь между декартовыми и криволинейными координатами $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ или в векторном виде $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$.

Введем понятие координатных поверхностей и координатных линий.

Координатные поверхности — это поверхности, на которых одна из координат сохраняет постоянное значение, например, $u = const$, или $v = const$, или $w = const$.

Координатная линия l_u – это множество точек пространства, у которых координата u меняется, а координаты v, w фиксированы, $v = v_0$, $w = w_0$; при этом $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0, w_0)$ есть параметрическое уравнение линии l_u; вектор $\vec{r}_u{}'(u_0, v_0, w_0)$ является касательным вектором к линии l_u в точке P_0 (рис.80).

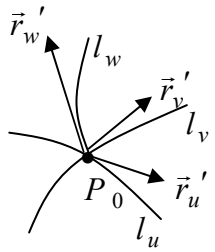

Рис. 80

Координатная линия l_v – это множество точек плоскости, у которых координата v меняется, а координаты u, w фиксированы, $u = u_0$, $w = w_0$; при этом $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v, w_0)$ – параметрическое уравнение линии l_v; вектор $\vec{r}_v{}'(u_0, v_0, w_0)$ является касательным вектором к линии l_v в точке P_0 (рис. 80).

Аналогично определяется координатная линия l_w и ее касательный вектор $\vec{r}_w{}'$.

Координатные линии являются линиями пересечения двух координатных поверхностей; например, линия l_w является пересечением координатных поверхностей $u = u_0$, $v = v_0$.

Векторы $\vec{r}_u{}'$, $\vec{r}_v{}'$, $\vec{r}_w{}'$ образуют базис криволинейной системы координат. Его называют локальным базисом, так как он меняется при переходе от точки к точке.

Если векторы $\vec{r}_u{}'$, $\vec{r}_v{}'$, $\vec{r}_w{}'$ — ортогональны, то базис $\vec{r}_u{}'$, $\vec{r}_v{}'$, $\vec{r}_w{}'$ называют ***ортогональным***. Наиболее удобен соответствующий ***ортонормированный*** базис (ОНБ)

$$\boxed{\vec{e}_u = \frac{\vec{r}_u{}'}{\left|\vec{r}_u{}'\right|} = \frac{\vec{r}_u{}'}{H_u}, \quad \vec{e}_v = \frac{\vec{r}_v{}'}{\left|\vec{r}_v{}'\right|} = \frac{\vec{r}_v{}'}{H_v}, \quad \vec{e}_w = \frac{\vec{r}_w{}'}{\left|\vec{r}_w{}'\right|} = \frac{\vec{r}_w{}'}{H_w}}. \qquad (15.1)$$

Величины $H_u = \left|\vec{r}_u{}'\right|$, $H_v = \left|\vec{r}_v{}'\right|$, $H_w = \left|\vec{r}_w{}'\right|$ называют ***коэффициентами Ламэ***.

Цилиндрическая система координат и ее базис

Координатные поверхности цилиндрической системы координат:

$\rho = const$ – круговые цилиндры с осью симметрии OZ,

$\varphi = const$ – полуплоскости, проходящие через ось OZ,

$z = const$ – плоскости, перпендикулярные оси OZ.

Координатные линии:

l_ρ – лучи, перпендикулярные оси OZ и имеющие начало на этой оси,

l_φ – окружности с центром на оси OZ, лежащие в плоскостях $z = const$,

l_z – прямые, параллельные оси OZ.

Запишем связь между декартовыми и цилиндрическими координатами

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$ или в векторном виде $\vec{r} = \{\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z\}$.

Локальный базис цилиндрической системы образуют векторы, касательные к координатным линиям l_ρ, l_φ, l_z:

$$\vec{r}_\rho{}' = \{\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0\},\ \ \vec{r}_\varphi{}' = \{-\rho\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi,\ 0\},\ \ \vec{r}_z{}' = \{0,\ 0,\ 1\}.$$

Так как $\vec{r}_\rho \cdot \vec{r}_\varphi = 0,\ \vec{r}_\rho \cdot \vec{r}_z = 0,\ \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_z = 0$, то векторы $\vec{r}_\rho, \vec{r}_\varphi, \vec{r}_z$ ортогональны и образуют ортогональный базис. Найдем коэффициенты Ламэ и ортонормированный базис по формулам (15.1):

$$H_\rho = \left|\vec{r}_\rho{}'\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0} = 1,\ \ H_\varphi = \left|\vec{r}_\varphi{}'\right| = \sqrt{(-\rho\sin\varphi)^2 + (\rho\cos\varphi)^2 + 0} = \rho,\ \ H_z = \left|\vec{r}_z{}'\right| = 1;$$

$$\vec{e}_\rho = \frac{\vec{r}_\rho{}'}{H_\rho} = \vec{r}_\rho{}',\ \ \vec{e}_\varphi = \frac{\vec{r}_\varphi{}'}{H_\varphi} = \frac{1}{\rho}\vec{r}_\varphi{}',\ \ \vec{e}_z = \frac{\vec{r}_z{}'}{H_z} = \vec{r}_z{}'.$$

Итак, ***коэффициенты Ламэ и ортонормированный базис для цилиндрической системы*** координат имеют вид

$$\boxed{H_\rho = 1,\ \ H_\varphi = \rho,\ \ H_z = 1}, \tag{15.2}$$

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \{\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0\},\ \ \vec{e}_\varphi = \{-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0\},\ \ \vec{e}_z = \{0,\ 0,\ 1\}}. \tag{15.3}$$

Сферическая система координат и ее базис

Координатные поверхности сферической системы координат:

$r = const$ – сферы с центром в точке O,

$\theta = const$ – круговые полуконусы с осью симметрии OZ,

$\varphi = const$ – полуплоскости, проходящие через ось OZ.

Координатные линии:

l_r – лучи, выходящие из точки O,

l_θ – меридианы на сфере,

l_z – параллели на сфере.

Вспомним формулы (7.30), устанавливающие связь между декартовыми и сферическими координатами

$$\boxed{x = r\sin\theta\cdot\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\cdot\sin\varphi,\ \ z = r\cdot\cos\theta.}$$

Локальный базис сферической системы координат образуют векторы, касательные к координатным линиям l_r, l_θ, l_φ :

$$\vec{r}_r{}' = \{\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\},\ \ \vec{r}_\theta{}' = \{r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta\},$$

$$\vec{r}_\varphi{}' = \{-r\sin\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ 0\}.$$

Скалярные произведения этих векторов равны нулю, поэтому эти векторы ортогональны и образуют ортогональный базис. Найдем коэффициенты Ламэ и ортонормированный базис по формулам (15.1):

$$H_r = \left|\vec{r}_r{}'\right| = \sqrt{(\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 + \cos^2\theta} = 1,$$

$$H_\theta = \left|\vec{r}_\theta{}'\right| = \sqrt{(r\cos\theta\cos\varphi)^2 + (r\cos\theta\sin\varphi)^2 + (-r\sin\theta)^2} = r,$$

$$H_\varphi = \left|\vec{r}_\varphi{}'\right| = \sqrt{(-r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta\cos\varphi)^2 + 0} = r\sin\theta;$$

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}_r{}'}{H_r} = \vec{r}_r{}',\ \ \vec{e}_\theta = \frac{\vec{r}_\theta{}'}{H_\theta} = \frac{1}{r}\vec{r}_\theta{}',\ \ \vec{e}_\varphi = \frac{\vec{r}_\varphi{}'}{H_\varphi} = \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\vec{r}_\varphi{}'.$$

Итак, ***коэффициенты Ламэ и ортонормированный базис для сферической системы*** координат имеют вид

$$\boxed{H_r = 1,\ \ H_\theta = r,\ \ H_\varphi = r\sin\theta}, \qquad (15.4)$$

$$\boxed{\vec{e}_r = \{\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\},\ \ \vec{e}_\theta = \{\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\},\ \ \vec{e}_\varphi = \{-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0\}.}$$

Далее мы рассмотрим вычисление основных характеристик теории поля в произвольной ортогональной криволинейной системе координат.

15.2. Основные характеристики поля в ортогональных координатах

Градиент в ортогональных координатах

Пусть задано скалярное поле $f(u,v,w)$ в криволинейной ортогональной системе координат с ортонормированным базисом $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v$, $\vec{e}_w$. Вектор $\operatorname{grad} f = \vec{b}$ разложим по этому базису

$$\operatorname{grad} f = \vec{b} = b_u\vec{e}_u + b_v\vec{e}_v + b_w\vec{e}_w .$$

В ортонормированном базисе координаты вектора равны его проекциям на базисные векторы:

$$b_u = \operatorname{np}_{\vec{e}_u}\operatorname{grad} f = \vec{e}_u\cdot\operatorname{grad} f = \frac{\vec{r}_u{}'}{\left|\vec{r}_u{}'\right|}\cdot\operatorname{grad} f = \frac{1}{H_u}\{x'_u, y'_u, z'_u\}\cdot\{f'_x, f'_y, f'_z\} =$$

$$= \frac{1}{H_u}\left(f'_x\cdot x'_u + f'_y\cdot y'_u + f'_z\cdot z'_u\right) = \frac{1}{H_u}\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Аналогично, $b_v = \dfrac{1}{H_v}\dfrac{\partial f}{\partial v}$, $b_w = \dfrac{1}{H_w}\dfrac{\partial f}{\partial w}$. Итак,

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \frac{1}{H_u}\frac{\partial f}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{H_v}\frac{\partial f}{\partial v}\vec{e}_v + \frac{1}{H_w}\frac{\partial f}{\partial w}\vec{e}_w}\ . \qquad (15.5)$$

В частности, в цилиндрических координатах

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z}\ ; \qquad \ldots \qquad (15.6)$$

в сферических координатах

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi}\ .$$

Пример 15.1. Скалярное поле $f(\rho,\varphi,z) = \rho\cos\varphi + z\sin\varphi + 2\rho$ задано в цилиндрической системе координат. Найти наибольшую скорость изменения поля в точке $A(1,\ \pi,\ 1)$.

Решение. Наибольшая скорость изменения поля в точке равна модулю его градиента в этой точке. Найдем градиент по формуле (15.6):

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z = (\cos\varphi + 2)\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}(-\rho\sin\varphi + z\cos\varphi)\vec{e}_\varphi + \sin\varphi\cdot\vec{e}_z .$$

В заданной точке $\rho = 1$, $\varphi = \pi$, $z = 1$, поэтому $\operatorname{grad} f(A) = \vec{e}_\rho - \vec{e}_\varphi$ и $\left|\operatorname{grad} f(A)\right| = \sqrt{2}$.

Итак, наибольшая скорость изменения поля в точке A равна $\sqrt{2}$.

Векторные линии в ортогональных координатах

Рассмотрим векторное поле $\vec{a} = a_u \vec{e}_u + a_v \vec{e}_v + a_w \vec{e}_w$ в произвольной ортогональной системе координат. Векторная линия поля $\vec{a}$ есть линия, в каждой точке которой касательный вектор $d\vec{r}$ коллинеарен вектору поля $\vec{a}$. Так как

$$d\vec{r} = \vec{r}_u{}' du + \vec{r}_v{}' dv + \vec{r}_w{}' dw, \qquad \vec{r}_u{}' = \left|\vec{r}_u{}'\right| \vec{e}_u = H_u \vec{e}_u, \quad \vec{r}_v{}' = H_v \vec{e}_v, \quad \vec{r}_w{}' = H_w \vec{e}_w,$$

то, подставляя выражения для $\vec{r}_u{}'$, $\vec{r}_v{}'$, $\vec{r}_w{}'$ в $d\vec{r}$, получим

$$\boxed{d\vec{r} = \left(H_u\, du\right) \vec{e}_u + \left(H_v\, dv\right) \vec{e}_v + \left(H_w\, dw\right) \vec{e}_w} \,. \qquad (15.7)$$

Из условия коллинеарности векторов $d\vec{r}$ и $\vec{a}$ следует пропорциональность их координат:

$$\boxed{\frac{H_u\, du}{a_u} = \frac{H_v\, dv}{a_v} = \frac{H_w\, dw}{a_w}}. \qquad (15.8)$$

Мы получили систему дифференциальных уравнений для отыскания векторных линий поля $\vec{a}$.

Пример 15.2. Найти векторные линии поля $\vec{a} = \rho\varphi \vec{e}_\varphi + z\vec{e}_z$, заданного в цилиндрической системе координат.

Решение. Воспользуемся уравнениями (15.8): $\dfrac{H_\rho\, d\rho}{a_\rho} = \dfrac{H_\varphi\, d\varphi}{a_\varphi} = \dfrac{H_z\, dz}{a_z}$.

Так как $H_\rho = 1$, $H_\varphi = \rho$, $H_z = 1$, $a_\rho = 0$, $a_\varphi = \rho\varphi$, $a_z = z$, то уравнения векторных линий примут вид $\dfrac{d\rho}{0} = \dfrac{\rho\, d\varphi}{\rho\varphi} = \dfrac{dz}{z}$ или $d\rho = 0$, $\dfrac{d\varphi}{\varphi} = \dfrac{dz}{z}$. Отсюда $\begin{cases} \rho = c_1, \\ z = c_2\varphi, \end{cases}$ т.е. векторными линиями являются спирали.

Линейный интеграл в ортогональных координатах

Рассмотрим векторное поле $\vec{a}$ и линейный интеграл этого поля $\int\limits_{(L)} \vec{a}\, d\vec{r}$.

Запишем векторы $\vec{a}$ и $d\vec{r}$ в ортонормированном базисе $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v$, $\vec{e}_w$:

$\vec{a} = a_u \vec{e}_u + a_v \vec{e}_v + a_w \vec{e}_w$, $\quad d\vec{r} = \left(H_u\, du\right) \vec{e}_u + \left(H_v\, dv\right) \vec{e}_v + \left(H_w\, dw\right) \vec{e}_w$. Тогда

$$\boxed{\int\limits_{(L)} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{(L)} a_u H_u\, du + a_v H_v\, dv + a_w H_w\, dw}. \qquad (15.9)$$

Пример 15.3. Найти циркуляцию поля $\vec{a} = \rho \sin\varphi \vec{e}_\rho - \rho^2 z \vec{e}_\varphi + \rho^2 \vec{e}_z$, заданного в цилиндрической системе координат, вдоль линии $x^2 + y^2 = R^2$, $z = h$.

Решение. Циркуляцию вычислим по формуле (15.9), записав ее для цилиндрической системы координат

$$\int\limits_{(L)} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{(L)} a_\rho H_\rho\, d\rho + a_\varphi H_\varphi\, d\varphi + a_z H_z\, dz \,.$$

На заданной линии $\rho = R$, $z = h$, поэтому $d\rho = 0$, $dz = 0$, $a_\varphi H_\varphi = -\rho^2 z \cdot \rho = -R^3 h$,

$$\int\limits_{(L)} \vec{a}\, d\vec{r} = \int\limits_{(L)} a_\varphi H_\varphi\, d\varphi = -R^3 h \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi R^3 h\ .$$

Поток в ортогональных координатах

Поток поля $\vec{a}$ через ориентированную поверхность (σ) вычисляется по формуле $\Pi_\sigma = \int\limits_{(\sigma)} (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma$, где $\vec{n}$ – единичный нормальный вектор к поверхности (σ).

Рассмотрим случай, когда (σ) есть часть координатной поверхности $w = w_0$. Тогда ее параметрическое уравнение $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w_0)$, $(u, v) \in (S)$ и по формулам (10.6)

$$\Pi_\sigma = \pm \iint\limits_{(S)} \left[\vec{a} \cdot \left(\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'\right)\right]_{w=w_0} du\, dv\,;$$

здесь берется знак $(+)$, если $\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' \uparrow\uparrow \vec{n}$, и знак $(-)$, если $\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' \uparrow\downarrow \vec{n}$.

Заменим в подынтегральном выражении $\vec{r}_u{}' = \left|\vec{r}_u{}'\right| \vec{e}_u = H_u \vec{e}_u$, $\vec{r}_v{}' = H_v \vec{e}_v$ и учтем, что в ортонормированном базисе $\vec{e}_u \times \vec{e}_v = \vec{e}_w$ и $\vec{a} \cdot \vec{e}_w = a_w$. Тогда

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'\right) = \vec{a} \cdot \left(H_u \vec{e}_u \times H_v \vec{e}_v\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{e}_w\right) H_u H_v = a_w H_u H_v\,,$$

$$\boxed{\Pi_\sigma = \pm \iint\limits_{(S)} \left(a_w H_u H_v\right)_{w=w_0} du\, dv}\ ; \qquad (15.10)$$

здесь берется знак $(+)$, если $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{e}_w$, знак $(-)$, если $\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{e}_w$. Формула (15.10) получена для вычисления потока через часть координатной поверхности $w = w_0$.

Аналогично, если (σ) есть часть координатной поверхности $u = u_0$, то

$$\boxed{\Pi_\sigma = \pm \iint\limits_{(S)} \left(a_u H_v H_w\right)_{u=u_0} dv\, dw}\ ; \qquad (15.11)$$

здесь берется знак $(+)$, если $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{e}_u$, знак $(-)$, если $\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{e}_u$.

Пример 15.4. Найти поток поля $\vec{a} = \rho \vec{e}_\rho - \cos\varphi \vec{e}_\varphi + z \vec{e}_z$, заданного в цилиндрической системе координат, через внешнюю сторону замкнутой поверхности (σ), образованной поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 3$ (рис. 81).

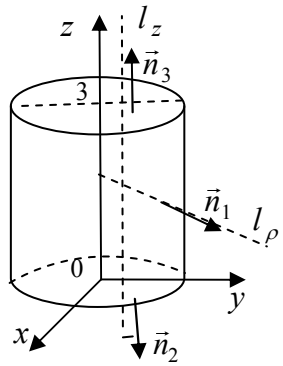

Рис. 81

Решение. Поверхность (σ) состоит из поверхности цилиндра (σ_1) с уравнением $x^2 + y^2 = 4$ или $\rho = 2$, из нижнего основания (σ_2) с уравнением $z = 0$ и верхнего основания (σ_3) с уравнением $z = 3$. Эти три поверхности являются координатными поверхностями цилиндрической системы координат, поэтому по формуле (15.10) получим:

$$\Pi_{\sigma_1} = \pm \iint\limits_{(S)} \left(a_\rho H_z H_\varphi\right)_{\rho=2} dz\, d\varphi = +\iint\limits_{(S)} \left(\rho\cdot\rho\right)_{\rho=2} dz\, d\varphi = 4\int\limits_0^3 dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 24\pi,$$

$$\Pi_{\sigma_2} = \pm \iint\limits_{(S)} \left(a_z H_\rho H_\varphi\right)_{z=0} d\rho\, d\varphi = -\iint\limits_{(S)} \left(z\cdot\rho\right)_{z=0} d\rho\, d\varphi = 0,$$

$$\Pi_{\sigma_3} = \pm \iint\limits_{(S)} \left(a_z H_\rho H_\varphi\right)_{z=3} d\rho\, d\varphi = +\iint\limits_{(S)} \left(z\cdot\rho\right)_{z=3} d\rho\, d\varphi = 3\int\limits_0^2 \rho\, d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 12\pi;$$

в формуле для Π_{σ_1} перед интегралом выбран знак $(+)$, так как вектор $\vec{e}_\rho$ есть касательный вектор к координатной линии l_ρ, направленный в сторону возрастания ρ, и в ту же сторону направлен вектор $\vec{n}_1$ нормали к внешней стороне цилиндра (рис. 81); в формуле для Π_{σ_2} перед интегралом выбран знак $(-)$, так как вектор $\vec{e}_z$ есть касательный вектор к координатной линии l_z, направленный в сторону возрастания z, а вектор $\vec{n}_2$ нормали к нижнему основанию направлен в противоположную сторону; в формуле для Π_{σ_3} перед интегралом выбран знак $(+)$, так как вектор $\vec{e}_z$ направлен в сторону возрастания z, и вектор $\vec{n}_3$ нормали к верхнему основанию направлен в ту же сторону.

Таким образом, $\Pi_\sigma = \Pi_{\sigma_1} + \Pi_{\sigma_2} + \Pi_{\sigma_3} = 24\pi + 0 + 12\pi = 36\pi.$

Пример 15.5. Найти поток поля $\vec{a} = r\vec{e}_r + r\sin\theta\,\vec{e}_\theta + r\varphi\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$, заданного в сферической системе координат, через внешнюю поверхность конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, ограниченного плоскостью $z = 1$.

Решение. Поверхность конуса есть часть координатной поверхности $\theta = \frac{\pi}{4}$ (рис. 82), поэтому по формуле (15.10)

$$\Pi_\sigma = \pm \iint\limits_{(S)} \left(a_\theta H_r H_\varphi\right)_{\theta=\frac{\pi}{4}} dr\, d\varphi = +\iint\limits_{(S)} \left(r\sin\theta\cdot r\sin\theta\right)_{\theta=\frac{\pi}{4}} dr\, d\varphi = \frac{1}{2}\iint\limits_{(S)} r^2\, dr\, d\varphi;$$

перед интегралом выбран знак $(+)$, так как вектор $\vec{e}_\theta$ есть касательный вектор к координатной линии l_θ (к меридиану сферы), направленный в сторону возрастания θ, и в ту же сторону направлен вектор $\vec{n}$ нормали к внешней стороне конуса.

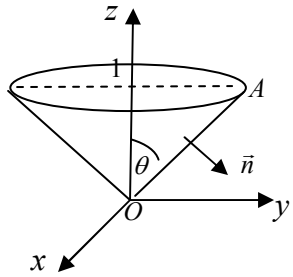

Рис. 82

На поверхности конуса r меняется от $r = 0$ (в точке O) до $r = \sqrt{2}$ (в точке A), φ меняется от 0 до 2π; поэтому

$$\Pi_\sigma = \frac{1}{2}\iint\limits_{(S)} r^2\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^2 dr = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi.$$

Дивергенция в ортогональных координатах

Воспользуемся инвариантным определением дивергенции (10.12):

$$\left(\operatorname{div}\vec{a}\right)_{P_0} = \lim_{(V)\to P_0} \frac{\Pi_\sigma}{V};$$

здесь (V) – любое тело, содержащее точку P_0, (σ) – граница тела (V).

В частности, за (σ) удобно взять поверхность, состоящую из координатных поверхностей $u=u_0$, $u=u_0+\Delta u$, $v=v_0$, $v=v_0+\Delta v$, $w=w_0$, $w=w_0+\Delta w$ (рис. 83).

На поверхности (σ_1): $u=u_0$, $\vec{n}_1=-\vec{e}_u$; на поверхности $\left(\sigma_1^{/}\right)$: $u=u_0+du$, $\vec{n}_1^{/}=+\vec{e}_u$, поэтому по формуле (15.11)

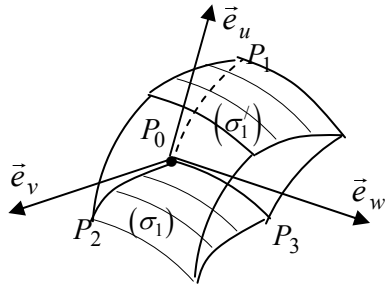

Рис. 83

$$\Pi_{\sigma_1}=-\iint\limits_{(S)}\left(a_u H_v H_w\right)_{u=u_0}dv\,dw,$$

$$\Pi_{\sigma_1^{/}}=+\iint\limits_{(S)}\left(a_u H_v H_w\right)_{u=u_0+du}dv\,dw,$$

$$\Pi_{\sigma_1}+\Pi_{\sigma_1^{/}}=\iint\limits_{(S)}\left[\left(a_u H_v H_w\right)_{u=u_0+du}-\left(a_u H_v H_w\right)_{u=u_0}\right]dv\,dw.$$

Применим формулу Тейлора первого порядка и теорему о среднем:

$$\Pi_{\sigma_1}+\Pi_{\sigma_1^{/}}=\iint\limits_{(S)}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(a_u H_v H_w\right)_{u=u_0}+o\left(du\right)\right]dv\,dw=\frac{\partial}{\partial u}\left(a_u H_v H_w\right)_{P_0}dudv\,dw+o\left(dudv\,dw\right).$$

Аналогично, для поверхности (σ_2), где $v=v_0$, и для поверхности $\left(\sigma_2^{/}\right)$, где $v=v_0+dv$,

$$\Pi_{\sigma_2}+\Pi_{\sigma_2^{/}}=\frac{\partial}{\partial v}\left(a_v H_u H_w\right)_{P_0}dudv\,dw+o\left(dudv\,dw\right);$$

для поверхности (σ_3), где $w=w_0$, и для поверхности $\left(\sigma_3^{/}\right)$, где $w=w_0+dw$,

$$\Pi_{\sigma_3}+\Pi_{\sigma_3^{/}}=\frac{\partial}{\partial w}\left(a_w H_u H_v\right)_{P_0}dudv\,dw+o\left(dudv\,dw\right).$$

Складывая эти потоки, получим поток через замкнутую поверхность (σ):

$$\Pi_{\sigma}=\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(a_u H_v H_w\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(a_v H_u H_w\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(a_w H_u H_v\right)\right]_{P_0}dudv\,dw+o\left(dudv\,dw\right).$$

Теперь вычислим объем V тела (рис. 83): в п. 7.4 было показано, что

$$\overrightarrow{PP_1}=\vec{r}_u{}'\cdot du+o\left(du\right),\quad \overrightarrow{PP_2}=\vec{r}_v{}'\cdot dv+o\left(dv\right),\quad \overrightarrow{PP_3}=\vec{r}_w{}'\cdot dw+o\left(dw\right).$$

В ортонормированном базисе эти векторы ортогональны и потому с точностью до $o\left(dudvdw\right)$ получим

$$V\approx\left|\overrightarrow{PP_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PP_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PP_3}\right|=\left|\vec{r}_u{}'\right|\cdot\left|\vec{r}_v{}'\right|\cdot\left|\vec{r}_w{}'\right|du\,dv\,dw=H_u H_v H_w du\,dv\,dw.$$

Тогда

$$\frac{\Pi_{\sigma}}{V}=\frac{\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(a_u H_v H_w\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(a_v H_u H_w\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(a_w H_u H_v\right)\right]_{P_0}dudv\,dw+o\left(dudv\,dw\right)}{H_u H_v H_w du\,dv\,dw+o\left(dudv\,dw\right)}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу, получим

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{H_u H_v H_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(a_u H_v H_w\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(a_v H_u H_w\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(a_w H_u H_v\right)\right]}. \qquad (15.12)$$

В частности, в цилиндрических координатах

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{\rho}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho a_\rho\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(a_\varphi\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho a_z\right)\right]}, \qquad (15.13)$$

в сферических координатах

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 a_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta a_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(a_\varphi\right)}\ .$$

Пример 15.6. Найти поток поля $\vec{a}=\rho\vec{e}_\rho-\cos\varphi\vec{e}_\varphi+z\vec{e}_z$, заданного в цилиндрической системе координат, через внешнюю сторону замкнутой поверхности (σ), образованной поверхностями $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=3$ (рис. 81).

Решение. Поверхность (σ) — замкнутая, поэтому можно воспользоваться формулой Остроградского

$$\Pi_\sigma=\oint\limits_{(\sigma)}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=\int\limits_{(V)}\operatorname{div}\vec{a}\,dV\ .$$

Вычислим дивергенцию по формуле (15.13)

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{\rho}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho a_\rho\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(a_\varphi\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho a_z\right)\right]=\frac{1}{\rho}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\cos\varphi\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho z\right)\right]=\frac{1}{\rho}\left(3\rho+\sin\varphi\right).$$

Учитывая, что в цилиндрической системе координат $dV=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$, получим

$$\Pi_\sigma=\int\limits_{(V)}\operatorname{div}\vec{a}\,dV=\iint\limits_{(S)}\left(3\rho+\sin\varphi\right)d\rho\,d\varphi\int\limits_0^3 dz=3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(3\rho+\sin\varphi\right)d\rho=3\int\limits_0^{2\pi}\left(6+2\sin\varphi\right)d\varphi=36\pi.$$

Сравните с вычислением этого потока в примере 15.3 без формулы Остроградского.

Ротор в ортогональных координатах

Воспользовавшись инвариантным определением ротора, можно получить выражение для ротора в ортогональной криволинейной системе координат, аналогично тому, как это было сделано для дивергенции:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\dfrac{\vec{e}_u}{H_v H_w} & \dfrac{\vec{e}_v}{H_u H_w} & \dfrac{\vec{e}_w}{H_u H_v}\\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w}\\ a_u H_u & a_v H_v & a_w H_w\end{vmatrix}.$$

В частности, в цилиндрических и, соответственно, в сферических координатах

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\rho}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \dfrac{1}{\rho}\vec{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z\end{vmatrix},\qquad \operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\dfrac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta} & \dfrac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\vec{e}_\varphi}{r}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ a_r & a_\theta\cdot r & a_\varphi\cdot r\sin\theta\end{vmatrix}.$$

Оператор Лапласа в ортогональных координатах

Оператор Лапласа есть оператор вида $\Delta f=\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$, поэтому для его записи следует воспользоваться формулами (15.12) и (15.5). Тогда

$$\boxed{\Delta f=\frac{1}{H_u H_v H_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_v H_w}{H_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_u H_w}{H_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_u H_v}{H_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]}\ .$$

В частности, в цилиндрических координатах

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{\rho}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}},$$

в сферических координатах

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}}. \qquad (15.14)$$

Пример 15.7. Найти все решения уравнения Лапласа $\Delta f = 0$, зависящие только от r.

Решение. Так как f зависит только от r и не зависит от θ и φ, то используя формулу (15.14), получим: $\Delta f = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}\right)=0$. Отсюда

$$r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}=C,\quad \frac{\partial f}{\partial r}=\frac{C}{r^2},\quad f(r)=\frac{C_1}{r}+C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Краснов М.Л. Вся высшая математика /М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Эдиториал УРСС, 2004. Т.4. 352 с.
2. Бермант А.Ф. Курс математического анализа /А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. СПб.: Издательство «Лань», 2005. 736 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике /Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2003. Ч.1. 288 с.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа /С.М. Никольский. М.: Физматлит, 2001. 592 с.
5. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов /И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. М.: Наука, 1980. 946 с.
6. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа /Г.Н. Берман. М.: Наука, 2002. 443 с.
7. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. М.: «Изд-во Астрель», 2003. 495 с.

Учебное издание

Минькова Ревекка Максовна

Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных

Редактор *Н.П. Кубыщенко*

Компьютерная верстка *Р.М. Миньковой*

ИД № 06263 от 12. 11. 2001

Подписано в печать 24. 01. 07 Формат 60×84 1/16
Бумага типографская Офсетная печать Усл. печ. л. 6,92
Уч.-изд. л. 5,5 Тираж Заказ Цена ″С″

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19

Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, Мира, 19